2.3- متتاليات الدوال- سلاسل الدوال

1.2.3- متتاليات الدوال:

لتكن $H(I,IR)$ مجموعة الدوال المعرفة على() $I(I\subset IR)$ و تأخذ قيمها في IR

تعريف(1.1.2.3): متتالية الدوال هي التطبيق من N في المجموعة $H(I,IR)$ الذي يرفق بكل n عدد طبيعي الدالة h_n و نرمز اليها $(h_n)_{n\geq 0}$.

مثال(1.1.2.3): لتكن متتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كالتالي

$$g_n:[0,\pi]\rightarrow IR$$
$$x\rightarrow \sin nx/n$$

و حدودها $g_1(x)=\sin x$ ، $g_2(x)=\sin 2x/2$ ،...، $g_n(x)=\sin nx/n$.

ملاحظة(1.1.2.3): ينبغي ان نميز بين التقارب من أن كل نقطة x من I لمتتالية الدوال العددية ذات الحد العام $h_n(x)$ و التقارب على المجال I لمتتالية الدوال (h_n).

تقارب متتاليات الدوال

<u>التقارب البسيط:</u>

لتكن (h_n) متتالية الدوال من المجموعة $H(I,IR)$

تعريف(2.1.2.3): نقول عن متتالية الدوال (h_n) انها تتقارب ببساطة نحو الدالة h من $H(I,IR)$ اذا كان من اجل كل x من I المتتالية العددية $(h_n(x))$ تتقارب نحو $h(x)$ اي انه $\forall x\in I,\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(x)=h(x)$ او بعبارة اخرى

$$\lim_{n\to+\infty}h_n(x)=h(x)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\forall x\in I;\exists N(x,\varepsilon),$$
$$n>N(x,\varepsilon)\rightarrow |h_n(x)-h(x)|<\varepsilon$$

مثال(2.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال $(f_n)_{\geq 1}$ المعرفة بعبارة حدها العام كما يلي

$$\forall x\in IR_+,\ f_n(x)=e^{-nx}$$

الحل: لدينا $f_n(0)=1$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(0)=1$

كذلك $\forall x\in IR_+,\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-nx}=0$ و منه نستنتج أن متتالة الدوال $(f_n)_{\geq 1}$ تتقارب ببساطة نحو الدالة f و المعرفة كما يلي $f(x)=\begin{cases}1,si;x\neq 0\\ 0،si\ ,x\succ 0\end{cases}$

<u>التقارب المنتظم:</u>

تعريف(2.1.2.3): نقول عن متتالية الدوال (h_n) انها تتقارب بانتظام نحو الدالة h من $H(I,IR)$ على المجال I اذا كان الحد الاعلى لـ $|h_n(x)-h(x)|$ ينتهي الى الصفر عندما

من اجل كل x من I أي، $n \to +\infty$ $\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} \sup\left|h_n(x) - h(x)\right| = 0$

مثال(3.1.2.3):لتكن متتالية الدوال (f_n) ذات الحد العام $f_n(x) = \sin nx/n$ ، $n \geq 1$

تتقارب ببساطة نحو الدالة المعدومة و بالتالي

$\forall x \in [0,\pi], \sup\left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup\left|\sin nx/n\right| = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ و منه نستنتج أن

متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام نحو الدالة المعدومة على $[0,\pi]$.

مثال(4.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 0}$ بحيث $\forall x \in [0,1], g_n(x) = x(1-x)^n$

ادرس التقاربات لمتتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 0}$ على المجال $[0,1]$

الحل: واضح أن $g_n(0) = g_n(1) = 0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} g_n(0) = \lim_{n\to+\infty} g_n(1) = 0$

و إذا كان $x \in]0,1[\Leftrightarrow 0 < x < 1, \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x(1-x)^n = 0$

ومنه متتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 0}$ تتقارب ببساطة نحو الدالة المعدومة

التقارب المنتظم: لدراسته نستعمل المشتقة لتحديد القيمة العظمى للدالة g_n أي

$\forall x \in]0,1[, g_n'(x) = (1-x)^{n-1}[1 - x(1+n)]$ ومنه $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/n+1$

وبالتالي

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} \sup\left|g_n(x) - g(x)\right| = \lim_{n\to+\infty} \sup\left|g_n(x)\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|g(1/n)\right|$$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 0 \times e = 0$ ومنه $(g_n)_{n\geq 0}$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

ملاحظة(2.1.2.3): التعاريف السابقة تدل على أن التقارب المنتظم لمتتالية الدوال يستلزم التقارب البسيط و ذلك لان $\forall x \in I, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \sup\left|f_n(x) - f(x)\right|$

عكس هذه الملاحظة غير صحيح

مثال(5.1.2.3): متتالية الدوال $(k_n)_{n\geq 0}$ حيث $\forall x \in [0,1], k_n(x) = x^n$ تتقارب ببساطة نحو الدالة $k(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ لما لكن $\forall x[0,1], \lim_{n\to+\infty} \sup\left|k_n(x)\right| = 1$ و بالتالي

$(k_n)_{n\geq 0}$ ليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

متتالية الدوال و الاستمرار:

نظرية(1.1.2.3): النهاية المنتهية لمتتالية الدوال المستمرة و المتقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ مستمرة على $[a,b]$

البرهان: لتكن متتالية الدوال (f_n) نفرض انها مستمرة على $[a,b]$، لنبين أنها اذا كانت متقاربة بانتظام نحو الدالة f ، فان f مستمرة على $[a,b]$

ليكن
$$(x,x_0)\in[a,b]^2, \left|f(x)-f(x_0)\right| \le$$
$$\left|f(x)-f_n(x)\right|+\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right|+\left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|$$

من التقارب المطلق للمتتالية (f_n) نستنتج انه،

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\Rightarrow \begin{cases}\left|f(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon/3............(1)\\ \left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|<\varepsilon/3..........(2)\end{cases}$ ، و بما أن f_n مستمرة عند x_0

يمكن ان نجد $\alpha(\varepsilon,x_0)$ بحيث $\left|x-x_0\right|<\alpha\to\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right|<\varepsilon/3........(3)$

من(1)، (2) و (3) نجد $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\left|x-x_0\right|<\alpha\to\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ اي f مستمرة على $[a,b]$.

مثال(6.1.2.3): من المثال(4.1.2.3) متتالية الدوال (g_n) مستمرة و متقاربة بانتظام على $[0,1]$ حسب النظرية السابقة نستنتج أن g مستمرة على $[0,1]$.

ملاحظة(3.1.2.3):اذا كانت متتالية الدوال المستمرة تتقارب نحو دالة ليست مستمرة فإنها ليست متقاربة بانتظام

مثال(7.1.2.3): انظر المثال(5.1.2.3).

مكاملة متتالية الدوال:

نظرية(2.1.2.3): اذا كانت متتالة الدوال المستمرة (f_n) تتقارب بانتظام على المجال $[a,b]$ نحو الدالة f فإن $\left|\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\right|=\left|\int_a^b\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx\right|$

او نكتب $\left|\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\right|=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

البرهان: لتكن f نهاية منتظمة لمتتالية الدوال المستمرة فهي مستمرة حسب النظرية(1.1.2.3) و بالتالي قابلة للمكاملة ، اضافة لذلك يوجد $N(\varepsilon)$ لا يتعلق بالمتغير x بحيث $\forall x\in[a,b], n>N(\varepsilon)\Rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ لدينا

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)dx\right|\le\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx$$

$<\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$ و منه نستنتج $\int_a^b f_n(x)dx\Rightarrow\int_a^a f(x)dx$

مثال(8.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال المستمرة (h_n) بحيث

$\forall x\in[0,1], h_n(x)=nx^n(1-x)$ - بين ان (h_n) تتقارب ببساطة،

هل (h_n) تتقارب بانتظام على $[0,1]$؟ - ان كانت كذلك احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)dx$

الحل: 1) لدينا $h_n(0)=h_n(1)=0$ كذلك

$\forall x\in\,]0,1[, nx^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\Rightarrow h_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ و منه (h_n) تتقارب ببسطة نحو الدالة المعدومة h

3) لاحظ أنه $\forall x\in\,]0,1], h'(x)=n^2x^{n-1}(1-x)-nx^n$ و بالتالي

$h'(x)=0\Rightarrow x=n/n-1$ و منه

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|h_n(x)-0|=\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(n/n-1)=e^{-1}\neq 0$ اي ان (h_n) ليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)dx\neq\int_0^1 h(x)dx=0$

الاشتقاق و متتالية الدوال:

نظرية(3.1.2.3): نعتبر (f_n) متتالية الدوال المستمرة و القابلة للاشتقاق مع الاستمرار على المجال $[a,b]$ و كان، 1) (f_n) تتقارب ببساطة نحو الدالة f

2) متتالية الدوال المشتقة (f'_n) تتقارب بانتظام نحو الدالة g على $]a,b[$

فان (f_n) تتقارب بانتظام نحو الدالة f القابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و

$\forall x\in\,]a,b[, f'(x)=g(x)$ او بعبارة اخرى $\left|\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x)\right|=\left|\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right|'$

مثال(10.1.2.3): لتكن متتالية الدوال (f_n) بحيث $f_n:\underset{x\to\sqrt{x^2+1/n}}{[-1,1]\to IR}$

واضح أن $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=|x|$ لكن $\forall x\in\,]-1,1[, f'_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1/n}}$

(f'_n) تتقارب على $]-1,1[$ نحو الدالة g حيث $g(x)=x/|x|$ غير معرفة عند الصفر فهي تختلف مشتق الدالة f اي $g(x)\neq f'(x)$ و بالتالي (f_n) ليست متقاربة بانتظام.

3- 2-2 - سلاسل الدوال

لتكن متتالية الدوال ذات الحد العام $f_n :]a,b[\to IR$ يمكن $(a=-\infty, b=+\infty)$

و التكن السلسلة

$$S_0(x)=f_0(x)$$
$$S_1(x)=f_0(x)+f_1(x)$$
$$-----------------$$
$$-------------------$$
$$S_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+.....+f_n(x)$$

نسمي D مجموعة الاعداد x من $]a,b[$ بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ متقاربة

وهي مجال تعريف دالة المجموع F و نكتب $\forall x \in D, F : x \to F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ،

أو نكتب $S_n(x) \to F(x)$ لما $n \to +\infty$.

تقارب سلاسل الدوال:

<u>التقارب البسيط:</u>

تعريف(1.2.2.3): نقول سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ أنها تتقارب ببساطة نحو دالة مجموعها F على المجال $]\alpha,\beta[\subset D$ إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ متقاربة من أجل كل x من $]\alpha,\beta[$

أي أن $S_n(x)$ تتقارب نحو $F(x)$

مثال(1.2.2.3): في المجال $[0,1]$ سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ بحيث

$$\forall n \in IN, \forall x \in [0,1]; f_n(x)=x^n-x^{n+1}$$

لاحظ أن السلسلتين $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0)$ ، $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1)$ متقاربتين

$\forall x \in]0,1[, \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\frac{|x^{n+1}-x^{n+2}|}{|x^n-x^{n+1}|}=|x|<1$ أي متقاربة مطلقا فهي متقاربة

ومنه سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ تتقارب ببساطة على المجال $[0,1]$.

التقارب المنتظم:

تعريف(2.2.2.3):نقول عن سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ أنها تتقارب بانتظام نحو دالة مجموعها F على المجال $]\alpha,\beta[\subset D$ يعني

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); \forall n > m \geq N(\varepsilon) \to |R_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$|f_m(x) + f_{m+1}(x) + \ldots + f_n(x)| < \varepsilon$$

مثال(2.2.2.3): ادرس التقارب المنتظم لسلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ حيث

$\forall x \in [0,1]; g_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}$ وهذا يمثل حد عام لسلسلة عددية متناوبة متقاربة حسب لبنز، من جهة اخرى إذا كان $R_n(x)$ باقي هذه السلسلة لدينا

$\forall x \in [0,1]; |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+2} \leq \dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ومنه نستنتج أن $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$.

شرط كافي للتقارب المنتظم (التقارب النظيمي):

تعريف(3.2.2.3): نقول عن سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ أنها تتقارب نظيميا على المجال $]\alpha,\beta[$ عندما توجد سلسلة عددية ذات حدود موجبة متقاربة $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ بحيث

$$\forall x \in]\alpha,\beta[, |f_n(x)| \leq V_n$$

نظرية(1.2.2.3)(نظرية ديني): إذا كانت سلسلة الدوال ذات الحد العام f_n متقاربة نظيميا على $]\alpha,\beta[$ فإنها تتقارب بانتظام عليه.

نظرية(2.2.2.3): إذا كانت سلسلة الدوال المحدودة $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ متقاربة مطلقا على I فإنها تقبل سلسلة حادة من الاعلى تحقق $\forall x \in I, \exists V_n > 0; |f_n(x)| \leq V_n$ أي أنها متقاربة نظيميا.

مثال(3.2.2.3): لتكن الدالة العددية f_n المعرفة كالتالي: $\underset{\forall n\in IN^*, \forall x\in IR; x\to \sin nx/n^2}{f : IR \to IR}$

واضح أنه $\forall n \in IN, \forall x \in IR, |f_n(x)| = 1/n^2$ وأن $1/n^2$ يمثل حد عام لسلسلة عددية متقاربة و بالتالي حسب النظرية(2.2.2.3) السلسلة المعطاة متقاربة نظيميا و منه فهي متقاربة بانتظام على IR.

سلاسل الدوال و الاستمرار:

نظرية(3.2.2.3): في الفضاء النظيمي المعرف على $I\left(I \subset IR\right)$ إذا كانت سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ مستمرة و محدودة على I فإنها تتقارب بانتظام نحو دالة مجموعها F المستمرة على I.

مثال(4.2.2.3): نعتبر سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} g_n$ بحيث $\forall x \in [0,1], g_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3 + x^3}$

بين أن دالة المجموع G لهذه السلسلة مستمرة

الحل: 1) إذا كان $x = 0$ لدينا $g_n(0) = 0$ و بالتالي $\sum_{n\geq 1} g_n(0)$ متقاربة

2) إذا كان $\forall x \in \left]0,1\right], \left|g_n(x)\right| \leq \dfrac{nx^2}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$ ، $\dfrac{1}{n^2}$ يمثل حد عام لسلسلة متقاربة و بالتالي سلسلة الدوال متقاربة نظيميا على $[0,1]$ و منه السلسلة متقاربة بانتظام على $[0,1]$ و بما أن الدوال g_n مستمرة على $[0,1]$ حسب النظرية(3.2.2.3) دالة المجموع G مستمرة على $[0,1]$.

تكامل سلاسل الدوال:

نظرية(4.2.2.3): إذا كانت $\sum_{n\geq 0} g_n$ سلسة دوال مستمرة ومتقاربة بانتظام على $[a,b] \subset \Re$ نحو دالة مجموعها G المستمرة على $[a,b]$ فإنه توجد سلسلة دوال $\sum_{n\geq 0} k_n$ معرفة على $[a,b]$ كالتالي: $\forall n \in \mathrm{N}, \forall x \in [a,b]; k_n(x) = \int_a^x g_n(t)dt$ تتقارب بانتظام على $[a,b]$ نحو الدالة $K(x) = \int_a^x G(t)dt$ و لدينا كذلك

$$\sum_{n\geq 1} \int_a^x g_n(t)dt = \sum_{n\geq 1} k_n(x) = \int_a^x \left(\sum_{n\geq 1} g_n(t)\right)dt$$ (تكامل السلسلة=سلسلة التكاملات)

مثال(5.2.2.3): استخدم تكامل السلاسل لحساب المجموع $\sum_{n\geq 0} (-1)^n / (3n+1)$

الحل: نعرف سلسلة الدوال بسلسلة صورها $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{3n}$ على المجال $[0,1]$ وهي متقاربة بانتظام عليه وبالتالي حسب النظرية لدينا من جهة

$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{3n}$ من جهة اخرى $\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3n}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

يمثل نشر معمم في جوار الصفر للدالة $x \to 1/1+x^3$ و منه

$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}dx = \int_0^1\frac{dx}{1+x^3} = \ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$ وهي قيمة المجموع.

سلاسل الدوال و الاشتقاق:

نعتبر في المجال $I =]a,b[$ سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} f_n$ و القابلة للاشتقاق مع

الاستمرار(محدودة) أي من الصنف $C^1(I,IR)$، وبفرض أن $\sum_{n\geq 0} f'_n$ متقاربة بانتظام

نحو الدالة G على I فإنه حسب متتالية الدوال و الاشتقاق و من أجل كل x_0 من I السلسلة

$\sum_{n\geq 0} h_n$ و المعرفة بـ: $\forall n\in \mathrm{N}, \forall x\in I; h(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$

متقاربة بانتظام (نظيميا) على I نحو الدالة $H(x) = \int_{x_0}^{x} G(t)dt$

نظرية(5.2.2.3): لتكن الدوال f_n من المجال I ($I \subset IR$) في E ($E = IR$) او($E = C$)عناصر سلسلة الدوال من الصنف $C^1(I,IR)$، و لدينا

1) $\sum_{n\geq 0} f'_n$ سلسلة متقاربة بانتظام (نظيميا) على I نحو الدالة G

2) توجد على الاقل x_0 من I بحيث $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ تتقارب ببساطة نحو العدد μ

فإن سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} f_n$ تتقارب بانتظام (نظيميا) على I نحو الدالة

$x \to \mu + \int_{x_0}^{x} G(t)dt$، و المساواة صحيحة $\sum_{n\geq 0} f'_n(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)$

مثال(6.2.2.3): نعتبر سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} f_n$ المعرفة بعبارة الحد العام للسلسة العددية

$$\forall n\in IN, \forall x\in IR, f_n(x) = (n+1)x^n e^{inx}$$

ادرس تقارب هذه السلسلة.

الحل: 1) إذا كان $|x|\geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to +\infty}|f_n(x)| \neq 0$ و منه السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متباعدة

2) إذا كان $|x|<1$ حسب دالنبير $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}<1$ فهي متقاربة على $D\supset\left]-1,1\right[$ كذلك

$\left]-a,a\right[\subseteq D,\ \sup\limits_{x\in\left]-a,a\right[}|f_n(x)|=(n+1)a^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ و بالتالي نستنتج أن سلسلة الدوال متقاربة بانتظام على D .

نعتبر سلسلة الدوال $\sum\limits_{n\geq 0}k_n$ حيث $k_n(x)=\left(xe^{ix}\right)^{n+1}$ واضح أن

$\forall x\in D, k'_n(x)=(1+ix)e^{ix}f_n(x)$ و التكن K دالة المجموع للسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}k_n$

على D ، من أجل $x=0$ ، $\sum\limits_{n\geq 0}k_n(0)$ تتقارب ببساطة نحو $K(0)$

كذلك لتكن F دالة المجموع للسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ حسب النظرية $K'(x)=\alpha(x)F(x)$ حيث

الدالة α تتعلق بـ x فقط، مما سبق نستنتج أن $K(x)=\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}$ و بالتالي

$K'(x)=\frac{(1+ix)e^{ix}}{\left(1-xe^{ix}\right)^2}$ نأخذ $\alpha(x)=(1+ix)e^{ix}$ ومنه نستنتج أن

$F(x)=1\big/\left(1-xe^{ix}\right)^2$ وهي صورة دالة المجموع لسلسلة الدوال $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$.