I. عموميات حول الدوال الحقيقية:

1. تعريف الدالة:

نسمي دالة حقيقية (عددية) لمتغير حقيقي من $E \subseteq \mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كل علاقة f ترفق بكل عنصر x من E عنصرا واحدا على الأكثر y من $\mathbb{R}$ و نكتب: $\begin{array}{l} f: E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$ تسمى x سابقة و y صورة x بالدالة f و تسمّى مجموعة السوابق التي لها صور بالدالة f بمجموعة تعريف الدالة f ونرمز لها بـ: D_f و نكتب $D_f = \{x \in E \ / \ f(x) \in \mathbb{R}\}$.

حالات خاصة:

1- في الحالة $E = \mathbb{N}$ الدالة f تعرّف متتالية حقيقية (عددية) .

2- إذا كانت f دالة من E نحو $\mathbb{R}$ بحيث $D_f = E$ فإنّ f تسمّى تطبيقا .

أمثلة:

1) العلاقة : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث: $x \mapsto y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ هي دالة حقيقية لمتغير حقيقي .

2) لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي، لنعيّن D_f مجموعة تعريف f في كلّ الحالات التالية:

أ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. f معرّفة $\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$ ومنه f معرفة $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$ وبالتالي $D_f =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$

ب) $f(x) = \dfrac{1}{E(x)}$. f معرّفة $\Leftrightarrow E(x) \neq 0$ ومنه f معرفة $\Leftrightarrow x \notin [0,1[$ وبالتالي $D_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

جـ) $f(x) = \ln(4 - x^2)$. f معرّفة $\Leftrightarrow 4 - x^2 > 0$ ومنه f معرفة $\Leftrightarrow x \in]-2, +2[$ وبالتالي $D_f =]-2, +2[$

2. منحنى الدالة:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي، نزوّد المستوي بمعلم متعامد و متجانس.

مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x \in D_f$ و $y = f(x)$ تسمّى منحنى f ونرمز له C_f ونكتب: $C_f = \{M(x,y) / x \in D_f \wedge y = f(x)\}$

3. شفعية دالة:

: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرّفة على D_f مجموعة متناظرة بالنسبة للصفر أي $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

f فردية إذا وفقط إذا تحقّق: $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$ و f زوجية إذا وفقط إذا تحقّق: $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

ملاحظات:

1- منحنى دالة فردية (زوجية) يكون متناظرا بالنسبة لمبدأ المعلم (بالنسبة لحامل لحور التراتيب)

2- إذا رمزنا بـ: $D_f^+ = \{x \in D_f \ / \ x \geq 0\}$ و $D_f^- = \{x \in D_f \ / \ x \leq 0\}$ ولدراسة تغيرات دالة فردية (زوجية) نكتفي بدراستها على D_f^+ (D_f^-) ثمّ نرسم منحناها ونكمل إنشاءه بالتناظر بالنسبة لمبدأ المعلم (بالنسبة لحامل لحور التراتيب)

تطبيق: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة حيث $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. اثبت أنّ: $D_f = \mathbb{R}$ و أنّ f فردية.

4. دورية دالة:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة. نقول أنّ f دالة دورية إذا وجد عددا حقيقيا موجبا تماما T بحيث:

$\forall x \in D_f, f(x+T) = f(x)$ يسمّى أصغر عدد حقيقي موجب تماما T بدور الدالة f .

ملاحظة: إذا كان T دورا لدالة f فإنّ kT هو كذالك دور لها .

أمثلة:

1) الدالة $x \mapsto \cos x$ دورية ودورها $T = 2\pi$

2) الدالة $x \mapsto \sin x$ دورية ودورها $T = 2\pi$

3) الدالة $x \mapsto x - E(x)$ (دالة الجزء العشري) دورية ودورها $T = 1$ (يكفي أن نبرهن $E(x+k) = E(x)+k,\ k \in \mathbb{Z}$)

نتيجة: إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة دورية و دورها T فإنّ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الدالة المعرفة بـ: $g(x) = f(ax+b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$ دورية و دورها $\frac{T}{a}$.

برهان: لدينا $f(x+T) = f(x)$ و نثبت أنّ: $g\left(x + \frac{T}{a}\right) = g(x)$.

لدينا $g\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f\left(ax + b + T\right) = f\left(ax+b\right) = g(x)$

مثال: $b = 3, a = 5, g(x) = \tan(5x+3)$ و $f(x) = \tan x$. $\tan$ دورية ودورها $T = \pi$ إذا $\tan(5x+3)$ دورية ودورها $T = \frac{\pi}{5}$

5. الدوال المحدودة:

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرّفة على $I \subseteq D_f$ و $f(I)$ مجموعة قيم f أي $f(I) = \{f(x) / x \in I\} \subset \mathbb{R}$

تعاريف:

1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا كانت $f(I)$ محدودة من الأعلى أي إذا تحقق ما يلي:

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \le M$$

2) نقول أن f محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا كانت $f(I)$ محدودة من الأسفل أي إذا تحقق ما يلي:

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \ge m$$

3) نقول أن f محدودة إذا وفقط إذا كانت $f(I)$ محدودة أي إذا تحقق: $\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \le f(x) \le M$

أو بمعنى آخر f محدودة إذا وفقط إذا تحقق ما يلي: $\exists M > 0,\ \forall x \in I,\ |f(x)| \le M$

ملاحظات:

1) إذا كانت f محدودة فإنّ المجموعة $f(I)$ محدودة في $\mathbb{R}$ و تقبل حدّا أعلى و حدّا أسفل و في هذه الحالة نرمز بـ:

$\sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup f(I)$ و $\inf\limits_{x \in I} f(x) = \inf f(I)$. القيمتان $\sup f(x)$ و $\inf f(x)$ تسمّيان على التوالي الحدّ الأعلى و الحدّ الأسفل للدالة f و نرمز لهما بـ: $\sup f$ و $\inf f$ و لدينا

$$M = \sup f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, f(x) \le M \\ \exists \varepsilon > 0, \exists x_0 \in I, f(x_0) > M - \varepsilon \end{cases} \quad \text{و} \quad m = \sup f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \ge m \\ \exists \varepsilon > 0, \exists x_0 \in I,\ f(x_0) < M + \varepsilon \end{cases}$$

2) الحدّان $\sup f(x)$ و $\inf f(x)$ لا ينتميان بالضرورة إلى $f(I)$. في حالة $\sup f(x)$ و $\inf f(x)$ ينتميان إلى $f(I)$ نقول أنّ

الدالة f تصيب حدّيها على I و هذا يعني: f تصيب حدّيها على I $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \exists x_0 \in I, \ \sup\limits_I f(x) = f(x_0) \\ \exists x_1 \in I, \ \inf\limits_I f(x) = f(x_1) \end{cases}$

أمثلة:

2) الدالة $g : x \mapsto \ln x$ غير محدودة على D_g لأنه لدينا $D_g =]0,+\infty[$ و $g(D_g) =]-\infty,+\infty[$ غير محدودة .

3) الدالة $x \mapsto x - E(x)$ محدودة على $\mathbb{R}$ لأنـه لدينا $\forall x \in \mathbb{R}, \ x-1 < E(x) \le x$ ومنه $-x \le -E(x) < 1 - x$

إذا $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \le x - E(x) < 1$

3) الدالة $f : I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \mapsto \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \cos x$. الدالة f محدودة لأنّ $f\left(I\right) = \left[-1,1\right]$ محدودة

و لدينا $\sup f(x) = \sup f(I) = 1$ و $\inf f(x) = \inf(I) = -1$ و نستنتج أنّ الدالة f تصيب حدّيها على I لأنّه يوجد

$\exists x_0 = 0 \in I, f(x_0) = f(0) = \cos 0 = 1 = \sup f$ و $\exists x_1 = \pi \in I, f(x_1) = f(\pi) = \cos \pi = -1 = \inf f$

6 . اتجاه تغير دالة:

تعاريف: لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة عددية معرّفة على $D_f \subset \mathbb{R}$.

1) نقول أن f متزايدة (متزايدة تماما) على المجال $I \subset D_f$ إذا كان:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \ \ (f(x_1) < f(x_2))$$

2) نقول أن f متناقصة (متناقصة تماما) على المجال $I \subset D_f$ إذا كان:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \ \ (f(x_1) > f(x_2))$$

3) نقول أن f رتيبة على $I \subset D_f$ إذا كانت متزايدة على كل المجال I أو متناقصة على كل I .

ملاحظة:

نقول أن f رتيبة (رتيبة تماما) على $I \subset D_f$ إذا كانت متزايدة (متزايدة تماما) على كلّ المجال I أو متناقصة (متناقصة تماما) على كلّ I .

نتيجة: لدراسة اتجاه تغير دالة f على $I \subset D_f$ يكفي أن ندرس إشارة $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ من أجل x_1 و x_2 من I حيث $x_1 \ne x_2$

1) إذا كانت $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \ge 0 \ (>0)$ فإنّ f متزايدة (متزايدة تماما) على I

2) إذا كانت $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \le 0 \ (<0)$ فإنّ f متناقصة (متناقصة تماما) على I

مثال:

الدالة f المعرّفة بـ: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 2[$ لأن: $(f(x) = (x-2)^2 - 1)$ و لدينا

$$\forall x_1 < x_2 < 2, \ x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$ لأنّه من أجل x_1 و x_2 من $]2,+\infty[$ حيث $x_1 \neq x_2$ لدينا

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-2)^2-1-((x_2-2)^2-1)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-2)^2-(x_2-2)^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)}{x_1-x_2}\underset{x_1+x_2<4}{\overset{x_1\neq x_2}{=}}x_1+x_2-4<0$$

II– النهايات:

1. جوار عدد حقيقي x_0 أو $\pm\infty$: نسميّ جوارا للعدد الحقيقي x_0 كلّ مجال مفتوح من الشكل $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ حيث $\delta>0$

و نسمّي جوارا لـ $+\infty$ $(-\infty)$ كلّ مجال من الشكل $]a,+\infty[$ $(]-\infty,b[)$ حيث $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$

2. الدالة المعرّفة في جوار عدد حقيقي x_0: لتكن $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و x_0 عددا حقيقيا . نقول أنّ f معرّفة على جوار x_0

إذا تحقق: $\exists\delta>0,\ \ ]x_0-\delta,\ x_0+\delta[\subseteq I$

3. نهاية دالة عند عدد حقيقي: لتكن $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة على جوار العدد x_0 باستثناء محتمل عند x_0

تعريف1: ليكن l عددا حقيقيا . نقول أنّ f تقبل نهاية منتهية l عند x_0 إذا تحقّق الشرط: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0: (|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$

ونقول كذلك أنّ $f(x)$ يؤول إلى l عندما x يؤول إلى x_0 و نرمز إذا: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{x_0} f=l$

ملاحظة: إثبات أنّ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ باستخدام التعريف يتمثل في إيجاد α بدلالة ε و x_0 .

مثال: لإثبات أنّ: $\lim\limits_{x\to 2} 3x-5=1$ باستخدام التعريف يكفي أن نثبت أنّ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0: (|x-2|<\alpha \Rightarrow |3x-6|<\varepsilon)$

$|3x-6|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$. إذا يكفي اختيار $\alpha\le\frac{\varepsilon}{3}$ للحصول على العلاقة:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha\le\frac{\varepsilon}{3}:\quad |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}\ \Rightarrow\ |3x-6|<\varepsilon$$

نظرية:(وحدانية النهاية) . إذا قبلت الدالة f نهاية عند a فهي وحيدة.

برهان: نبرهن بطريقة مشابهة لإثبات وحدانية النهاية عند المتتاليات.

نظرية:(النهايات و المتتاليات) . تكون للدالة f نهاية l عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (s_n) من I متقاربة نحو x_0

يكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=l$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \forall s_n\in I:[(\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=x_0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=l]$

نتيجة: لإثبات أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ غير موجودة يكفي إيجاد متتاليتين (s_n) و (t_n) لهما نفس النهاية x_0 بينما نهايتي $f(s_n)$ و $f(t_n)$ مختلفتان.

مثال: لنثبت أن نهاية الدالة f المعرّفة كما يلي: $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ غير موجودة عند $x_0=0$.

لتكن المتتاليتان: $s_n=\frac{1}{2n\pi}$ و $t_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ نهايتهما تؤولان إلى 0 بينما $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n\pi)=1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n+1)\pi=-1$ وبالتالي الدالة f لا تقبل نهاية عند 0 .

تعريف2: ♦ نقول أنّ f تؤول إلى $+\infty$ عند ما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق الشرط: $\forall A>0,\ \exists\alpha>0: |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>A$

و نرمز بـ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

♦ نقول أنّ f تؤول إلى $-\infty$ عند ما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق الشرط: $\forall A<0,\ \exists\alpha>0:|x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)<A$

و نرمز بـ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

4. نهاية دالة عند عدد حقيقي من اليمين و اليسار:

تعاريف:

♦ نقول أنّ f تقبل نهاية l عند x_0 من اليمين ونكتب: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x)=l$ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:[0<x-a<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon]$$

♦ نقول أنّ f تقبل نهاية l عند x_0 من اليسار ونكتب: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to a}} f(x)=l$ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:[0<x_0-x<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon]$$

ملاحظة: إذا كانت f تقبل نهاية l عند عدد x_0 فإنّ النهايتين على اليمين و اليسار موجودتين أيضا و يكون لدينا

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x)=l$$

نتائج:

1) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

2) إذا كانت $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x)$ فإنّ f تقبل نهاية العدد x_0

أمثلة:

1) لتكن f الدالة المعرّفة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-1}$

لدينا $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

2) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\dfrac{-x}{x}=-1$ ومنه $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\dfrac{|x|}{x}$ وبالتالي الدالة $x\mapsto\dfrac{|x|}{x}$ لا تقبل نهاية عند 0

5. نهاية دالة عند لانهاية: لتكن f دالة معرّفة على أحد المجالين $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,b[$ حيث $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$

تعاريف:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\ (l\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:[x>\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon]$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\ (l\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:[x<-\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon]$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists\alpha>0:[x>\alpha \Rightarrow f(x)>A]$

بطريقة مشابهة للتعريف(3) نعرّف النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

6. العمليات على النهايات:

كل حالات العمليات على النهايات المذكورة في موضوع المتاليات تبقى صالحة بالنسبة للدوال لكن في حساب النهايات هناك حالات لا تمكّن فيها من تحديد النهاية إلا بطرق مناسبة كالحالات الموالية المسمّاة حالات عدن التعيين($0\times\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\infty-\infty$ ، $1^{+\infty}$ و 0^0) .

أمثلة:

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2\right)$. عندما نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+\lim\limits_{x\to-\infty}3x^2=-\infty+\infty$ لكن نستطيع رفع عدم التعيين كما يلي :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{x-1}$. عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to0}4x^2+x}{\lim\limits_{x\to0}x-1}=\frac{0}{0}$ ، نستطيع رفع عدم التعيين كما يلي :

$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2+x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(4+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2=+\infty$.

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}$.لدينا $-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$,$\forall x\in\mathbb{R}^*$ وبما أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ حسب نظرية الحصر يكون: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$

7. مقارنة الدوال في جوار $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$:

تعاريف: لتكن f و g دالتين معرّفتين على V جوار x_0 باستثناء محتمل عند x_0

1) نقول أنّ f مهملة أمام g عندما يؤول x إلى x_0 (أو عند x_0) ونكتب $f\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)$ إذا وجدت دالة $\mathcal{E}$ بحيث:

$\forall x\in V,\ f(x)=\mathcal{E}(x)g(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\mathcal{E}(x)=0$

2) نقول أنّ g مسيطرة على f عندما يؤول x إلى x_0 (أو عند x_0) ونكتب $f\underset{x\to x_0}{=}\mathbf{O}(g)$ إذا وجدت دالة k بحيث:

$\forall x\in V,\ f(x)=k(x)g(x)$ و الدالة k محدودة على V

الرمزين $\circ$ و $\mathbf{O}$ يسمّيا رمزي لاندو.

ملاحظات:

إذا كانت g لا تنعدم في V جوار x_0 فإنّ:

أ) $f\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ب) $\frac{f}{g}$ محدودة على V $\Leftrightarrow f\underset{x\to x_0}{=}\mathbf{O}(g)$

أمثلة: 1) $x^3\underset{x\to0}{=}\circ(x^2)$ 2) $(|\ln x|)^\alpha\underset{x\to+\infty}{=}\circ(x^\alpha)\ (\alpha>0)$ 3) $2x^2\underset{x\to+\infty}{=}\mathbf{O}(x^2)$ 4) $(\ln|x|)^\alpha\underset{x\to0}{=}\circ(x^{-\alpha})\ (\alpha>0)$

7. الدوال المتكافئة:

تعريف: لتكن f و g دالتين معرّفتين على V جوار x_0 حيث $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

نقول أنّ f تكافئ g عندما يؤول x إلى x_0 (أو عند x_0) ونكتب $f\underset{x\to x_0}{\sim}(g)$ إذا تحقّق ما يلي: $f-g\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)$

ملاحظة: نلاحظ أنّ $f-g \underset{x\to x_0}{=} \circ(f) \Leftrightarrow f-g \underset{x\to x_0}{=} \circ(g)$

خواص:

1) العلاقة $(\sim)$ علاقة تكافؤ في مجموعة الدّوال المعرّفة في جوار x_0

2) إذا كانت f و g لا تنعدمان في V جوار x_0 فإنّ: $f \underset{x\to x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

3) $(f \underset{x\to x_0}{\sim} g) \wedge (\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0 \Rightarrow f \underset{x\to x_0}{\sim} l$

5) إذا كانت f تقبل الاشتقاق على V جوار عدد x_0 فإنّ: $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

العمليات على الدوال المتكافئة:

أ) إذا كانت f ، g ، h و k دوالا معرفة في جوار x_0 من $\overline{\mathbb{R}}$ حيث: $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ و $h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} k(x)$ فإنّ:

1) $f(x)h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)k(x)$

2) إذا كانت h و k لا تنعدمان في جوار x_0 فإنّ: $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{g(x)}{k(x)}$

3) إذا كانت f و g موجبتين تماما في جوار x_0 فإنّ: $(f(x))^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} (g(x))^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$

ب) إذا كانت u دالة معرّفة في جوار x_0 من $\overline{\mathbb{R}}$ و كانت f و g دالتين معرّفتين في جوار y_0 من $\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ:

$$(\lim_{x\to x_0} u(x) = y_0) \wedge (f(x) \underset{x\to y_0}{\sim} g(x)) \Rightarrow f(u(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} g(u(x))$$

بعض الدوال المتكافئة المألوفة:

1) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

2) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

3) $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$

4) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

5) $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

6) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x, \ (\alpha \in \mathbb{R})$

نتيجة: إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ فإنّ:

1) $\ln(1+f(x)) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$

2) $\sin f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$

3) $\tan f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$

4) $e^{f(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$

5) $\cos f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{f(x)^2}{2}$

6) $(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha f(x), \ \alpha \in \mathbb{R}$

أمثلة:

1) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ لنعيّن الدالة المكافئة لـ: f في جوار 0 . لدينا $f(x) = \ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

2) $g(x)=\ln(1+\cos x)$ لنعيّن الدالة المكافئة لـ: g في جوار 0 . نلاحظ أنّ $g(x)$ لاتكافئ $\cos x$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1 \neq 0$

لدينا $g(x)=\ln(1+\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(2-\dfrac{x^2}{2}\right)=\ln\left(2\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)\right)=\ln 2+\ln\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\ln 2-\dfrac{x^2}{4}$

III- الاستمرارية:

1. الاستمرار عند عدد حقيقي: $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرّفة في جوار عدد x_0 من I .

تعاريف:

♦ نقول أنّ f مستمرة عند x_0 إذا تحقق الشرطان :

1) النهاية $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجودة في $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

أو بمعنى آخر إذا تحقق ما يلي: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\forall x\in I(|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

– إثبات أن f مستمرة عند x_0 باستخدام التعريف يتمثل في إيجاد α بدلالة ε و x_0 .

♦ نقول أنّ f مستمرة على اليمين عند x_0 ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)=f(x_0)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\forall x\in I\ \ (x_0\le x<x_0+\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

♦ نقول أنّ f مستمرة على اليسار عند x_0 ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)=f(x_0)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\forall x\in I(x_0-\alpha<x\le x_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

نتيجة: تكون الدالة f مستمرة عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كانت مستمرة من اليمين ومن اليسار عند x_0 ونكتب:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)=f(x_0)$$

♦ نقول أنّ f مستمرة على المجال I إذا كانت مستمرة عند كل عدد من I .

أمثلة: 1) لتكن الدالة: $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $f(x)=\sqrt{x}$

الدالة f مستمرة عند كل عدد $x_0>0$. لأنّ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\forall x>0\ (|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

لدينا: $|f(x)-f(x_0)|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\le\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\dfrac{\alpha}{\sqrt{x_0}}$ يكفي أن نأخذ $\alpha<\sqrt{a}\varepsilon$ حتى يتحقق الاستلزام.

2) في المثال السابق الدالة f مستمرة من اليمين عند 0 لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x}=0=f(0)$

3) الدالة $x\mapsto|x|$ مستمرة عند 0 لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}|x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(-x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}|x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}x=0$ وبالتالي: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

4) كل من الدالة الثابتة ، دوال كثيرات الحدود ، الدالة $\sin$ و الدالة $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

5) الدوال الناطقة و الدوال الصمّاء مستمرة على مجموعة تعريفها .

نظرية: (الاستمرار و المتاليات) . تكون الدالة f مستمرة عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (s_n) من I متقاربة نحو x_0 يكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=f(x_0)$. و نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \forall s_n \in I:[(\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = x_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=f(x_0)]$

3. التمديد بالاستمرار: ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ ، x_0 عددا حقيقيا و $f: I-\{x_0\} \to \mathbb{R}$ دالة

تعريف: نقول أنّ الدالة f تقبل تمديدا بالاستمرار إلى دالة $\overline{f}$ عند العدد x_0 إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}$ ونكتب:

$$\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in I-\{x_0\} \\ l & , x=x_0\end{cases}$$

الدالة $\overline{f}$ تسمى التمديد بالاستمرار للدالة f عند x_0 .

أمثلة:1) الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

و يكون: $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث: $\overline{f}(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & , x=0\end{cases}$

2) الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ لا تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ غير موجودة

4. عمليات على الدوال المستمرّة:

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين مستمرتين عند عدد حقيقي x_0 وكان α و β عددين حقيقيين ثابتين فإنّ:

1) الدالة $|f|$ مستمرة عند x_0 .

2) الدالة $\alpha f+\beta g$ مستمرة عند x_0 .

3) الدالة fg مستمرة عند x_0 .

4) إذا كان $g(x_0)\neq 0$. الدالة $\dfrac{f}{g}$ مستمرة عند العدد x_0 .

5) الدالتان $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ مستمرتان عند x_0 . لأنّ: $\max(f,g)=\dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ و $\min(f,g)=\dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$

6) إذا كانت f دالة مستمرة عند عدد x_0 و g دالة مستمرة عند $f(x_0)$ فإنّ الدالة $g\circ f$ مستمرة عند x_0

مثال: الدالة $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ $u(x)=\sin|x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنّ : u هي دالة مركبة بالشكل: $u=g\circ f$ حيث:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ حيث $f(x)=|x|$ و $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ حيث $g(x)=\sin x$ هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}_+$

5. الاستمرار المنتظم: لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

تعريف: نقول أن f مستمرة بانتظام على المجال I إذا تحقق الشرط : $\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0:\forall(x,y)\in I^2(|x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$

ملاحظات:

1- الاستمرار بانتظام مفهوم خاص بالمجال I بأكمله بينما الاستمرار عند عدد مفهوم محلي أي في جوار هذا العدد .

2- لإثبات أن f مستمرة بانتظام على المجال I باستخدام التعريف نثبت ايجاد α بدلالة ε فقط .

3- كل دالة f مستمرة بانتظام على مجال I هي مستمرة على هذا المجال والعكس غير صحيح.

أمثلة:

1) لتكن الدالة: $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $f(x)=x^2$

الدالة f مستمرة بانتظام على المجال $[0,1]$. **لأنّ:** $\forall\varepsilon>0, \exists\alpha(\varepsilon)>0 : \forall x,y\in I, |x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

لدينا: $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|x-y||x+y|\leq|x-y|(|x|+|y|)\leq 2|x-y|$ يكفي أن نأخذ $\alpha<\dfrac{\varepsilon}{2}$ حتى يتحقق الاستلزام.

2) لتكن الدالة: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $f(x)=x^2$. f مستمرة على $\mathbb{R}$ لكن f غير مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$ لأنّ:

$$\exists\varepsilon>0, \forall\alpha>0, \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2[(|x-y|<\alpha)\wedge|x^2-y^2|\geq\varepsilon]$$

نأخذ $\varepsilon=1$. من أجل كل $\alpha>0$، يوجد عددان حقيقيان x و y حيث: $x=\dfrac{1}{\alpha}$ و $y=x+\dfrac{\alpha}{2}$

لدينا $|x-y|=|\dfrac{-\alpha}{2}|=\dfrac{\alpha}{2}<\alpha$ و $|x^2-y^2|=\dfrac{\alpha}{2}|x+y|=\dfrac{\alpha}{2}(\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{2})=1+\dfrac{\alpha^2}{4}\geq 1$

6 . نظريات أساسية حول الدوال المستمرة:

أ . **نظرية هاين Heine:** كلّ دالة $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرة على مجال متراص (مغلق ومحدود) $I=[a,b]$ هي دالة مستمرة بانتظام على هذا المجال.

البرهان (بالخلف)

نفرض أن f مستمرة وغير مستمرة بانتظام $[a,b]$. عندئذ يبيّن نفي انتظام الاستمرار وجود $\varepsilon>0$ ومتتاليتين x_n و y_n بحيث $\forall n\in\mathbb{N}^*: \ |x_n-y_n|<\dfrac{1}{n} \ \wedge \ |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$. يتضح من العلاقة $\forall n\in\mathbb{N}^*: \ |x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$

أن المتتاليتين x_n و y_n محدودتان. وبالتالي نستطيع تطبيق نظرية بولزانو- فايرستراش (كل متتالية حقيقية محدودة تقبل متتالية جزئية متقاربة) على x_n واستخراج متتالية جزئية x_{n_i} متقاربة نحو عدد l . ولما كان $\forall i\in\mathbb{N}^*: \ |x_{n_i}-y_{n_i}|<\dfrac{1}{n_i}$

فإن $\lim\limits_{i\longrightarrow+\infty}(x_{n_i}-y_{n_i})=0$. وهكذا نستنتج أن y_{n_i} متقاربة أيضا ونهايتها تساوي l .

وبالرجوع إلى العلاقة $\forall i\in\mathbb{N}^*: \ |f(x_{n_i})-f(y_{n_i})|\geq\varepsilon$

وجعل i يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة $|f(x_{n_i})-f(y_{n_i})|\geq\varepsilon$ نصل بفضل استمرار f إلى التناقض: $0=|f(l)-f(l)|\geq\varepsilon>0$.

مثال: الدالة: $f:x\mapsto\sin x$ مستمرة على المجال $[0,\pi]$ وبالتالي مستمرة بانتظام على $[0,\pi]$.

ملاحظة: إنّ شرط المغلق و المحدود ضروري لصحّة نظرية هاين

أمثلة:

1) الدالة: $f:x\mapsto x^2$ مستمرة على المجال $[0,+\infty[$ لكنّها غير مستمرة بانتظام على هذا المجال.

2) الدالة: $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]0,1]$ لكنّها غير مستمرة بانتظام على هذا المجال.

ب. نظرية فايرستراش Weierstrass:

كل دالة f مستمرة على متراص $[a,b]$ هي دالة محدودة وتدرك حديها الأعلى والأدنى. أي $f([a,b])$ محدودة والدالة تدرك حديها الأعلى والأدنى أي أنه يوجد عددان x_1 و x_2 من $[a,b]$ بحيث $f(x_1)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ و $f(x_2)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$

مثال: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ، $D_f=[-1,1]$ لدينا $\forall x\in[-1,1],\ 0\le f(x)\le 1$ و $f(0)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=1$ ، $f(-1)=f(1)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=0$

ملاحظة: إذا كان المجال غير متراص فإنّ النظرية غير صالحة، أي الدالة لا تدرك حديها الأعلى والأسفل.

مثال: لتكن f دالة معرّفة على المجال $]0,1[$ بـ: $f(x)=x$ لدينا $\sup f(x)=1$ و $\inf f(x)=0$ لكن لا يوجد $x\in]0,1[$ بحيث: $f(x)=1$

ج. نظرية القيمة المتوسطة:

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة على مجال كيفي I . ولتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـ f حيث $x_1<x_2$.

من أجل كل عدد c محصورا بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد على الأقل عددا x_0 من المجال $]x_1,x_2[$ يحقق $f(x_0)=c$.

مثال: لتكن f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x^2-x$ لنثبت أنّ المعادلة $f(x)=5$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-1,2]$

لدينا $f(-1)=-1+1+1=1$ و $f(2)=8+4-2=10$ وبما أنّ $5\in]1,10[$ فإنّ: $\exists x_0\in]-1,2[:f(x)=5$

نتيجة: نستنتج من هذه النظرية أنّ صورة كل مجال بدالة مستمرة هي أيضا مجال.

ملاحظة: إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال I فإنّ العدد x_0 وحيد .

حالات خاصة:

1) حل المعادلة $f(x)=0$: لتكن f دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$. إذا كان $f(a).f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

مثال: كل كثير حدود درجته فردية يملك على الأقل جذرا حقيقيا

ليكن $P(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ كثير حدود حيث n عدد فردي. لنفرض أنّ: $a_n>0$ وبالتالي:

$\lim_{-\infty}P(x)=-\infty$ و $\lim_{+\infty}P(x)=+\infty$ وبصفة خاصة يوجد عددان حقيقيان a و b حيث: $f(a)>0$ و $f(b)<0$ و نستنتج حسب النظرية السابقة.

2) نظرية النقطة الصامدة: إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ دالة مستمرة فإنه يوجد على الأقل c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=c$.

أمثلة: 1) للدالة $f:[0,\frac{\pi}{2}]\longrightarrow[0,\frac{\pi}{2}]$ حيث: $f(x)=\sin x$ نقطة صامدة $f(c)=c$ في المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$.

2) للدالة $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ حيث: $f(x)=x^2$ نقطتان صامدتان في المجال $[0,1]$ وهما 0 و 1 .

7. **عكس الدوال المستمرة و الرتيبة:**

تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$. إذا كانت f تقابلا من D نحو $f(D)$ فإنّ التقابل العكسي يسمّى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها بالرمز f^{-1} ولدينا $(y=f(x),\ x\in D)\Leftrightarrow(x=f^{-1}(y),\ y\in f(D))$

خواص:

1) $f^{-1}\circ f$ هي الدالة المطابقة المعرفة من D نحو D أي: $\forall x\in D, f^{-1}[f(x)]=x$

2) $f\circ f^{-1}$ هي الدالة المطابقة المعرفة من $f(D)$ نحو $f(D)$ أي: $\forall y\in f(D), f[f^{-1}(y)]=y$

3) في معلم متعامد ومتجانس منحنيا الدالتين f و f^{-1} متناظران بالنسبة للمنصف الأول.

نظرية: كل دالة حقيقية f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ تقبل دالة عكسية f^{-1} و للدّالتين f و f^{-1} نفس اتجاه التغير.

أمثلة:

1) الدالة $f(x)=\ln(x)$ مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ وبالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}(x)=\exp(x)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

و لدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \exp[\ln(x)]=x$ و $\forall y\in\mathbb{R}, \ln[\exp(y)]=y$

2) الدالة f المعرفة على بـ: $f(x)=(x-1)^2$ مستمرة و متزايدة تماما على $[1,+\infty[$ و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1} مستمرة متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ولدينا $(y=(x-1)^2, x\in[1,+\infty[\Leftrightarrow(x=\sqrt{y}+1, y\in[0,+\infty[)$ ونكتب: $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$

8. المتتاليات التراجعية و الدوال المستمرة:

تعريف: نسمي متتالية تراجعية كل متتالية حقيقية (u_n) يعطى حدّها من الرتبة n بدلالة حدّ (أو عدة حدود) من رتبة أقل من n .

ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات الحقيقية عندما يكون الحدّ من الرتبة $n+1$ معطى بدلالة الحدّ من الرتبة n على النحو التالي:

ننطلق من $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة مستمرّة ونعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بـ :

$$u_0\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=f(u_n),.$$

ملاحظة: افترضنا مجموعة وصول f هي $[a,b]$ حتى تكون للعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ معنى.

1- حالة f متزايدة:

نظرية: إذا كانت f مستمرّة و متزايدة من أجل $u_0\in[a,b]$ فإنّ المتتالية (u_n) رتيبة و متقاربة نحو عدد l وتحقّق $f(l)=l$

برهان:

أولا: نفترض أنّ $u_1=f(u_0)\geq u_0$ بما أنّ f متزايدة فإنّ $u_2=f(u_1)\geq f(u_0)=u_1$ كذلك بما أنّ f متزايدة فإنّ: $u_3=f(u_2)\geq f(u_1)=u_2$ وهكذا . . . . نثبت أنّ $u_{n+1}\geq u_n$ و تكون (u_n) متزايدة

ثانيا: نفترض أنّ $u_1=f(u_0)\leq u_0$ بما أنّ f متزايدة بنفس الطريقة السابقة نثبت أنّ $u_{n+1}\leq u_n$ و تكون (u_n) متناقصة.

ومنه من الحالتين نستنتج أنّ (u_n) رتيبة.

من جهة أخرى و بما أنّ $f:[a,b]\to[a,b]$ فإنّ $\forall n\in\mathbb{N}, a\leq u_n\leq b$ و بالتالي (u_n) محدودة.

أخيرا بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة ومحدودة إذا متقاربة نحو عدد l أي $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ ولدينا كذلك $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=l$

وبما أنّ f مستمرّة فإنّ $l=\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\lim_{n\to+\infty} u_n)=f(l)$

مثال: لندرس طبيعة المتالية (u_n) المعرّفة بالشكل التالي: $u_0=2,\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$

حيث: $f:[0,3]\to[0,3],\ \ x\mapsto 1+\sqrt{x}$. الدالة f متزايدة إذا $[0,3]$ إذا $f([0,3])=[0,2.7]\subset[0,3]$ إذا f محدودة

لدينا $u_1=1+\sqrt{2}\simeq 2.4\geq u_0=2$ و بما أنّ f متزايدة فإنّ (u_n) متزايدة و بالتالي (u_n) متقاربة نحو عدد l وتحقّق: $1+\sqrt{l}=l$

لدينا $1+\sqrt{l}=l\Leftrightarrow\sqrt{l}=l-1\Leftrightarrow l=(l-1)^2(l\geq1)\Leftrightarrow l^2-3l+1=0\Leftrightarrow l=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\vee l=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

بما أنّ $l\geq1$ فإنّ : $l=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و نكتب $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

2- حالة f متناقصة:

نظرية:

إذا كانت $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة مستمرّة و متناقصة من أجل $u_0\in[a,b]$ فإنّ المتالية التراجعية (u_n) المعرّفة بـ: $u_{n+1}=f(u_n)$ فإنّ:

1) المتالية (u_{2n}) رتيبة و متقاربة نحو عدد l وتحقّق $f\circ f(l)=l$

2) المتالية (u_{2n+1}) رتيبة و متقاربة نحو عدد l' وتحقّق $f\circ f(l)=l'$

ملاحظة: لإثبات أنّ (u_{2n}) رتيبة (متزايدة أو متناقصة) يكفي المقارنة بين u_0 و u_2 و لإثبات أنّ (u_{2n+1}) رتيبة (متزايدة أو متناقصة) يكفي المقارنة بين u_1 و u_1

برهان: نعلم أنّ مركّب دالتين مستمرتين ومتناقصتين هو دالة مستمرّة و متزايدة .

أ) من أجل $u_0\in[a,b]$ لدينا $u_1=f(u_0)$ و $u_2=f(u_1)=f\circ f(u_0)$

أولا: نفترض أنّ: $u_2\geq u_0$ بما أنّ $f\circ f$ متزايدة فإنّ $u_4=f\circ f(u_2)\geq f\circ f(u_0)=u_2$ كذلك بما أنّ $f\circ f$ متزايدة فإنّ: $u_6=f\circ f(u_4)\geq f\circ f(u_2)=u_4$ وهكذا . . . . نثبت أنّ $u_{2n+2}\geq u_{2n}$ و تكون (u_{2n}) متزايدة.

ثانيا: نفترض أنّ: $u_2\leq u_0$ بما أنّ $f\circ f$ متزايدة بنفس الطريقة السابقة نثبت أنّ $u_{2n+2}\leq u_{2n}$ و تكون (u_{2n}) متناقصة.

ومنه من الحالتين نستنتج أنّ (u_n) رتيبة.

ب) من أجل $u_0\in[a,b]$ لدينا $u_1=f(u_0)\in[a,b]$ و $u_3=f(u_2)=f\circ f(u_1)$

أولا: نفترض أنّ: $u_3\geq u_1$ بما أنّ $f\circ f$ متزايدة فإن: فإنّ $u_5=f\circ f(u_3)\geq f\circ f(u_1)=u_3$ كذلك بما أنّ $f\circ f$ متزايدة فإنّ: $u_7=f\circ f(u_5)\geq f\circ f(u_3)=u_5$ وهكذا . . . . نثبت أنّ $u_{2n+3}\geq u_{2n+1}$ و تكون (u_{2n+1}) متزايدة.

ثانيا: نفترض أنّ: $u_3\leq u_1$ بما أنّ $f\circ f$ متزايدة بنفس الطريقة السابقة نثبت أنّ $u_{2n+2}\leq u_{2n}$ و تكون (u_{2n}) متناقصة.

ومنه من الحالتين نستنتج أنّ (u_{2n+1}) رتيبة.

من جهة أخرى و بما أنّ $f:[a,b]\to[a,b]$ فإنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ a\le u_n\le b$ و كون (u_{2n}) و (u_{2n+1}) جزئيّتين من (u_n) فإنّ

$\forall n\in\mathbb{N},\ a\le u_{2n}\le b$ و $\forall n\in\mathbb{N},\ a\le u_{2n+1}\le b$

أخيرا بما أنّ (u_{2n}) رتيبة ومحدودة إذا فهي متقاربة نحو عدد l أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=l$ ولدينا كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}f\circ f(u_n)=l$

وبما أنّ $f\circ f$ مستمرّة فإنّ: $l=\lim\limits_{n\to+\infty}f\circ f(u_{2n})=f\circ f(\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n})=f\circ f(l)$

بما أنّ (u_{2n+1}) رتيبة ومحدودة إذا فهي متقاربة نحو عدد l' أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=l'$ ولدينا كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}f\circ f(u_{2n+1})=l'$

وبما أنّ $f\circ f$ مستمرّة فإنّ: $l'=\lim\limits_{n\to+\infty}f\circ f(u_{2n+1})=f\circ f(\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1})=f\circ f(l')$

تمرين:

لتكن $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ الدالة المعرّفة كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$.

1. برهن أنّ f متناقصة تماما (دون حساب المشتق).
2. تحقق أنّ الدالة $f\circ f$ متزايدة تماما ثمّ احسب حلّ المعادلة: $(f\circ f)(x)=x$.
3. لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة بـ: $u_0=1,\ \forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=1+\dfrac{2}{u_n}$.

   اثبت أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:\ 1\le u_n\le 3$.
4. لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرّفتين كما يلي: $v_n=u_{2n}\ ,\ w_n=u_{2n+1}$.

   أ. احسب $u_1,\ u_2,u_3$، ثمّ ادرس رتابة كلّ من (v_n) و (w_n) .

   ب. استنتج أنّ المتتاليتين (v_n) و (w_n) متجاورتان.

   جـ. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

الحلّ:

لتكن $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ الدالة المعرّفة كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$.

1. البرهان على أنّ f متناقصة تماما (دون حساب المشتق): لنبرهن أنّ: $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^{*2}:x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

ليكن $0<x_1<x_2$ ومنه $1+\dfrac{1}{x_1}>1+\dfrac{1}{x_2}$ وبالتالي $f(x_1)>f(x_2)$.

2. التحقق أنّ الدالة $f\circ f$ متزايدة تماما ثمّ حساب حلّ المعادلة: $(f\circ f)(x)=x$:

لنتحقق أنّ: $f\circ f$ متزايدة تماما أي: $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^{*2}:x_1<x_2\Rightarrow f\circ f(x_1)<f\circ f(x_2)$

ليكن $0<x_1<x_2$ بما أنّ f متناقصة تماما فإنّ $f(x_1)>f(x_2)$ كذلك بما أنّ f متناقصة تماما فإنّ $f[f(x_1)]<f[f(x_2)]$

حلّ المعادلة: $(f\circ f)(x)=x$: $(f\circ f)(x)=x\Leftrightarrow f[f(x)]=x\Leftrightarrow 1+\dfrac{2}{1+\frac{2}{x}}=x\Leftrightarrow 1+\dfrac{2x}{x+2}=x$

ومنه يكون: $1+\dfrac{2x}{x+2}=x\Leftrightarrow\dfrac{3x+2}{x+2}=x\Leftrightarrow 3x+2=x(x+2)\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow(x=-1)\vee(x=2)$

وبما أنّ $x > 0$ فإنّ حلّ المعادلة: $(f \circ f)(x) = x$ هو $x = 2$

3. لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة بـ: $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

اثبات أنّ: $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le u_n \le 3$: لنبرهن بالتراجع لدينا $u_0 = 1, 1 \le u_0 \le 3$ ، نفرض أنّ $1 \le u_n \le 3$ ونثبت أن: $1 \le u_{n+1} \le 3$

$1 \le u_n \le 3 \Rightarrow \dfrac{2}{3} \le \dfrac{2}{u_n} \le 2 \Rightarrow 1 \le 1 + \dfrac{2}{3} \le 1 + \dfrac{2}{u_n} \le 1 + 2 \le 3 \Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 3$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le u_n \le 3$

4. لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرّفتين كما يلي: $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$.

أ. حساب u_1, u_2, u_3 ، ثمّ دارسة رتابة كل من (v_n) و (w_n) :

$u_1 = 1 + \dfrac{2}{1} = 3$ ، $u_2 = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$ و $u_3 = 1 + \dfrac{2}{\frac{5}{3}} = 1 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{11}{5}$

لدينا من السؤال 3) $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ ومنه يكون: $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f[f(u_{2n})] = f \circ f(v_n)$

كذلك $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f[f(u_{2n+1})] = f \circ f(w_n)$ ولدينا $f \circ f$ متزايدة تماما و بما أنّ: $v_1 = f \circ f(v_0) = u_2 = \dfrac{5}{6} < 1 = u_0 = v_0$

و $w_1 = f \circ f(w_0) = u_3 = \dfrac{11}{5} > 2 = u_1 = w_0$ فإنّ (v_n) متزايدة تماما و (w_n) متناقصة تماما .

ب. استنتاج أنّ المتتاليتين (v_n) و (w_n) متجاورتان:

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le u_n \le 3$ وبما أنّ $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le v_n \le 3$ و $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le w_n \le 3$

وبالتالي (v_n) و (w_n) محدودتان وبما أنهما رتيبتان تماما فهما متقاربتان.

إثبات أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$

نفرض أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = l$ و بالتالي: $\lim\limits_{x \to +\infty} v_{n+1} = l$ ونفرض كذلك $\lim\limits_{x \to +\infty} w_n = l'$ و بالتالي: $\lim\limits_{x \to +\infty} w_{n+1} = l'$

لدينا $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ و $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ و بما أنّ الدالة $f \circ f$ مستمرة فإنّ $l = f \circ f(l)$ و $l' = f \circ f(l')$

(0.5ن)

ونعلم أنّ حل المعادلة $(f \circ f)(x) = x$ هو $x = 2$ ومنه يكون $l = l' = 2$ إذا $\lim\limits_{x \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$

و بالتالي أثبتنا أنّ (v_n) و (w_n) متجاورتان.

جـ. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أنّ (v_n) و (w_n) مستخرجتان من (u_n) ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{x \to +\infty} w_n = \lim\limits_{x \to +\infty} u_{2n+1} = 2$ فإنّ (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 2$

مقياس: تحليل 1	جـــامعة الــوادي	قسم الرياضيات
2021/2020	كلية العلوم الدقيقة	سنة أولــى MI

سلسلة أعمال موجّهة رقم 03 (نهايات و استمرارية الدوال الحقيقية)

تمرين1: احسب النهاية إن وجدت في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x}{x^4-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{x}$ *5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+2x\right)}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ *9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$ *10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

تمرين2:

1. نفترض أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ و $\forall x>A>0,\ |f(x)|\le g(x)$. اثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. لتكن f_1 ، f_2 و g ثلاث دوال حقيقية، حيث: $\forall x>A>0,\ f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$ ، إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f_2(x)=l$

اثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$. 3. استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x+2}=1$.

تمرين3: ادرس استمرارية الدوال الحقيقية f ، g و h على المجموعة $\mathbb{R}$ حيث:

1) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le\pi\\ 1+\cos x, & x>\pi\end{cases}$ *3) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

تمرين4: 1. اثبت أنّ: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}$. **2.** اثبت أنّ الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x}$ مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}_+$.

تمرين5*: اثبت أنّ الدالة f المعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ غير مستمرة بانتظام على هذا المجال.

تمرين6: باستعمال المتتاليات، اثبت أن الدالة f لا تقبل نهاية عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}},\ x_0=0$ *2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x},\ x_0=0$ 3) $f(x)=\dfrac{x^x}{\lceil x\rceil^{[x]}},\ x_0=+\infty$

تمرين7: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ bx^3+b, & 1\le x\le 2\\ x^2+a, & x>2\end{cases}$

عين الثابتين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين8*: لتكن f و g دالتين معرفتين و مستمرتين على نفس المجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ ، حيث أنّ : $\forall x\in[a,b], f(x)>g(x)$.

اثبت أنّه يوجد عدد حقيقي $k>0$ ، حيث أنّ : $\forall x\in[a,b], f(x)\ge g(x)+k$

تمرين9: لتكن f دالة مستمرة على المجال $[-1;1]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، حيث أنّ : $f(-1)=f(1)$.

بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0;1[$ بحيث $f(c)=f(c-1)$.

تمرين10*: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة وحيث أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

1. اثبت أنّ f محدودة. 2. هل الدالة f تدرك حدّيها الأعلى والأسفل معا ؟ .

تمرين11: نعتبر الدالة الحقيقية f المعرّفة على المجال $[0,1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1. اثبت أنّ الدالة f رتيبة تماما . 2. استنتج أن f تقابل ثم عيّن دالتها العكسية f^{-1} .

تمرين12: لتكن $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة بحيث: $\forall (x,y)\in[a,b]^2, |f(x)-f(y)|<|x-y|$

1. برهن أنّ f مستمرة بانتظام على $[a,b]$ و استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاّ وحيدا .

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي: $u_0\in[a,b]$ و $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{u_n+f(u_n)}{2}$. اثبت أنّ (u_n) متقاربة. [(*) يترك للتقويم لاحقا]

قسم الرياضيات	جامعة الوادي	مقياس: تحليل 1
سنة أولى MI	كلية العلوم الدقيقة	2021/2020

حل سلسلة أعمال موجّهة رقم: 03 (نهايات واستمرارية الدوال العددية)

حل ت1: حساب النهاية إن وجدت في كل حالة من الحالات التالية:

1) لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{x^2+2|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{x^2-2x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x-2)=-2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x^2+2|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x+2)=2$ و بما أنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x^2+2|x|}{x}\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{x^2+2|x|}{x}$ إذا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$ غير موجودة.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x}{x^4-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}$

6) لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{(1+x)^{1/3}-1}$ بوضع $1+x=t^6$ نجد: $t\to 1$ ، $(1+x)^{1/2}=t^3$ و $(1+x)^{1/3}=t^2$ و بالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\sin x}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}).\frac{\sin x}{x}=2\times 1=2$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}.\frac{3x}{\sin 3x}.\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}\times 1\times 1=\frac{2}{3}$

حل ت2: 1. نفترض أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ و $\forall x>A>0,\ |f(x)|\le g(x)$

إثبات أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ إذا $\forall\varepsilon>0,\exists B>0,(x>B\Rightarrow g(x)<\varepsilon)$

كذلك من أجل $x>A>0$ لدينا $|f(x)|\le g(x)$ ، إذا $\forall\varepsilon>0,\exists C=\max(A,B)>0,(x>C\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon)$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2. لتكن f_1 ، f_2 و g ثلاث دوال حقيقية، حيث: $\forall x>A>0,\ f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$ ، إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f_2(x)=l$

إثبات أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$. تذكير ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\Leftrightarrow\forall s_n\in I:[(\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=x_0)\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(s_n)=l]$)

لتكن (x_n) متتالية حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ إذا $f_1(x_n)\le g(x_n)\le f_2(x_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}f_1(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_2(x_n)=l$ وبتطبيق نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=l$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$.

3. استنتاج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+2}=1$. من أجل $x>0$ لدينا $0<\frac{x+3}{x+2}-1=\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x}$ وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ وحسب السؤال السابق نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+3}{x+2}-1)=0$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+2}=1$

حل ت3: دراسة استمرارية الدوال الحقيقية f ، g و h على المجموعة $\mathbb{R}$ حيث:

1) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$. لندرس استمرار f عند 0 . $f(0)=1$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*,|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|$ و بما أنّ $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ و حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}|=0\neq f(0)$ ومنه f غير مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le\pi\\ 1+\cos x, & x>\pi\end{cases}$. الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}-\{0,\pi\}$. لندرس استمرار f عند 0 و π . لدينا $f(\pi)=f(0)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x^2+x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sin x=0$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}}\sin x=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ >}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ >}}(1+\cos x)=0$

نستنتج أنّ f مستمرة عند كل من 0 و π و بالتالي مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل ت 4:

1. إثبات أنّ: $\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2, |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le \sqrt{|x-y|}$.

ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين، .نعلم أنّ: $\sqrt{x+y}\le \sqrt{x}+\sqrt{y}$ (يمكن الإثبات انطلاقا من تربيع الطرفين)

نفرض أنّ: $x\ge y$ ، لدينا $\sqrt{x}=\sqrt{x-y+y}\le \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$ ومنه $\sqrt{x}-\sqrt{y}\le \sqrt{x-y}$

نفرض أنّ: $x\le y$ ، لدينا $\sqrt{y}=\sqrt{y-x+x}\le \sqrt{y-x}+\sqrt{x}$ ومنه $-(\sqrt{x}-\sqrt{y})\le \sqrt{-(x-y)}$

وأخيرا $\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2, |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le \sqrt{|x-y|}$

2. إثبات أنّ $f: x\mapsto \sqrt{x}$ مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}_+$. لنثبت أنّ: $\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha(\varepsilon)>0: \forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2 (|x-y|<\alpha \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon)$

من أجل $\varepsilon>0$ لدينا $\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2, |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le \sqrt{|x-y|}<\sqrt{\alpha}$ حتى يكون الاستلزام صحيحا يكفي أن نختار $\alpha<\varepsilon^2$.

حل ت6: باستعمال المتاليات، إثبات أن الدالة f لا تقبل نهاية عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

تذكير (لإثبات أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ غير موجودة يكفي إيجاد متتاليتين (s_n) و (t_n) لهما نفس النهاية x_0 بينما نهايتي $f(s_n)$ و $f(t_n)$ مختلفتان)

1) $f(x)=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, x_0=0$. لتكن (s_n) و (t_n) متتاليتين حيث: $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ s_n=\frac{1}{n},\ t_n=-\frac{1}{n}$ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=0$

بينما $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{\sqrt{1+n^2}}{n})=-1$ ومنه f لا تقبل نهاية عند 0

3) $f(x)=\frac{x^x}{[x]^{[x]}}, x_0=+\infty$. لتكن (s_n) و (t_n) متتاليتين حيث: $\forall n\in \mathbb{N},\ s_n=n,\ t_n=n+\frac{1}{2}$ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$

من جهة أولى لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n^n}=1$ لكن من جهة أخرى لدينا $f(t_n)=\frac{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{[n+\frac{1}{2}]^{[n+\frac{1}{2}]}}=\frac{(n+\frac{1}{2})^n}{n^n}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\ge \sqrt{n+\frac{1}{2}}$

وبما أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+\frac{1}{2}}=+\infty$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)=+\infty$ ومنه f لا تقبل نهاية عند $+\infty$

حل ت7: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases} x, & x<1\\ bx^3+b, & 1\le x\le 2\\ x^2+a, & x>2\end{cases}$

تعيين الثابتين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}-\{1,2\}$ لأنها دالة كثير حدود . لندرس استمرارية f عند 1 و 2 .

♦ الاستمرار عند 1 . نلاحظ أنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(bx^3+b)=2b$. حتّى تكون f مستمرة عند 1 يجب أن تكون النهايتان السابقتان متساويتين أي أن يكون $2b=1$ وبالتّالي: $b=\frac{1}{2}$.

♦ الاستمرار عند 2 . نلاحظ أنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=9b$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=4+a$. حتّى تكون f مستمرة عند 2 يجب أن تكون النهايتان السابقتان متساويتين أي أن يكون $a+4=9b=\frac{9}{2}$ وبالتالي: $a=\frac{1}{2}$.

حل ت 9: لتكن f دالة مستمرة على المجال $[-1;1]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، حيث أنّ : $f(-1)=f(1)$.

إثبات أنّه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0;1[$ بحيث $f(c)=f(c-1)$.

لتكن g دالة مستمرة و معرّفة على المجال $[0,1]$ كما يلي: $g(x)=f(x)-f(x-1)$

لدينا $g(0)=f(0)-f(-1)=f(0)-f(1)$ و $g(1)=f(1)-f(0)$ وبالتالي نستنتج أن $g(1)=-g(0)$ ويكون:

$g(1)g(0)<0$ وحسب نظرية القيم المتوسطة: $\exists c\in]0,\ 1[,\ g(c)=0$ و منه $\exists c\in]0,\ 1[,\ f(c)=f(c-1)$

حل ت 11: نعتبر الدالة الحقيقية f المعرّفة على المجال $[0,1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1 . إثبات أنّ الدالة f رتيبة تماما .

ليكن x_1 و x_2 عددين من المجال $[0,1]$ حيث: $x_1<x_2$ لدينا $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

لدينا $0\le x_1\le 1$ و $0\le x_2\le 1$ إذا $-1\le -x_1x_2\le 0$ وبما أنّ $x_1\ne x_2$ فإنّ: $1-x_1x_2>0$ وبالتالي: $f(x_1)-f(x_2)<0$

ونستنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما .

2 . استنتاج أن الدال f تقابل و تعيين دالتها العكسية f^{-1} .

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,1]$ إذا فهي تقابل من $[0,1]$ نحو $f([0,1])=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

تعيين f^{-1} : f^{-1} معرفة على المجال $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ و تأخذ قيمها في $[0,1]$. ولدينا $y=f(x),\ x\in[0,1]\Leftrightarrow x=f^{-1}(y),\ y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

$y=\dfrac{x}{1+x^2}\Leftrightarrow yx^2-x+y=0...(1)$. من أجل $y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ المعادلة (1) تقبل حلاّ وحيدا $x=\dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$

ونكتب: $f^{-1}:[0,1]\to\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ حيث: $f^{-1}(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}$

حل ت 12: لتكن $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة بحيث: $\forall(x,y)\in[a,b]^2, |f(x)-f(y)|<|x-y|$

1 . البرهان على أنّ f مستمرة بانتظام على $[a,b]$

لنثبت أنّ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\forall(x,y)\in[a,b]^2(|x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$

لدينا $|x-y|<\alpha$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\varepsilon$ حتى يكون $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

استنتاج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاّ وحيدا .

لنضع $g(x)=f(x)-x$. الدالة g مستمرة على المجال $[a,b]$ ولدينا $g(a)=f(a)-a\ge 0$ و $g(a)=f(b)-b\le 0$ وحسب نظرية القيم المتوسطة: $\exists c\in[a,b],\ g(c)=0$ و بالتالي المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلاّ في $[a,b]$

لنثبت أن هذا الحل وحيد نفرض أنّ c_1 و c_2 حلاّن للمعادلة $f(x)=x$. لدينا $|c_1-c_2|=|f(c_1)-f(c_2)|<|c_1-c_2|$ وهذا مستحيل ومنه المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاّ وحيدا في $[a,b]$.

2 . (u_n) متتالية معرّفة كما يلي: $u_0\in[a,b]$ و بالعلاقة $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+f(u_n)}{2}$.

إثبات أنّ (u_n) متقاربة. لتكن الدالة h المعرّفة على المجال $[a,b]$ بـ: $h(x)=\dfrac{x+f(x)}{2}$. الدالة h مستمرة على $[a,b]$ ولدينا $h([a,b])\subset[a,b]$ وبالتالي المتتالية (u_n) معرّفة جيدا ومحدودة $(\forall n\in\mathbb{N},\ \ a\le u_n\le b)$

لنثبت أنّ الدالة h متزايدة على المجال $[a,b]$. ليكن $(x,y)\in[a,b]^2$ حيث: $x<y$. لدينا

$f(x)-f(y)\le|f(x)-f(y)|<|x-y|=y-x$ ومنه يكون: $x+f(x)<y+f(y)$ وبالتالي: $h(x)<h(y)$

بما أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإنّ المتتالية (u_n) رتيبة تماما وهي محدودة إذا (u_n) متقاربة.

1 . قابلية اشتقاق دالة: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرّفة على مجال مفتوح I يشمل x_0 .

تعريف1: نقول أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا كانت للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية (عدد حقيقي ثابت) عندما x يؤول إلى x_0 . هذه النهاية تسمّى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز له بـ: $f'(x_0)$ ونكتب: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

وبوضع $x=x_0+h, h\neq 0$ نجد: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

تعريف2: نقول أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I إذا كانت تقبل الاشتقاق عند كل عدد x_0 من I . الدالة $x\mapsto f'(x)$ هي الدالة المشتقة للدالة f ونرمز لها بـ: f' أو $\frac{df}{dx}$.

أمثلة:

1) الدالة المعرفة بـ: $f(x)=x^2$ قابلة للاشتقاق عند كل عدد x_0 من $\mathbb{R}$ لأنّ: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0\underset{x\to x_0}{\to}2x_0$

وبالتالي نستنتج أن العدد المشتق للدالة f عند x_0 هو $2x_0$ وتكون عبارة الدالة المشتقة f' كما يلي: $f'(x)=2x$.

2) الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=0$ لأنّ: $f(0)=1$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1-h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1-h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-h}=1$$

تعريف3:

من أجل $x>x_0$ نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كانت: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$

العدد الحقيقي $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق من اليمين للدالة f عند x_0 .

من أجل $x<x_0$ نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f_g'(x_0)\in\mathbb{R}$

العدد الحقيقي $f_g'(x_0)$ يسمى العدد المشتق من اليسار للدالة f عند x_0 .

ملاحظة: f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان: $f_d'(x_0)=f_g'(x_0)=f'(x_0)$

2 . التفسير الهندسي للعدد المشتق: لتكن f دالة مستمرة على مجال مفتوح يشمل عدد x_0 ، العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هو معامل توجيه المستقيم الذي يشمل النقطتين من منحنى f اللتين فاصلتيهما x_0 و x_0+h ، عندما $h\to 0$ فإن النقطتين تنطبقان و المستقيم يصبح مماسا للمنحنى و معامل التوجيه يؤول الى العدد المشتق، وبالتالي العدد المشتق هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 و معادلة المماس تكون: $y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$

3 . الاستمرار و قابلية الاشتقاق:

نظرية: كل دالة قابلة للاشتقاق عند عدد هي مستمرة عند هذا العدد و العكس غير صحيح.

برهان: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 ، لإثبات أنّ f مستمرة عند x_0 يكفي أن نثبت: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0)=f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0)=f(x_0)$$

والعكس غير صحيح مثلا الدالة $f: x\mapsto |x|$ مستمرة عند $x_0=0$ لكن غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأنّ:

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x}{x}=1\neq f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-x}{x}=-1$$

4. الدوال القابلة للاشتقاق باستمرار:

تعاريف: لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة ، حيث I مجال مفتوح و ليكن $n\geq 1$ عددا طبيعيا .

نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق باستمرار على المجال I أو من الصنف C^1 على المجال I إذا كانت الدالة المشتقة f' مستمرة على I .

وبصفة عامة نقول أن الدالة من الصنف C^n على المجال I أو تقبل الاشتقاق باستمرار n مرة على المجال I إذا كانت المشتقات المتابعة $f',f'',....,f^{(n)}$ مستمرة على I .

نقول أن الدالة f من الصنف C^0 على المجال I إذا كانت مستمرة على هذا المجال.

نقول أن الدالة f من الصنف C^∞ على المجال I أو تقبل الاشتقاق باستمرار عدد غير منته من المرّات على المجال I إذا كانت كلّ مشتقات الدالة f موجودة على I .

ملاحظة:

1) إذا كانت الدالة f من الصنف C^n فإنّها من الصنف C^p من أجل $p\leq n$.

2) إذا كانت الدالة f من الصنف C^∞ فإنّها من الصنف C^n من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

أمثلة:

1) دوال كثيرات الحدود و الدوال المثلثية (sin و cos) من الصنف $C^n(\mathbb{R})$ و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\geq 1:\ \cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})\ ,\ \sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

2) الدالة الأسّية exp من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$

5 . العمليات على الدوال القابلة للاشتقاق:

♦ إذا كانت $f,g:I\to\mathbb{R}$ دالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح I و $k\in\mathbb{R}$ فإنّ: $f\pm g$ ، kf ، $f\times g$ و f/g (g لا تنعدم على I) دوال تقبل الاشتقاق على I و مشتقاتها معرفة كما يلي:

1) $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ 2) $(kf)'(x)=kf'(x)$ 3) $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

4) إذا كان $g(x)\neq 0$ فإنّ: $(\frac{1}{g})'(x)=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$, $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

♦ إذا كانت f دالة تقبل للاشتقاق عند x و g دالة تقبل للاشتقاق عند $f(x)$ فإنّ الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق عند x وعددها المشتق: $(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\times f'(x)$

♦ إذا كانت f دالة تقبل للاشتقاق عند عدد x حيث $f'(x)\neq 0$ فإن دالتها العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $y=f(x)$ وعددها المشتق: $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

مثال: الدالة $f(x)=\ln(x)$ تقبل الاشتقاق عند كل x من $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$ وبالتالي دالتها العكسية exp تقبل الاشتقاق عند كل $y=f(x)$ من $\mathbb{R}$ ولدينا $(f^{-1})'(y)=\exp'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{f'[f^{-1}(y)]}=\dfrac{1}{f'[\exp(y)]}=\exp(y)$.

6. المشتقات المتعاقبة و دستور ليبنيز:

تعريف: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة . إذا قبلت f' بدورها الاشتقاق على المجال I فإن مشتقة f' تسمى المشتقة الثانية لـ f و نرمز لها بـ: f'' . يمكن بالتراجع تعريف $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f .

دستور ليبنيز Leibniz:

إذا كانت $f,g:I\to\mathbb{R}$ دالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق n مرة على مجال I فإنّ الدالة المشتقة من الرتبة n لجداء الدالتين f و g تعطى بالعلاقة التالية: $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\ f^{(k)}g^{(n-k)}$ حيث: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال: لنحسب المشتقة الثالثة للدالة h حيث: $h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$. نضع $h(x)=f(x).g(x)$ حيث: $f(x)=\sin(x)$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$

لدينا $h'''(x)=(fg)'''(x)=\sum_{k=0}^{k=3}C_k^3\ f^{(k)}(x)g^{(3-k)}(x)=f(x)g'''(x)+f'(x)g''(x)+f''(x)g'(x)+f'''(x)g(x)$

من جهة أخرى لدينا : $f(x)=\sin(x),\ f'(x)=\cos(x),\ f''(x)=-\sin(x),\ f'''(x)=-\cos(x)$

$g(x)=\dfrac{1}{x}, g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}, g''(x)=\dfrac{2}{x^3}, g'''(x)=\dfrac{-6}{x^4}$ ومنه يكون: $h'''(x)=-\dfrac{6\sin(x)}{x^4}+\dfrac{2\cos(x)}{x^3}+\dfrac{\sin(x)}{x^2}-\dfrac{\cos(x)}{x}$.

7. نظريات التزايدات المنتهية وتطبيقاتها:

نظرية رول Roll: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال مغلق و محدود $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ حيث: $f(a)=f(b)$ فإنه يوجد على الأقل $c\in]a,b[$ يحقق: $f'(c)=0$.

برهان: بما أنّ f مستمرة على مجال متراص(مغلق و محدود) $[a,b]$ فهي محدودة و تدرك حديها حسب نظرية فايرستراش إذا يوجد عددين α و β من $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$ و $f(\beta)=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$. لنناقش الحالتين التاليتين:

♦ إذا كان: $f(\alpha)=f(\beta)$ فإنّ f ثابتة و يكون $\forall x\in[a,b]: f(x)=f(\alpha)$ يمكن أن نأخذ c أي عدد من المجال $]a,b[$.

♦ إذا كان: $f(\alpha) > f(\beta)$ فلا بدّ أن يكون $\alpha \in]a,b[$ أو $\beta \in]a,b[$ لأنّ: $f(a)=f(b)$.

ففي حالة $\alpha \in]a,b[$ يحقق العدد $\alpha = c$ المطلوب لأنّ: $x \in]a,\alpha[\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq 0$ و منه $f'(\alpha) = f'_g(\alpha) \leq 0$

وكذلك $x \in]\alpha,b[\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq 0$ و منه $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) \geq 0$ نستنتج أنّ $f'(\alpha)=0$.

بأسلوب مماثل نجد أنّ $\beta \in]a,b[$ يقتضي $f'(\beta)=0$. وبذلك يتم إثبات النظرية.

مثال: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ، $[a,b]=[-1,1]$ لدينا f مستمرة على $[-1,1]$ و قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و $\forall x \in]-1,1[, f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

حسب النظرية $\forall c \in]-1,1[, f'(c)=0$ يمكن التأكد أنّ: $c=0$.

نظرية لاغرانج Lagrange:(التزايدات المنتهية) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ فإنه يوجد على الأقل $c \in]a,b[$ يحقق: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

برهان: الدالة g المعرّفة على $[a,b]$ كما يلي: $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ تحقق شروط نظرية رول وبالتالي فإنه يوجد على الأقل $c \in]a,b[$ يحقق: $g'(c)=0$ أي $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

ملاحظة: لهذه النظرية عدّة تطبيقات منها 1) تعيين حصر عبارة 2) إثبات بعض المتراجحات .

نظرية كوشي Cauchy:(التزايدات المنتهية المعمّمة) إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال متراص $[a,b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a,b[$ و g' لا تنعدم على $]a,b[$ فإنّه يوجد على الأقل $c \in]a,b[$ يحقق: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

برهان: g' لا تنعدم على $]a,b[$ و بالتالي: $g(a) \neq g(b)$. نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

يمكن التحقق أنّ: $h(a)=h(b)$ ، الدالة h تحقق كل شروط نظرية رول، إذا يوجد على الأقل $c \in]a,b[$ يحقق: $h'(c)=0$. ومنه يكون:

$h'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$ و بالتالي: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

مثال: لنثبت أنه إذا كان $0<a<b$ فإنّ: $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}} \leq \dfrac{3}{2}\sqrt[6]{b}$.

نضع : $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$ و $g'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$ بتطبيق النظرية على المجال $[a,b]$ فإنّه يوجد على الأقل عددا c من $]a,b[$ بحيث $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ أي $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}=\dfrac{2c^{2/3}}{3c^{1/2}}=\dfrac{2}{3}c^{1/6} \leq \dfrac{2}{3}\sqrt[6]{b}$

اتجاه تغير دالة: إذا كانت $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال I فإنّ:

الدالة f متزايدة (متزايدة تماما) على المجال I إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0\ \ (f'(x)>0)$

الدالة f متناقصة (متناقصة تماما) على المجال I إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0\ \ (f'(x)<0)$

الدالة f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in I,\ f'(x)=0$

8. قاعدة لوبيتال L'Hôpital: إذا كانت f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على مجال I يشمل عدد x_0 وقابلتين للاشتقاق على $I-\{x_0\}$ وتحققان $f(x_0)=g(x_0)=0$ و إذا كان $\forall x\in I-\{x_0\},\ g'(x)\neq 0$ فإنّ: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

البرهان: f و g مستمرتان على المجال $[x_0,x]$ $([x,x_0])$ و تقبلان الاشتقاق على المجال $]x_0,x[$ $(]x,x_0[)$ والدالة المشتقة g' لا تنعدم على المجال $]x_0,x[$ $(]x,x_0[)$ حسب نظرية كوشي. $\exists c(x)\in]x_0,x[(]x,x_0[):\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$

وبما أنّ: $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإنّ: $\exists c(x)\in]x_0,x[(]x,x_0[):\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$

لدينا $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=l$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

ملاحظة: تبقى القاعدة صحيحة في حالة $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$ لدينا: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\frac{1}{3}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x})^2=\frac{1}{3}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x})^2=\frac{1}{3}(9)=3$

I. الدوال العكسية للدوال المثلثية:

1. الدالة arcsin : الدالة $f:[\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]\to[-1,1]$ المعرّفة بـ: $f(x)=\sin x$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $(\forall x\in]\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}[: f'(x)=\cos x>0)$ فهي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:[-1,1]\to[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تسمى قوس الجيب و نرمز لها بـ: arcsin وهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1,+1]$ ونكتب:

$$(y=\arcsin(x),\forall x\in[-1,+1])\Leftrightarrow(x=\sin(y),\forall y\in[\tfrac{-\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}])$$

$$\forall x\in]-1,+1[,\ \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. الدالة arccos : الدالة $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ المعرّفة بـ: $f(x)=\cos x$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0,\pi]$ $(\forall x\in]0,\pi[: f'(x)=-\sin x<0)$ فهي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ رمز لها بـ: arccos وهي مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-1,+1]$ ونكتب:

$$(y=\arccos(x),\forall x\in[-1,+1])\Leftrightarrow(x=\cos(y),\forall y\in[0,\pi])$$

ولدينا $\forall x\in]-1,+1[,\ \arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

خاصية: $\forall x\in[-1,+1],\ \arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$

برهان: نضع: $a=\arcsin(x),\ b=\arccos(x)$ لدينا $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

لدينا $f^{-1}of(x)=x$ و بالتالي: $\sin(a+b)=x^2+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}=1\ldots(1)$

كذلك $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ لدينا $f^{-1}of(x)=x$ نجد أنّ:

$\cos(a+b)=x\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}=0\ldots(2)$. من (1) و(2) نجد $a+b=\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$

3. الدالة arctg : الدالة tg مستمرة و متزايدة تماما على $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ و تأخذ قيمها على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى قوس الظل و نرمز لها بـ: arctg ونكتب: $(y=\operatorname{arctg}x,\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(x=\operatorname{tg}y,\forall y\in]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[)$ والدالة $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ مستمرة ، متزايدة تماما وفردية ولدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{arctg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

II. الدوال الزائدية:

تعاريف: نسمّي الجيب الزائدي sh ، جيب التمام الزائدي ch ، الظل الزائدي th و ظل التمام الزائدي coth الدّوال المعرّفة على الترتيب بالعلاقات التّالية: $\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ، $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ، $\operatorname{th}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ ، $\operatorname{coth}(x)=\frac{1}{\operatorname{th}(x)}$

نتائج:

1) $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)=e^{x}$ (2 $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)=e^{-x}$ (3 $\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)=\mathrm{ch}(2x)$

4) $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$ (5 $\mathrm{th}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (6 $\coth(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

خواص:

1) الدالتان sh و ch معرفتان ومستمرتان وقابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x),\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$

2) الدالة ch زوجية ، موجبة تماما على $\mathbb{R}$ ، متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ و لدينا:

$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ch}(x)=\mathrm{ch}(0)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$ وبالتالي نستنتج أنّ الدالة ch تقابل من $\mathbb{R}_+$ في $[1,+\infty[$

3) الدالة sh فردية و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$ وبالتالي نستنتج أنّ الدالة sh تقابل من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

4) الدالة th فردية ، مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}=1-\mathrm{th}^2(x)$ و بالتالي متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{th}(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x)=+1$ ومنه نستنتج أنّ الدالة th تقابل من $\mathbb{R}$ في $]-1,+1[$.

III . الدوال العكسية للدوال الزائدية:

1 . الدالة argsh : الدالة $\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى عمدة الجيب الزائدي و نرمز لها بـ: argsh ونكتب: $(y=\mathrm{argsh}\,x,\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(x=\mathrm{sh}\,y,\forall y\in\mathbb{R})$ و الدالة $\mathrm{argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة، متزايدة تماما و فردية و يمكن التأكد أنّ: $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{argsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. ولدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2 . الدالة argch : الدالة $\mathrm{ch}:[0,+\infty[\to[1,+\infty[$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى عمدة جيب التمام الزائدي و نرمز لها بـ: argsh ونكتب: $(y=\mathrm{argch}(x),\forall x\geq 1)\Leftrightarrow(x=\mathrm{ch}(y),\forall y\geq 0)$

و الدالة $\mathrm{argch}:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ مستمرة، متزايدة تماما و يمكن التأكد أنّ: $\forall x\geq 1,\ \mathrm{argch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

ولدينا $\forall x>1,\ \mathrm{argch}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3 . الدالة argth : الدالة $\mathrm{th}:\mathbb{R}\to]-1,1[$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى عمدة الظل الزائدي نرمز لها بـ: argth ونكتب: $(y=\mathrm{argth}(x),\forall x\in]-1,+1[)\Leftrightarrow(x=\mathrm{th}(y),\forall y\in\mathbb{R})$ و الدالة $\mathrm{argth}:]-1,1[\to\mathbb{R}$ مستمرة، متزايدة تماما و فردية و يمكن التأكد أنّ: $\forall x\in]-1,+1[,\ \mathrm{argth}\,x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

ولدينا $\forall x\in]-1,+1[,\ \mathrm{argth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

قسم الرياضيات	جامعة الوادي	مقياس: تحليل 1
سنة أولى MI	كلية العلوم الدقيقة	2021/2020

سلسلة أعمال موجّهة رقم 04 (قابلية اشتقاق الدوال العددية + الدّوال الأولية)

تمرين1: هل تقبل الدوال التالية الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟

1) $f(x)=\begin{cases}1-e^{x}, & x\le 0\\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}, & x>0\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases}x^{2}\sin x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 3) $h(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x\ln x-x, & x>0\end{cases}$

تمرين2*: لتكن f الدالة المعرّفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}x^{2}-x+1, & x\le 2\\ (ax+b)^{2}, & x>2\end{cases}$

1 . ما هو الشّرط الذي يجب أن يحققه العددان الحقيقيان a و b بحيث تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ .

2 . عيّن قيم العددين a و b حتّى تكون f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

تمرين3: احسب المشتقة من الرتبة n للدالة f في كلّ حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^{2}}$ 2) $f(x)=\sin x\cos x$ 3) $f(x)=e^{x}\cos x$ 4*) $f(x)=x^{2}(1-x)^{n}$ 5*) $f(x)=x^{n-1}\ln x$

تمرين4: ادرس إمكانية تطبيق نظرية رول على المجالات و الدوال التالية

1) $f:\begin{cases}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt[3]{x^{2}}\end{cases}$ 2) $g:\begin{cases}[0,\pi]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\end{cases}$

تمرين5: 1 . أثبت من أجل كلّ x من $[0,\frac{\pi}{2}]$ يكون: $0\le \sin x\le x$ 2 . استنتج أنّ: $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]:\ -x^{2}\le \cos x-1\le 0$

تمرين6: باستعمال قاعدة لوبيتال ، احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^{3}-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{2}}-1}{\cos x-1}$ 3*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}-\tan x$ 5*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^{2}-1}+x}{x}$

تمرين7*: ادرس الاستمرارية و قابلية الاشتقاق على $\mathbb{R}$ للدالة : $f:x\mapsto\cos(\pi xE(x))$ حيث $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x

تمرين8*: 1 . أثبت من أجل كلّ $x>0$: $\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$. 2 . نضع: $u_{n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n}$

أ . بيّن أنّ $\ln(2n+1)-\ln(n+1)<u_{n}<\ln(2n)-\ln n$. ب. استنتج أنّ (u_{n}) متقاربة ثمّ عيّن نهايتها .

تمرين9: عين مجموعة تعريف الدالة f المعرفة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\arccos\left(\frac{1+x}{x}\right)$ *2) $f(x)=\arcsin\left(\frac{1-x}{4}\right)$ 3) $f(\mathrm{x})=\arctan\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$ 4) $f(\mathrm{x})=\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$

تمرين10: برهن العلاقات التالية:

1) $\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi$ *2) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}=\cos(\arcsin x)$

3) $\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan(\operatorname{sh} x)=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$ 4) $\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argsh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

تمرين11:

1 . اثبت أن الدالة arctan فردية.

2 . احسب $\arctan'\frac{1}{x}$ من أجل $x\in\mathbb{R}^*$.

3 . استنتج أن: $\forall x\in\mathbb{R}^*:\ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=signe(x)\frac{\pi}{2}$. حيث $signe(x)$ إشارة x

تمرين12*: لتكن f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

1 . حدّد الدالة المشتقة g' .

2 . استنتج أنّ: أ) $\forall x>-1:\ f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{4}$ ب) $\forall x<-1:\ f(x)=\operatorname{arctg} x+\frac{3\pi}{4}$

تمرين13*: نعتبر f الدالة المعرّفة كما يلي : $f(x)=\operatorname{ar}\sin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

1 . أ.عيّن D مجموعة تعريف f . ب. ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 .

2 . أ.حدّد الدّالة المشتقة للدّالة f . ب. ادرس رتابة f .

3 . بيّن أنّ: $\forall x\in[1,+\infty[,\ f(x)\le\frac{1}{2}(x-1)$

[(*) يترك للتقويم لاحقا]

قسم الرياضيات	جـــامعة الــوادي	مقيـاس: تحليـل 1
سنة أولـــى MI	كلية العلوم الدقيقة	2021/2020

حل سلسلة أعمال موجّهة رقم 04 (قابلية اشتقاق الدوال العددية + الدّوال الأولية)

حل ت1: هل تقبل الدوال التالية الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟

1) $$f(x)=\begin{cases}1-e^{x}, & x\le 0\\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}, & x>0\end{cases}$$

الدّالة f تقبل الاشتقاق من أجل $x\neq 0$. لندرس قابلية الاشتقاق عند $x_0=0$. لدينا $f(0)=0$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(-\dfrac{e^{x}-1}{x})=-1\Rightarrow f_g'(0)=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{e^{x}-1}{x(e^{x}+1)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f_d'(0)=\dfrac{1}{2}$

و بما أنّ $f_g'(0)\neq f_d'(0)$ ومنه الدّالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ و بالتالي f لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2) $$g(x)=\begin{cases}x^{2}\sin x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

الدّالة f تقبل الاشتقاق من أجل $x\neq 0$. لندرس قابلية الاشتقاق عند $x_0=0$. لدينا $f(0)=0$

لدينا $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=x\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ و $\forall x\in\mathbb{R}^{*}:0\le|x\sin x\sin\dfrac{1}{x}|\le|x|$ وبما أنّ $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ نستنتج أنّ:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin x\sin\dfrac{1}{x}=0$ ومنه الدّالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$. إذا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

3) $$h(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x\ln x-x, & x>0\end{cases}$$

الدّالة f تقبل الاشتقاق من أجل $x\neq 0$. لندرس قابلية الاشتقاق عند $x_0=0$. لدينا $f(0)=0$

لدينا $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{e^{\frac{1}{h}}}{h}=\lim\limits_{t\to-\infty}te^{t}=0\Rightarrow f_g'(0)=0$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{h\ln h-h}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}(\ln h-1)=-\infty$

ومنه الدّالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 على اليمين إذا لا تقبل الاشتقاق عند 0 وبالتالي لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حل ت3: حساب المشتقة من الرتبة n للدالة f في كلّ حالة من الحالات التالية:

1) لدينا $f(x)=\dfrac{1}{1-x^{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$ و يكون $f^{(n)}(x)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^{n}n!}{(1+x)^{n+1}}\right)=\dfrac{n!}{2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^{n}}{(1+x)^{n+1}}\right)$

2) $f(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ و يكون $f^{(n)}(x)=\dfrac{2^{n}}{2}\sin(2x+n\dfrac{\pi}{2})=2^{n-1}\sin(2x+n\dfrac{\pi}{2})$

3) $f(x)=e^{x}\cos x$ لدينا $\cos x=\dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

الدالة $x\mapsto e^{ix}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $(e^{ix})'=\cos'(x)+i\sin'(x)=-\sin(x)+i\cos'(x)=ie^{ix}$

ولدينا $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x})$ ويكون $f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2}\left[(1+i)^{n}e^{(1+i)x}+(1-i)^{n}e^{(1-i)x}\right]$ ومنه

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2^{n}}e^{\frac{n\pi}{4}i}e^{(1+i)x}+\sqrt{2^{n}}e^{-\frac{n\pi}{4}i}e^{(1-i)x}\right]=\frac{\sqrt{2^{n}}}{2}e^{x}\left[e^{(x+\frac{n\pi}{4})i}+e^{-(x+\frac{n\pi}{4})i}\right]=\sqrt{2^{n}}\cos(x+n\frac{\pi}{4})e^{x}$$

حل ت4: دراسة إمكانية تطبيق نظرية رول على المجالات و الدوال التالية

1) الدّالة f مستمرة على المجال $[-1,1]$ و $f(-1)=f(1)=1$ و لدينا f لا تقبل الاشتقاق على المجال $]-1,1[$ لأنها غير قابلة للاشتقاق من أجل $x_0=0$ لأنّ: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=\pm\infty$

وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية رول.

2) $$g:\begin{cases}[0,\frac{1}{\pi}]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}\end{cases}$$

الدّالة g مستمرة على المجال $]0,\frac{1}{\pi}[$ و لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*, 0\le |x^3\sin\frac{1}{x}|\le|x^3|$ و بتطبيق نظرية الحصر نستنتج أنّ g مستمرة عند $x_0=0$ إذا مستمرة على $[0,\frac{1}{\pi}]$ و لدينا كذلك الدّالة g تقبل للاشتقاق على المجال $]0,\frac{1}{\pi}[$ و $g(0)=g(\frac{1}{\pi})=0$ وبالتّالي يمكن تطبيق نظرية رول.

حل ت5:

1. أثبات من أجل كلّ x من $[0,\frac{\pi}{2}]$ يكون: $0\le\sin x\le x\ldots(1)$. من أجل $x=0$ واضح أن (1) محققة.

من أجل $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$ الدالة $f:t\mapsto\sin t$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0,x]$ ولدينا $f'(t)=\cos t$ بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية $\exists c\in]0,x[; f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)\Rightarrow\exists c\in]0,x[; 0\le\sin x=\cos(c)x$ وبما أنّ $\cos c\le 1$ نجد $0\le\sin x\le x$

2. استنتاج أنّ: $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]:\ -x^2\le\cos x-1\le 0$

الدالة $g:t\mapsto\cos t$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0,x]$ ولدينا $g'(t)=-\sin t$ بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية

$$\exists c\in]0,x[; g(x)-g(0)=g'(c)(x-0)\Rightarrow\exists c\in]0,x[; \cos x-1=-\sin c\times x$$

و يكون $x\times\inf\limits_{t\in[0,x]}(-\sin t)\le\cos x-1\le x\times\sup\limits_{t\in[0,x]}(-\sin t)$ وحسب السؤال السابق ($-x\le-\sin x\le 0$) نستنتج أنّ:

$$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]:\ -x^2\le\cos x-1\le 0$$

حل ت6: باستعمال قاعدة لوبيتال ، حساب النهايات التالية:

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)\sin(x-1)}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)\sin(x-1)+(x^2-x)\cos(x-1)}{3x^2-3}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sin(x-1)+(2x-1)\cos(x-1)+(2x-1)\cos(x-1)-(x^2-x)\sin(x-1)}{6x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x}=-2$$

4) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}-\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin x}=0$$

حل ت9:

1) الدالة f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $(\frac{1+x}{x}\in[-1,1])\wedge(x\neq 0)$. لدينا $\frac{1+x}{x}=1+\frac{1}{x}$

ومنه لدينا: $x\le-\frac{1}{2}\Leftrightarrow(-2\le\frac{1}{x}\le 0)\wedge(x\neq 0)\Leftrightarrow(-1\le 1+\frac{1}{x}\le 1)\wedge(x\neq 0)$ إذا $D_f=]-\infty,-\frac{1}{2}]$.

3) الدالة f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\frac{x-1}{x+3}\in\mathbb{R}$ أي $x\neq-3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$.

4) الدالة f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 1\wedge(x\neq 0)$ أي $x+\frac{1}{x}\geq 2\wedge(x\neq 0)$.

إذا كان: $x<0$ فإنّ $(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2\wedge(x\neq 0)$ ومنه $D_f^1=\mathbb{R}_-^*$

إذا كان: $x>0$ فإنّ $(x-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1\leq 0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2\wedge(x\neq 0)$ ومنه $D_f^2=\phi$

ومنه $D_f=D_f^1\cup D_f^2=\mathbb{R}_-^*$

حل ت10:

لدينا $\arccos:[-1,+1]\to[0,\pi]$

1) نضع $\arccos(x)=a,\ \arccos(-x)=b$ و نبرهن أنّ: $a+b=\pi$.

لدينا $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos a\cos b-\sqrt{1-\cos^2 a}\sqrt{1-\cos^2 b}$ وبما أنّ: $\forall x\in[-1,1],\ \cos(\arccos x)=x$

فإنّ: $\cos(a+b)=-x^2-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}=-x^2-(1-x^2)=-1$ و $(a+b)\in[0,\pi]$ إذا: $a+b=\pi$.

3) نضع $\arctan(\operatorname{sh}x)=a,\ \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)=b$ و نبرهن أنّ: $a=b$.

$$\tan(a)=\tan(\arctan(\operatorname{sh}x))=\operatorname{sh}x$$

$$\tan(b)=\frac{\sin(b)}{\cos(b)}=\frac{\sqrt{1-\cos^2(b)}}{\cos(b)}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}}{\frac{1}{\operatorname{ch}x}}=\operatorname{ch}x\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2x-1}{\operatorname{ch}^2x}}=\operatorname{ch}x\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}}=\operatorname{sh}x$$

إذا $\tan(a)=\tan(b)$ وبما أنّ $a,b\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ $a=b$ وبالتالي $\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan(\operatorname{sh}x)=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$

4) نضع $y=\operatorname{argsh}x$ و نثبت أنّ $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

لدينا $\operatorname{sh}y=x...(1)$ من جهة أخرى $\operatorname{ch}^2y-\operatorname{sh}^2y=1$ ومنه $\operatorname{ch}y=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2y}=\sqrt{1+x^2}...(2)$ و بما أنّ $\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}y=e^y$

وبجمع (1) و (2) نجد $e^y=x+\sqrt{1+x^2}$ ومنه $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

حل ت11:

لدينا $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1. لنثبت أنّ: $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(-x) = -\arctan x$. نضع $\arctan(-x) = a$, $\arctan x = b$ و نبرهن أنّ: $a+b=0$

لدينا $\arctan(-x) = a \Leftrightarrow -x = \tan(a), \arctan x = b \Leftrightarrow x = \tan(b)$ ومنه $\tan(a)+\tan(b)=0$ من جهة أخرى لدينا

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} = 0 \Rightarrow a+b = \arctan(0) = 0$ ومنه يكون $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(-x) = -\arctan x$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan'\dfrac{1}{x} = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\dfrac{1}{1+x^2} = -\arctan'(x)$

3. ممّا سبق لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan'\dfrac{1}{x} + \arctan'(x) = 0$ و هذا يعني أنّ $x \mapsto \arctan\dfrac{1}{x} + \arctan x$ دالة ثابتة في $\mathbb{R}^*$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan\dfrac{1}{x} + \arctan x = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1) + = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

كذلك $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \arctan\dfrac{1}{x} + \arctan x = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -2\arctan(1) = -\dfrac{2\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$

ومنه $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan\dfrac{1}{x} + \arctan x = \mathrm{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}$