

Partie II

méthode des différences finis

VS

Méthode des volumes finis

Appellation des méthode DF, EF et VF

Passage de la méthode DF à la méthode de VF

Différence entre les méthodes

Équation de transport

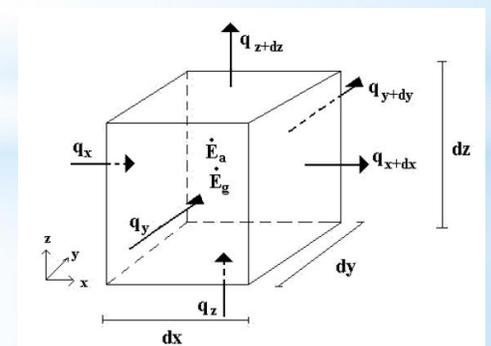
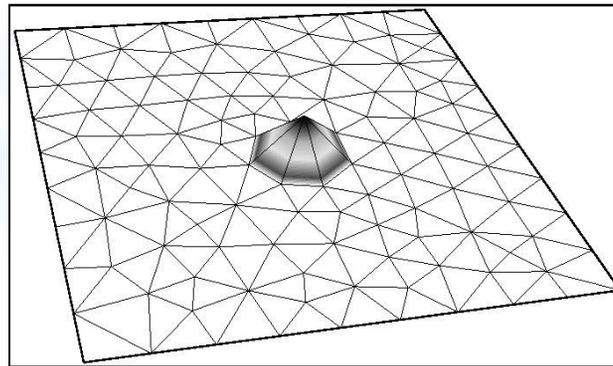
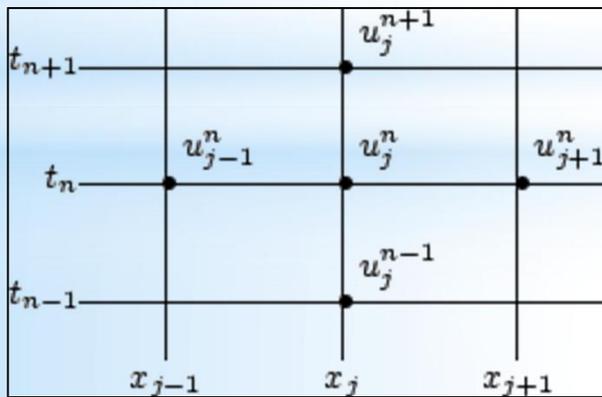
Technique de la méthode de VF

Application de la MVF & MDF sur les Problèmes de diffusion

Appellation des méthode DF , EF et VF

parce que la solution sera dans un nombre de points bien déterminé

		parce que la solution sera dans un nombre de points bien déterminé
Méthode de	Différences	Finis
Méthode de	Éléments	Finis
Méthode de	Volumes	Finis

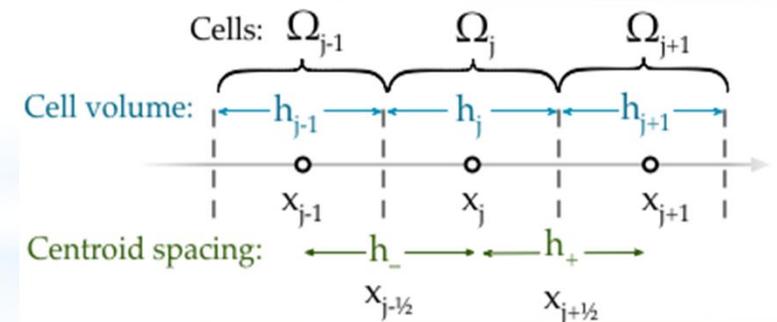
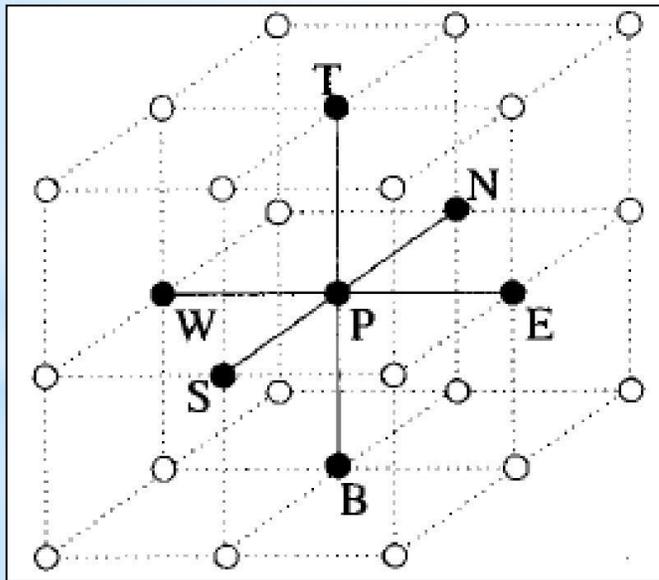


DF

EF

VF

Appellation des méthode DF , EF et VF

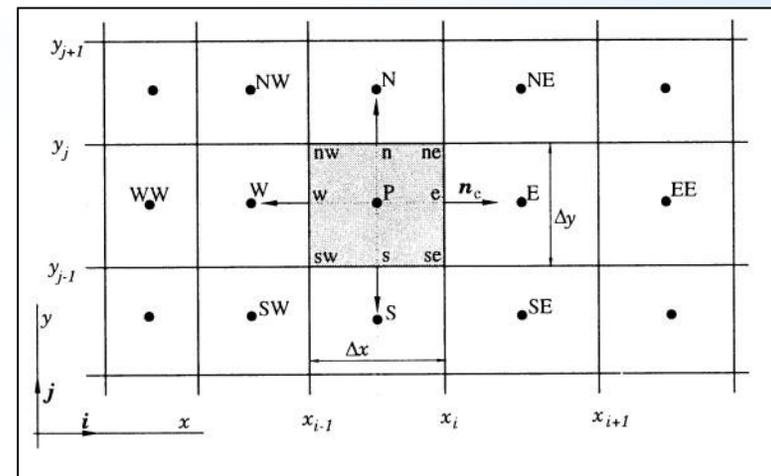
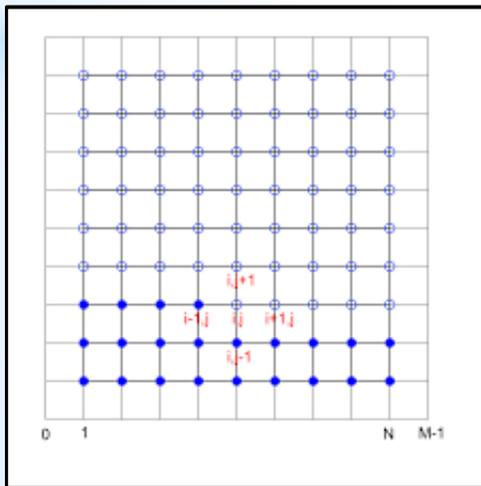


DF en 3D

VF en 1D

Passage de la méthode DF à la méthode de VF

méthode DF	méthode de VF
Mathématique	Physique
developpement de Taylor	Intégration de l'équation de transport sur le volume de contrôle
Non adapté pour le maillage non structuré	adapté pour le maillage non structuré
La solution dans les nouds de maillage	La solution dans les centres de maillage



Différence entre les méthodes DF , EF et VF

CFD : Principales méthodes

Différences finies

Approximation des dérivées intervenantes dans les équations à l'aide de développement en série de Taylor

Elements finis

Détermination d'un champ local à attribue à chaque sous domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème (bilan global).

Volumes finis

Bilan local des flux dans un petit volume de contrôle

Différences finies

Le principe de la méthode se découle directement de la définition de dérivée :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \quad (1)$$

Série de Taylor pour une fonction continue $\phi(x)$ aux alentours de x_i :

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \phi(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \\ & \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H \end{aligned} \quad (2)$$

où H représente les termes d'ordre supérieurs *Higher order terms*

Différences finies

En remplaçant x par x_{i+1} ou x_{i-1} dans (2) on obtient :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + H \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + H \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i &= \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i - \\ &\quad \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + H \end{aligned} \quad (5)$$

Différences finies

Exemple d'approximation

$$\text{Forward Difference (FD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (6)$$

$$\text{Backward Difference (BD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (7)$$

$$\text{Central Difference (CD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (8)$$

Différences finies

Exemple d'approximation

$$\text{Forward Difference (FD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (6)$$

$$\text{Backward Difference (BD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (7)$$

$$\text{Central Difference (CD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (8)$$

L'erreur de troncature

- $\mathcal{O}(\Delta x)$ pour *FD* et *BD*
- $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ pour *CD*

Introduction à la méthode des volumes finis

En quoi consiste la méthode ?

- Construire un maillage
- Déterminer les valeurs de ϕ en chaque point (ou cellule) du maillage
 - Intégration des équations différentielles par méthode numérique pour chaque noeud
 - Résolution du système d'équations algébriques résultant par méthode itérative

Équation de transport

Introduction à la méthode des volumes finis

- Equation de transport :

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \mathbf{div} (\rho \vec{V} \phi) = \mathbf{div} [\Gamma_{\phi} (\mathbf{grad} \phi)] + S_{\phi}$$

- $\phi = 1$: Equation de continuité
 - $\phi = u, v$ ou w : Equations de quantité de mouvement
 - $\phi = T$: Equation pour la température
 - $\phi = k, \varepsilon, \omega$ ou μ_t : Equations de turbulence
-
- $(\rho \vec{V} \phi)$: Terme de convection
 - $[\Gamma_{\phi} (\mathbf{grad} \phi)]$: Terme de diffusion
 - S_{ϕ} : Terme source

Introduction à la méthode des volumes finis

Termes sources :

- 1 Gradient de pression pour les équations de quantité de mouvement
- 2 Forces centrifuges et de Coriolis pour les équations de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques
- 3 Dérivée substantielle de la pression pour l'équation de l'énergie
- 4 Fonction de dissipation de l'énergie mécanique en chaleur pour l'équation de l'énergie

2.1.5 Forme conservative et non conservative des équations modèles

L'équation (2.9) qui est la forme conservative générale des équations modèles peut être explicitée ainsi :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{u} \text{grad } \Phi + \Phi \text{div}(\rho \bar{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S. \quad (2.11)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{u} \text{grad } \Phi \right) + \Phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) \right) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S, \quad (2.12)$$

où le terme ci-dessous représente la dérivée particulière :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{u} \text{grad } \Phi \right) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.13)$$

et le terme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0, \quad (2.14)$$

représente l'équation de continuité.

Finalement l'équation (2.12) s'écrit sous la forme non conservative ainsi :

$$\rho \frac{d\Phi}{dt} = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S \quad (2.15)$$

Remarque: Par la méthode des volumes finis on part uniquement de la forme conservative des équations modèles.

A.4 Divergence d'un vecteur

Soit le vecteur \vec{V} de composantes (V_x, V_y, V_z) . La divergence de ce vecteur est définie par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

A.5 Vecteur gradient

Soit $P = P(x, y, z)$ une fonction scalaire. Le gradient de P est défini par le vecteur :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$$

On définit l'opérateur du 1^{er} ordre (Hamiltonien ou encore Nabla) par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

donc on peut écrire :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} P = \vec{\nabla} P$$

μ – coefficient de viscosité de cisaillement pur (viscosité dynamique) ;

γ – coefficient de viscosité d'expansion volumique ;

λ – conductivité thermique (coefficient de diffusion thermique) ;

c_p – chaleur massique à pression constante ;

D_j – coefficient de diffusion massique (loi de Fick) ;

$\bar{\tau}$ – tenseur des contraintes de viscosité ;

\vec{g} – gravité ;

β – coefficient de dilatation thermique ;

h – l'enthalpie massique ;

m_j – fraction massique de l'espèce j .

Continuity equation

- Summing all terms in the previous slide and dividing by the volume $\delta x \delta y \delta z$ results in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- In vector notation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Change in density

Net flow of mass across boundaries
Convective term

- For incompressible fluids $\partial \rho / \partial t = 0$, and the equation becomes:
 $\text{div} \mathbf{u} = 0$.
- Alternative ways to write this: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ and $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

Navier-Stokes equation for incompressible flow of Newtonian (constant viscosity) fluid

- derived from conservation of momentum



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$



Pressure term:
Fluid flows in the
direction of
largest change
in pressure

The area A is constant for a plane wall \rightarrow the one dimensional transient heat conduction equation in a plane wall is

Variable conductivity:
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-13)$$

Constant conductivity:
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (2-14)$$

The one-dimensional conduction equation may be reduces to the following forms under special conditions

{	1) Steady-state:	$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0 \quad (2-15)$
	2) Transient, no heat generation:	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-16)$
	3) Steady-state, no heat generation:	$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2-17)$

Technique de la méthode de volume finis

Pourquoi utiliser l'approche "Volumes Finis" ?

Différences finies

- Bien connue
- Mise en œuvre simple pour une géométrie simple
- Mise en œuvre difficile pour une géométrie complexe
- Pas toujours conservative
- Utilisation dans des codes de "recherche"

Eléments finis

- Approche très "mathématique"
- S'adapte à une géométrie quelconque
- Difficultés pour résoudre les termes non-linéaires
- Très utilisée dans le domaine de Mécanique des Solides et pour des problèmes multi-physique (Comsol, ex FemLab).

Pourquoi utiliser l'approche "Volumes Finis" ?

Volumes finis

- Approche très "physique" : bilan des flux
- S'adapte à une géométrie quelconque
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non-linéaires hyperboliques
- Conservative (par sa formulation)
- La base de tout les codes généralistes en Mécanique des Fluides : Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco), Fire (AVL), OpenFoam (Libre)...

3.5 Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, [50]).

Principe. La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des

équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Technique de la méthode de volume finis

Equation à résoudre

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] + S_\phi$$

Introduction à la méthode des volumes finis

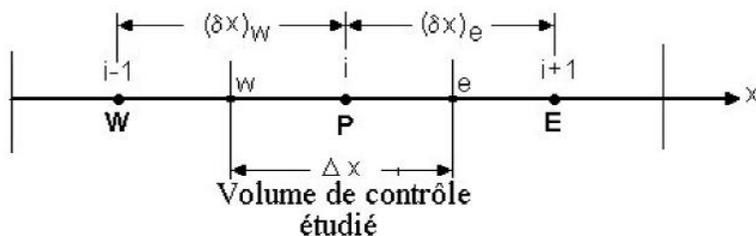
Technique de la méthode de volume finis

Equation à résoudre

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] + S_\phi$$

Intégration sur un volume Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_\Omega \text{div}(\rho\vec{V}\phi) \cdot d\Omega = \int_\Omega \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] \cdot d\Omega + \int_\Omega S_\phi \cdot d\Omega$$



Technique de la méthode de volume finis

Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, d\Omega = \int_A \vec{n} \cdot \vec{a} \, dA$$

- A , surface qui entoure le volume de contrôle Ω et \vec{n} , vecteur normal à la surface dA
- $\vec{n} \cdot \vec{a}$: composante du vecteur \vec{a} suivant la direction du vecteur \vec{n} qui est normal à la surface dA

Introduction à la méthode des volumes finis

Technique de la méthode de volume finis

Equation à résoudre

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] + S_\phi$$

Intégration sur un volume Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_\Omega \text{div}(\rho\vec{V}\phi) \cdot d\Omega = \int_\Omega \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] \cdot d\Omega + \int_\Omega S_\phi \cdot d\Omega$$

↓

Application du théorème de la divergence

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (\rho\phi) \cdot d\Omega + \int_A \vec{n} \cdot (\rho\vec{V}\phi) dA = \int_A \vec{n} \cdot [\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] dA + \int_\Omega S_\phi d\Omega$$

équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire Φ , valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$\oint_A (\rho \Phi \vec{v}) d\vec{A} = \oint_A (\Gamma_\Phi \text{grad } \Phi) d\vec{A} + \int_{VC} S_\Phi dV, \quad (3.7)$$

où

ρ - la densité du fluide ;

\vec{v} - le vecteur vitesse ($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$) ;

\vec{A} - le vecteur l'aire de la surface ;

Γ_Φ - le coefficient de diffusion de la grandeur Φ ;

$\text{grad } \Phi$ - le gradient de Φ ($\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j}$ en 2D) ;

S_Φ - le terme source (la source de Φ par unité de volume).

L'équation (3.7) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_f^{N_{\text{faces}}} \rho_f v_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N_{\text{faces}}} \Gamma_\Phi (\nabla \Phi)_n A_f + S_\Phi V, \quad (3.8)$$

où : N_{faces} - le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle ;
 Φ_f - la valeur de Φ transférée par convection à travers l'interface f ;
 v_f - le flux de masse à travers l'interface f ;
 A_f - l'aire de l'interface f ($|\vec{A}| = |A_x\vec{i} + A_y\vec{j}|$ en 2D) ;
 $(\vec{\nabla}\Phi)_n$ - la valeur de $\vec{\nabla}\Phi$ normal (perpendiculaire) à l'interface f ;
 V - le volume du volume de contrôle.

Les différentes étapes de la mise en oeuvre sont :

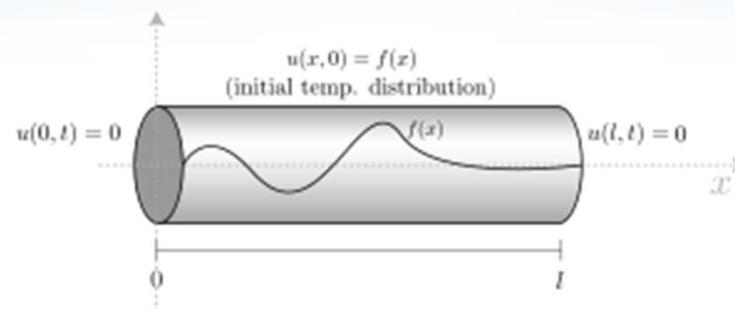
- Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les noeuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC) ;
- Les intégrales sur un volume de contrôle en un noeud donné sont évaluées en approchant la variation de Φ par des profils ou des lois d'interpolation entre les noeuds voisins du point considéré ;
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de Φ aux noeuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

Exemple

3.5.1 Exemple : conduction thermique 1D stationnaire

Supposons l'équation de conduction thermique stationnaire unidimensionnelle :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0. \quad (3.7)$$



Les étapes qui doivent être parcourues, pour obtenir le système d'équations algébriques, sont les suivantes :

1. *Discrétisation du domaine de calcul*

La façon de discrétisation est présentée à la figure 3.2 (voir aussi l'annexe C).

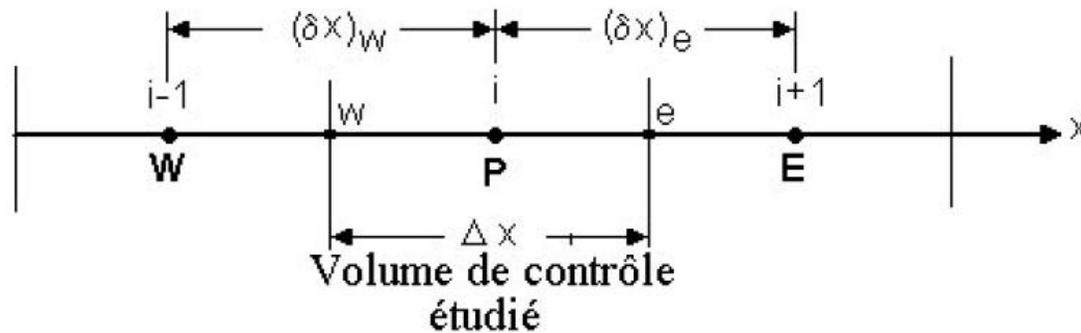


Fig. 3.2 Maillage unidimensionnel.

où :

P – Noeud considéré ;

W – Noeud “West” ;

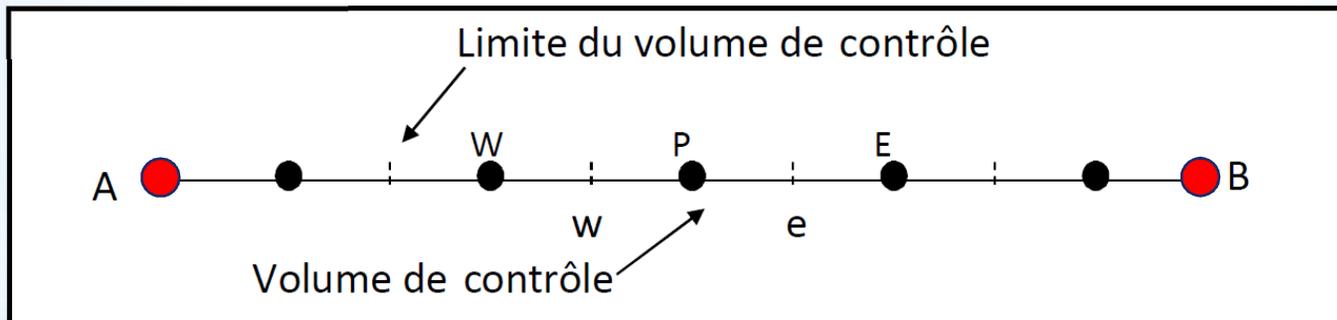
E – Noeud “East” ;

w – interface “West” du volume de contrôle (VC) ;

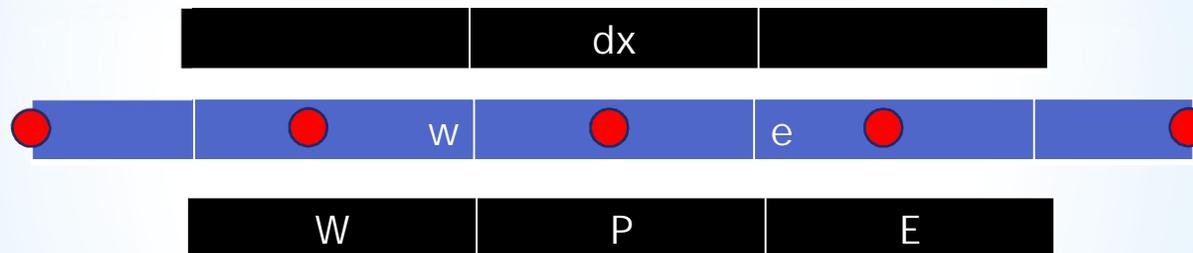
e – interface “East” du VC ;

Δx – largeur du VC étudié.

Pratique A



Pratique B



2. Intégration de l'équation de conduction 1D sur le VC en P.

En intégrant l'équation (3.7) sur le volume de contrôle (fig. 3.2) on obtient successivement :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0; \quad (3.8)$$

$$\left[\lambda \frac{dT}{dx} \right]_w^e + \int_w^e S dx = 0; \quad (3.9)$$

$$\lambda_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \lambda_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S}[x]_w^e = 0, \quad (3.10)$$

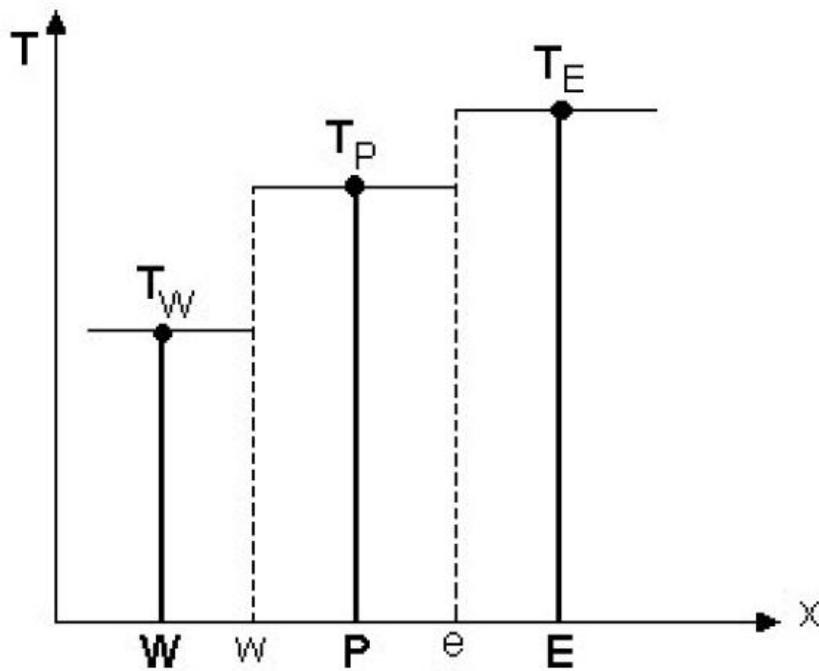
où \bar{S} est une valeur moyenne du terme source S sur le volume de contrôle. En tenant compte de la loi de Fourier ($\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$), \vec{q} étant la densité du flux thermique, l'équation (3.10) peut être écrite ainsi :

$$-q_e + q_w + \bar{S}\Delta x = 0, \quad (3.11)$$

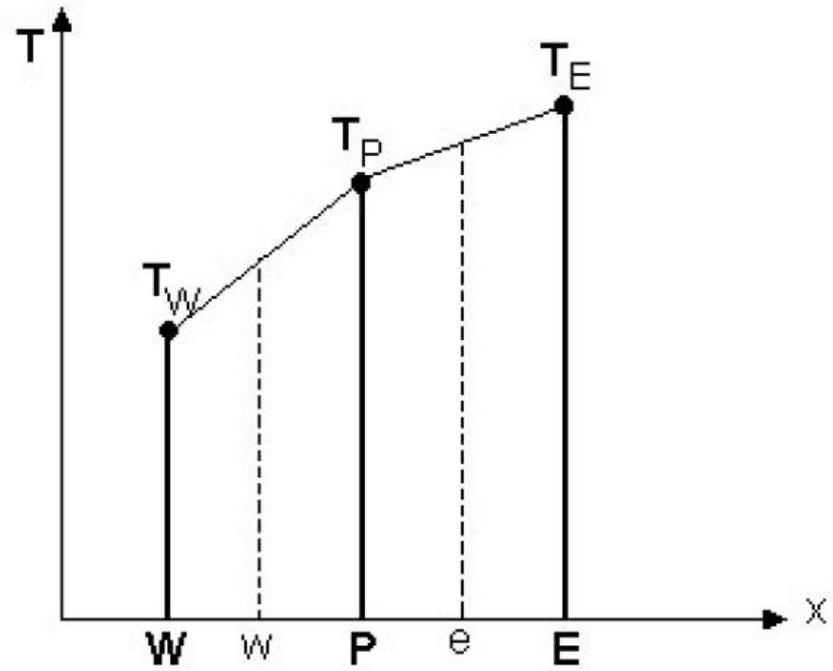
où q_e et q_w sont les densités du flux thermique aux interfaces du volume de contrôle.

3. *Choix d'un profil de température (ou d'une formule d'interpolation) entre les noeuds voisins de P.*

Il y a deux types de profils qu'on peut envisager, l'un étant le profil constant (fig. 3.3 a) et l'autre le profil linéaire (fig.3.3 b).



a)



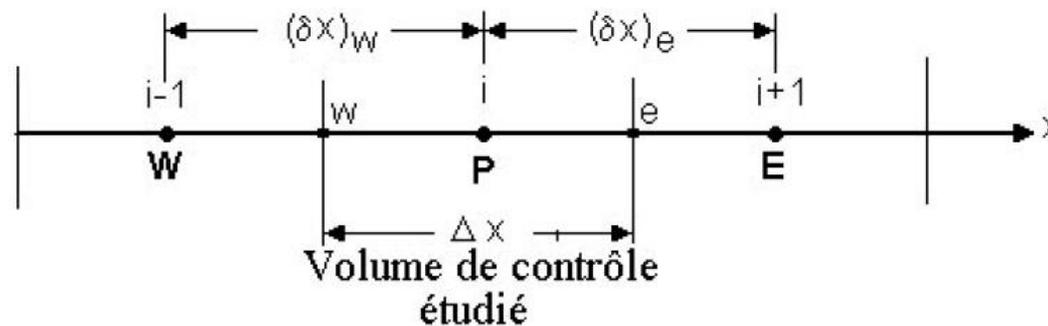
b)

Fig. 3.3 *Choix du profil de température.*
a) *Profil constant.* b) *Profil linéaire.*

Dans le cas d'un profil constant de température (Fig. 3.3 a), sur le volume de contrôle, on a une discontinuité de T aux interfaces w et e du volume de contrôle. De plus, la dérivée dT/dx n'est pas définie et donc ce profil de température ne convient pas.

Dans le cas d'un profil linéaire de température (Fig. 3.3 b), entre les noeuds du maillage, la discontinuité de T n'existe plus et les dérivées aux interfaces sont définies :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}; \quad (3.12)$$



$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}. \quad (3.13)$$

4. Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique

L'équation (3.11) s'écrit ainsi :

$$\frac{\lambda_e(T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w(T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S}\Delta x = 0, \quad (3.14)$$

où \bar{S} est la valeur moyenne de S sur le volume de contrôle.

Finalement, après le regroupement des termes, l'équation algébrique s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \quad (3.15)$$

avec

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} \quad a_P = a_E + a_W \quad b = \bar{S}\Delta x. \quad (3.16)$$

Remarques

1. La forme générale des équations discrétisées est la suivante :

$$a_P T_P = \sum_{vs} a_{vs} T_{vs} + b \quad vs = \text{voisin} \quad . \quad (3.17)$$

2. La dérivée dT / dx aurait pu être évaluée avec d'autres fonctions d'interpolation ;
3. Toutes les quantités ne doivent pas forcément être évaluées avec les mêmes fonctions d'interpolation ;
4. Pour une même variable, les mêmes fonctions d'interpolation ne doivent pas être forcément utilisées pour tous les termes dans l'équation modèle.

Principes à respecter

Même sur un maillage grossier, il faut que :

1. les variations des quantités Φ aient un comportement physique réaliste ;
2. le bilan global soit conservatif.

Traitement du terme source S

Si le terme source S varie de façon non linéaire, $S = S(T)$, on écrit :

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p, \quad (3.18)$$

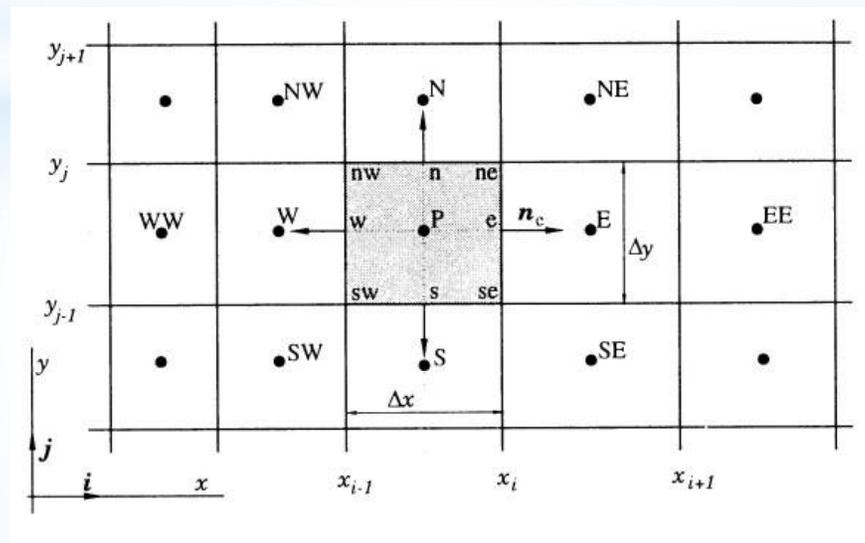
où S_c est un terme constant (indépendant de température). Il faut linéariser en T pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

3.5.2 Les règles de base (règles de Patankar)

Les suivantes règles ont été énoncées par Patankar, [50]

Règle N° 1 : *Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle.*

Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.



Règle N° 2 : *Tous les coefficients a_P et a_{vs} doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.*

On peut justifier cette règle par un contre exemple. Supposons que dans l'équation (3.15) on ait $a_P > 0$, $a_E > 0$ et $a_W < 0$. Alors, si T_W augmente il faut que T_P baisse, donc un comportement physique non réaliste.

$$a_P T_P = \sum_{vs} a_{vs} T_{vs} + b \quad vs = \text{voisin} \quad . \quad (3.17)$$

Règle N° 3 : *Pente négative dans le terme source linéarisé.*

Lors de la linéarisation du terme source $\bar{S} = S_c + S_P T_P$ la pente S_P doit être ≤ 0 car sinon on peut avoir $a_P < 0$ avec des $a_{vs} > 0$ (contraire à la règle n° 2).

Règle N° 4 : *Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi :*

$$a_P = \sum a_{vs} \quad \text{si } S = 0 ;$$
$$a_P \geq \sum a_{vs} \quad \text{si } S \neq 0.$$
(3.19)

Démonstration

Si $S = 0$, l'équation modèle est une équation différentielle ne contenant que des dérivées de T ; T et $T + C$ sont des solutions de l'équation différentielle du problème continu et discontinu. L'équation discrétisée pour les deux solutions s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = \sum a_{vs} T_{vs} + b ;$$
(3.20)

$$a_P (T_P + C) = \sum a_{vs} (T_{vs} + C) + b.$$
(3.21)

En soustrayant l'équation (3.20) de l'équation (3.21) on obtient :

$$a_P = \sum a_{vs} .$$
(3.22)

There are some thinks else

Les équations de diffusion

- Équation de conduction thermique
- Équation de diffusion massique
- Équation de diffusion du quantité de mouvement

Heat Diffusion Equation (3)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Special case 1: no generation $\dot{q}=0$

Special case 2: constant thermal conductivity $k=\text{constant}$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = k \nabla^2 T + \dot{q},$$

where $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is the Laplacian operator

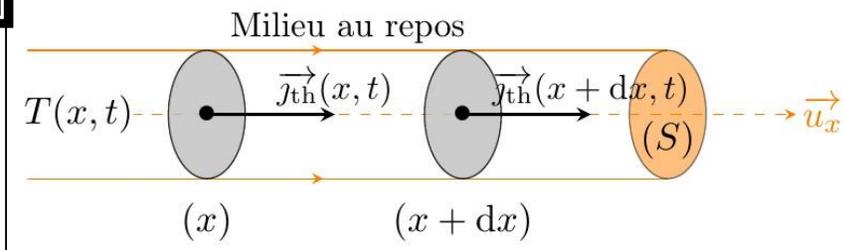
Special case 3: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ and $\dot{q}=0$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ The famous Laplace's equation}$$



Docsity.com

Équation de conduction thermique



Diffusion

Mass Transfer in Fluid Systems

Third Edition

Third Edition

E. L. Cussler

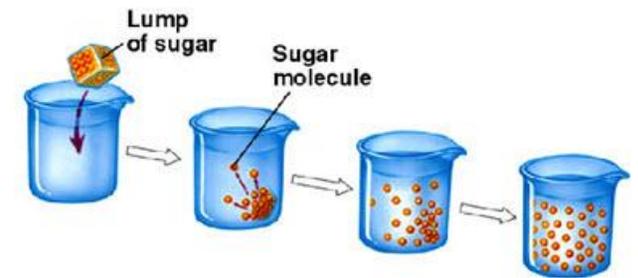
CAMBRIDGE

CAMBRIDGE www.cambridge.org/9780521871211



Équation de diffusion massique

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C,$$



Visualization of vortical structure in Taylor-Couette flow

Jin LEE, Razieh JALALABADI & Hyung Jin SUNG
Flow Control Lab.

[KAIST](http://www.kaist.ac.kr)

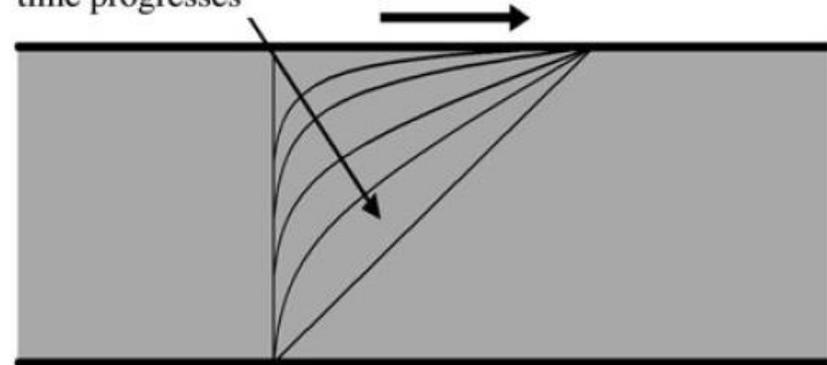
Équation de diffusion du quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \underbrace{\nabla^2 u}_{\text{Laplacian}} = k \underbrace{\nabla \cdot \nabla u}_{\text{div}(\nabla u)} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

ASEN 6037: Turbulent Flows
Experimental Exploration of Turbulent
Taylor-Couette Flow

Bryce Schaefer
Spring 2014

Velocity profile as
time progresses



3. Application de la MVF sur les Problèmes de diffusion

Heat Diffusion Equation (3)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Special case 1: no generation $\dot{q}=0$

Special case 2: constant thermal conductivity $k=\text{constant}$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = k \nabla^2 T + \dot{q},$$

where $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is the Laplacian operator

Special case 3: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ and $\dot{q}=0$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ The famous Laplace's equation}$$



Cas d'application:

Équation de Conduction
Thermique

Application à l'équation de diffusion

En régime permanent

$$\operatorname{div} \left(\Gamma_{\phi} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi \right) + S_{\phi} = 0$$

↓

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\Gamma_{\phi} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi \right) d\Omega + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega = \int_A \Gamma_{\phi} \cdot \vec{n} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi dA + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega = 0$$

Application à l'équation de diffusion

En régime permanent

$$\operatorname{div} (\Gamma_\phi \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi) + S_\phi = 0$$

↓

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (\Gamma_\phi \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi) d\Omega + \int_{\Omega} S_\phi d\Omega = \int_A \Gamma_\phi \cdot \vec{n} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi dA + \int_{\Omega} S_\phi d\Omega = 0$$

Dans le cas 1-D

$$\operatorname{div} \cdot \Gamma_\phi \vec{\operatorname{grad}} \phi \equiv \frac{d}{dx} \left(\Gamma_\phi \frac{d\phi}{dx} \right)$$

→ Equation de conduction avec $\phi \equiv T$ et $\Gamma_\phi \equiv k$

- k : coefficient de conductivité thermique

Exemple 1

On considère une barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur $L = 0.5 \text{ m}$. Les extrémités, A et B de la barre sont maintenues aux températures constantes de 100°C et de 500°C respectivement.

Calculer la distribution de la température le long de la barre. On connaît la conductivité thermique $\lambda = 1000 \text{ W/mK}$.

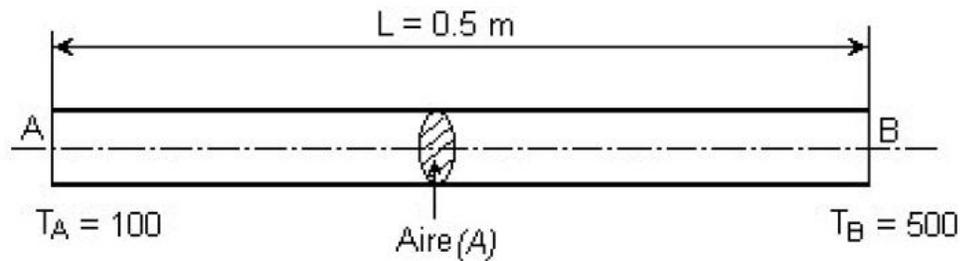


Fig. 4.7 Barre cylindrique

Solution

La distribution de la température est gouvernée par l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (4.46)$$

On considère six points le long de la barre avec $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ (fig. 4.8).

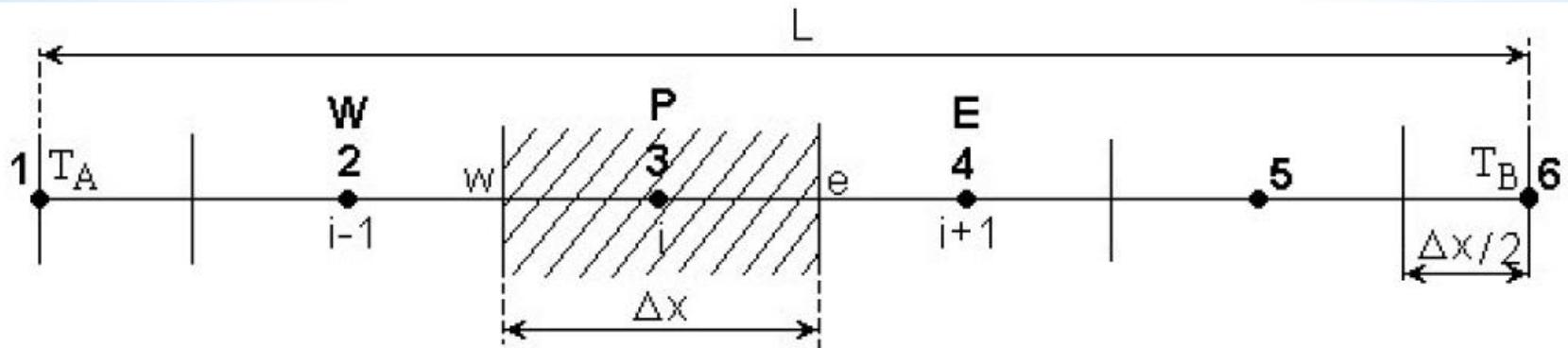


Fig. 4.8 Maillage 1D

Si l'on considère que $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ et $A_e = A_w = A$ pour les noeuds intérieurs (3 et 4) l'équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E, \quad (4.47)$$

où $a_P = a_E + a_W$ $a_W = a_E = \frac{\lambda}{\Delta x}$.

Pour les noeuds 2 et 5 on utilise la même équation que pour un noeud intérieur mais on tient compte que pour les noeuds voisins 1 et 6 les températures sont connues, T_A et T_B respectivement.

Pour le noeud 2 l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_A. \quad (4.48)$$

Pour le noeud 5 l'équation discrétisée s'écrit :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_B. \quad (4.49)$$

Les équations à résoudre sont les suivantes (le nombre d'équations est égal à 4) :

$$a_i T_i = a_{i-1} T_{i-1} + a_{i+1} T_{i+1} \quad i = 2 \div 5. \quad (4.50)$$

En tenant compte que

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{1000}{0.1} = 10000 \quad a_P = a_W + a_E = 10000 + 10000 = 20000,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$2T_2 = T_3 + T_A$$

$$2T_3 = T_2 + T_4$$

$$2T_4 = T_3 + T_5$$

$$2T_5 = T_4 + T_B$$

(4.51)

En regroupant les termes, on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A \\ 0 \\ 0 \\ T_B \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations ci-dessus comportant un nombre réduit d'équations peut être résolu, par exemple, en utilisant le logiciel MATHCAD (version MATHCAD 7 Professional, MathSoft Inc., 1997). La solution est :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 260 \\ 340 \\ 420 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

La solution analytique de l'équation (4.46) est une distribution linéaire entre les valeurs de la température des points A et B , c'est-à-dire :

$$T(x) = \frac{T_B - T_A}{L} x + T_A = 800 \cdot x + T_A \quad . \quad (4.53)$$

À la figure 4.9 sont représentées les solutions analytique et numérique qui correspondent.

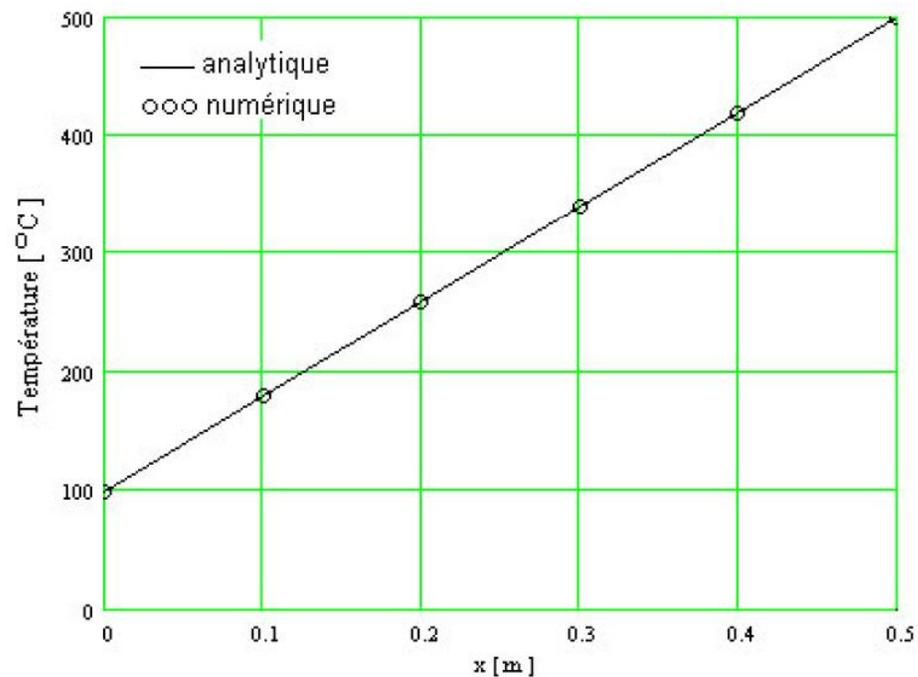


Fig. 4.9 Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique

Exemple 2

On considère une plaque très longue d'épaisseur $L = 20$ mm, ayant la conductivité thermique constante $\lambda = 0.5$ W/m/K et une source de chaleur uniforme, $S = 1000$ kW/m³. Les faces de la plaque se trouvent à la température constante de 100 °C et 200 °C respectivement.

En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions “y” et “z” soient très grandes et donc le gradient de la température est significatif dans la direction “x” seulement, calculer la distribution de la température et comparer les résultats numériques avec la solution analytique.

Solution

L'équation différentielle qui gouverne la distribution de la température est la suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0. \quad (4.54)$$

Le domaine d'analyse est divisé en six noeuds, comme dans l'exemple précédent, avec $\Delta x = 0.004 \text{ m}$. L'aire $A = 1$ est considérée dans le plan $y - z$.

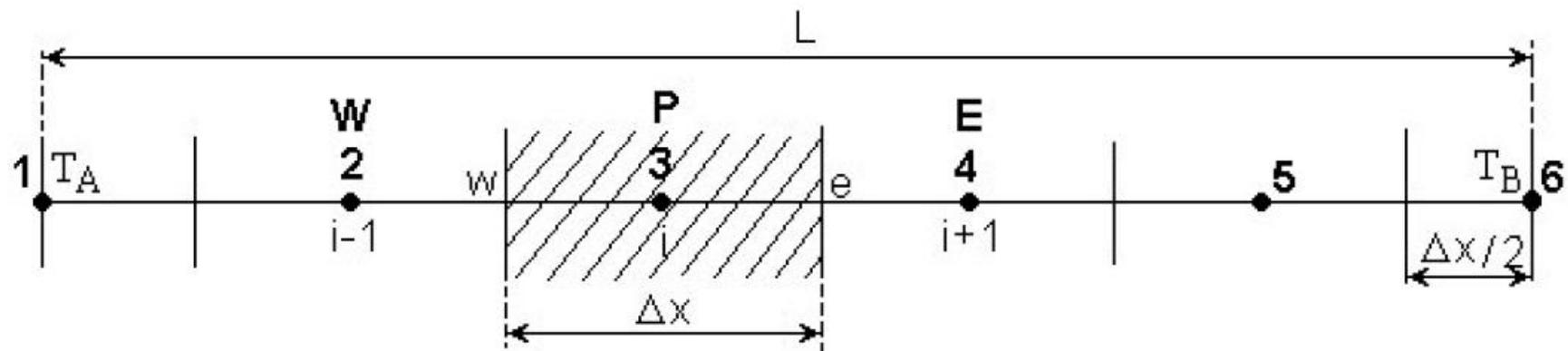


Fig. 4.10 Maillage 1D

L'intégration formelle, sur un volume de contrôle (VC), de l'équation (4.54) donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{VC} S dV = 0. \quad (4.55)$$

La première intégrale est évaluée comme dans l'exemple précédent. La deuxième intégrale, qui contient le terme source, est évaluée en considérant une valeur moyenne de S sur le volume de contrôle. L'équation (4.55) peut être écrite ainsi :

$$\left[\left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \bar{S} \Delta V = 0 ; \quad (4.56)$$

$$\left[\lambda_e A \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \lambda_w A \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) \right] + \bar{S} A \Delta x = 0 . \quad (4.57)$$

En regroupant les termes on obtient la forme générale de l'équation discrétisée, valable pour les noeuds 3 et 4 ainsi :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b, \quad (4.58)$$

$$\text{où : } a_P = a_W + a_E \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x} \quad b = \bar{S} \Delta x.$$

Pour le noeud 2 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin “W” corresponde au noeud “1” où la température est connue $T_W \equiv T_1 \equiv T_A$ et passe comme un terme source supplémentaire. L'équation discrétisée est donc :

$$a_P T_P = a_E T_E + b + a_W T_A. \quad (4.59)$$

Pour le noeud 5 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin “E” correspond au noeud “6” où la température est connue $T_E \equiv T_6 \equiv T_B$ et passe comme un terme source supplémentaire. L'équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + b + a_E T_B. \quad (4.60)$$

En tenant compte que $\lambda_w = \lambda_e = \lambda$ et

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{0.5}{0.004} = 125 \quad a_P = a_W + a_E = 125 + 125 = 250,$$

$$b = \bar{S} \Delta x = 1000000 \cdot 0.004 = 4000,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$250T_2 = 125T_3 + 4000 + 125 \cdot T_A$$

$$250T_3 = 125T_2 + 125T_4 + 4000$$

$$250T_4 = 125T_3 + 125T_5 + 4000$$

$$250T_5 = 125T_4 + 4000 + 125 \cdot T_B$$

En regroupant les termes et en remplaçant les valeurs de T_A et T_B on obtient le système “tri-diagonal” à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 250 & -125 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & -125 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16500 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

La solution numérique du système (4.61) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 236 \\ 256 \\ 244 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

La solution analytique est obtenue en intégrant l'équation (4.54) et en imposant les conditions aux limites spécifiées :

$$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda} (L - x) \right] x + T_A. \quad (4.63)$$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 236 \\ 256 \\ 244 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

La solution analytique est obtenue en intégrant l'équation (4.54) et en imposant les conditions aux limites spécifiées :

$$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda} (L - x) \right] x + T_A. \quad (4.63)$$

La comparaison des résultats numériques, obtenus avec la méthode des volumes finis, avec la solution analytique est présentée au tableau 4.1 et à la fig. 4.11.

Tableau 4.1 Comparaison : solution numérique – solution analytique

<i>Numéro du noeud</i>	2	3	4	5
<i>x [m]</i>	0.004	0.008	0.012	0.016
<i>Solution numérique</i>	184	236	256	244
<i>Solution analytique</i>	184	236	256	244
<i>Erreur %</i>	0	0	0	0

On constate que malgré un maillage très grossier les solutions numérique et analytique correspondent. Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G.

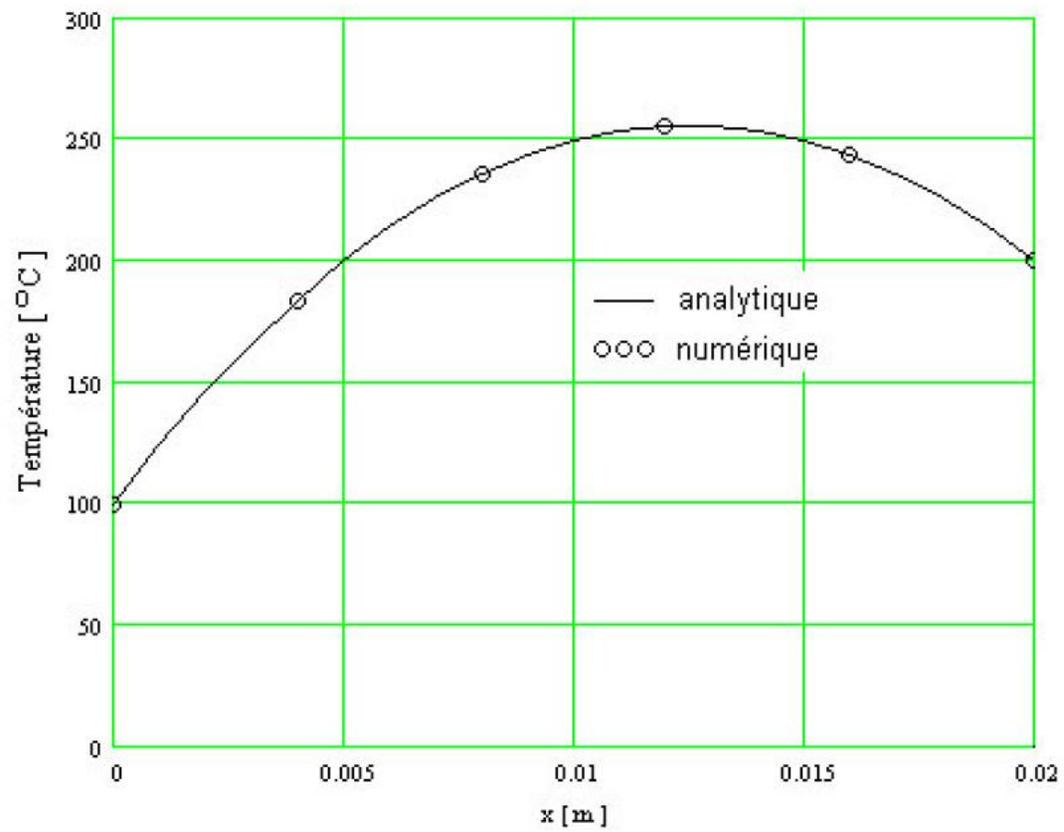


Fig. 4.11 Comparaison des résultats numérique avec la solution analytique

Exemple 3

On considère une barre cylindrique (fig. 4.12) de l'aire A avec une extrémité maintenue à la température constante de 100 °C (T_B) et l'autre extrémité est isolée (le flux de chaleur est nul). Sur le long de la barre il y a un échange de chaleur par convection dépendante de la température. La température du milieu extérieur est de 20 °C .

Calculer la distribution de la température et comparer les résultats avec la solution analytique.

On connaît : $L = 1\text{ m}$, $hP / (\lambda A) = 25\text{ m}^{-2}$.

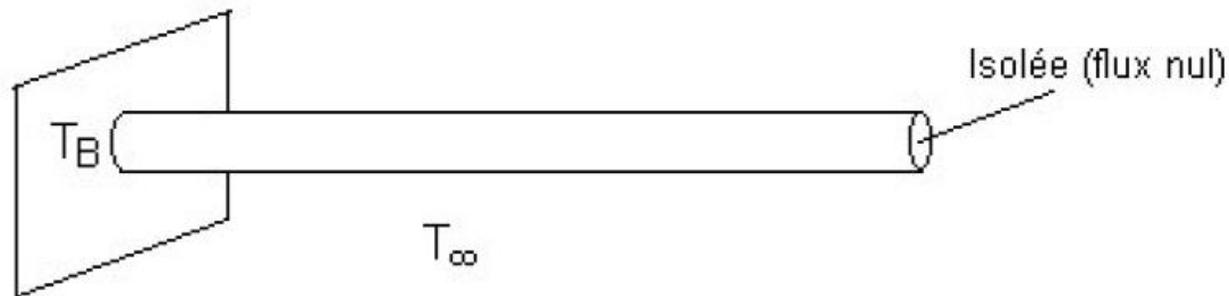


Fig. 4.12 Géométrie de l'exemple 3

Solution

L'équation différentielle qui gouverne le transfert thermique dans ce cas est :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_{\infty}) = 0, \quad (4.64)$$

où h est le coefficient de transfert thermique par convection, P est le périmètre, λ est la conductivité thermique et T_{∞} est la température du milieu extérieur.

La solution analytique est donnée par la relation suivante [48] :

$$T(x) = (T_B - T_{\infty}) \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)} + T_{\infty}, \quad (4.65)$$

où $n^2 = hP / (\lambda A)$ (il faut noter que $\lambda A = cte$).

Le maillage utilisé est celui de la figure 4.13.

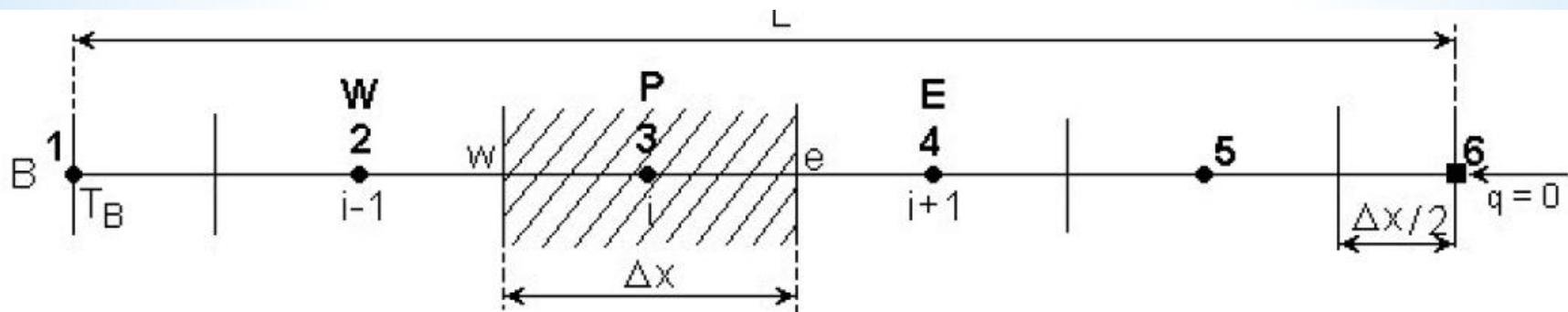


Fig. 4.13 Maillage utilisé pour l'exemple 3

Lorsque $\lambda A = \text{cte}$, l'équation (4.64) peut être écrite ainsi :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - n^2 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{où} \quad n^2 = hP / \lambda A. \quad (4.66)$$

L'intégration de l'équation (4.66) sur le volume de contrôle, autour du point P , donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{VC} n^2 (T - T_\infty) dV = 0. \quad (4.67)$$

La première intégrale de l'équation (4.67) sera traitée comme dans les exemples 1 et 2. La deuxième intégrale, à cause du terme source, est évaluée en supposant que la quantité à intégrer est localement constante sur chaque volume de contrôle et donc :

$$\left(A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(A \frac{dT}{dx} \right)_w - [n^2 (T_P - T_\infty) A \Delta x] = 0. \quad (4.68)$$

Pour les noeuds intérieurs l'équation discrétisée est :

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} + \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) \Delta x = 0. \quad (4.69)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_P = \frac{1}{\Delta x}T_W + \frac{1}{\Delta x}T_E + n^2\Delta xT_\infty - n^2\Delta xT_P. \quad (4.70)$$

Pour un noeud intérieur (les noeuds 3, 4 et 5) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b, \quad (4.71)$$

où $a_W = a_E = \frac{1}{\Delta x}$ $a_P = a_W + a_E - S_P$ $b = S_c = n^2\Delta xT_\infty$

$$S_P = -n^2 \Delta x.$$

Le terme source dans l'équation ci-dessus est identifié comme $S = S_c + S_P T_P$.

Pour le noeud 2 (pour le noeud 1 ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire, la température étant connue) est valable la même équation que pour un noeud intérieur où le voisin "W" correspond à la température du point "1", $T_W = T_1 = T_B$. Le terme qui contient la température du point "1" est interprété comme un terme source. L'équation discrétisée, pour le noeud "2", est :

$$a_P T_P = a_E T_E + b + a_W T_B, \quad (4.72)$$

où $a_W = a_E = \frac{1}{\Delta x}$ $a_P = a_W + a_E - S_P$ $b = S_c = n^2 \Delta x T_\infty$.

Pour le noeud "6" on intègre l'équation (4.66) sur le demi-volume de contrôle :

$$\int_{1/2VC} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{1/2VC} n^2 (T - T_\infty) dV = 0 ; \quad (4.73)$$

$$\left(A \frac{dT}{dx} \right)_P - \left(A \frac{dT}{dx} \right)_W - n^2 (T_P - T_\infty) A \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Parce que le flux dans le point P est nul ($q_P = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_P = 0$), on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$0 - A \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) A \frac{\Delta x}{2} = 0. \quad (4.74)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.74) on obtient :

$$a_P T_P = a_W T_W + b, \quad (4.75)$$

$$\text{où } a_W = \frac{1}{\Delta x} \quad a_P = a_W - S_P \quad b = S_c = n^2 \frac{\Delta x}{2} T_\infty \quad S_P = -n^2 \frac{\Delta x}{2}.$$

En tenant compte que

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{0.2} = 5 \quad n^2 \Delta x T_\infty = 25 \cdot 0.2 \cdot 20 = 100 \quad -n^2 \Delta x = -25 \cdot 0.2 = -5,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{aligned}15T_2 &= 5T_3 + 100 + 5T_B \\15T_3 &= 5T_2 + 5T_4 + 100 \\15T_4 &= 5T_3 + 5T_5 + 100 \\15T_5 &= 5T_4 + 5T_6 + 100 \\7.5T_6 &= 5T_5 + 50\end{aligned}$$

En regroupant les termes on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

La solution numérique est la suivante :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.569 \\ 31.707 \\ 24.553 \\ 21.951 \\ 21.301 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Dans le tableau 4.2 on compare les résultats numériques avec la solution analytique.

Tableau 4.2 Comparaison : solution numérique – solution analytique

<i>Noeud</i>	<i>x [m]</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Erreur %</i>
2	0.2	50.569	49.439	-2.28
3	0.4	31.707	30.853	-2.76
4	0.6	24.553	24.056	-2.06
5	0.8	21.951	21.663	-1.33
6	1.0	21.301	21.078	-1.05

La précision de la solution numérique peut être augmentée en utilisant un maillage plus fin. Dans le tableau 4.3 et à la figure 4.14 sont présentés les résultats numériques et les erreurs pour un maillage de 21 noeuds ($\Delta x = 0.05$ m, quatre fois plus petit). Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G.

Tableau 4.3 Comparaison : solution numérique – solution analytique

<i>Noeud</i>	<i>x [m]</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Erreur %</i>
2	0.2	49.515	49.439	-0.150
3	0.4	30.910	30.853	-0.180
4	0.6	24.088	24.056	-0.130
5	0.8	21.682	21.663	-0.087
6	1.0	21.092	21.078	-0.066

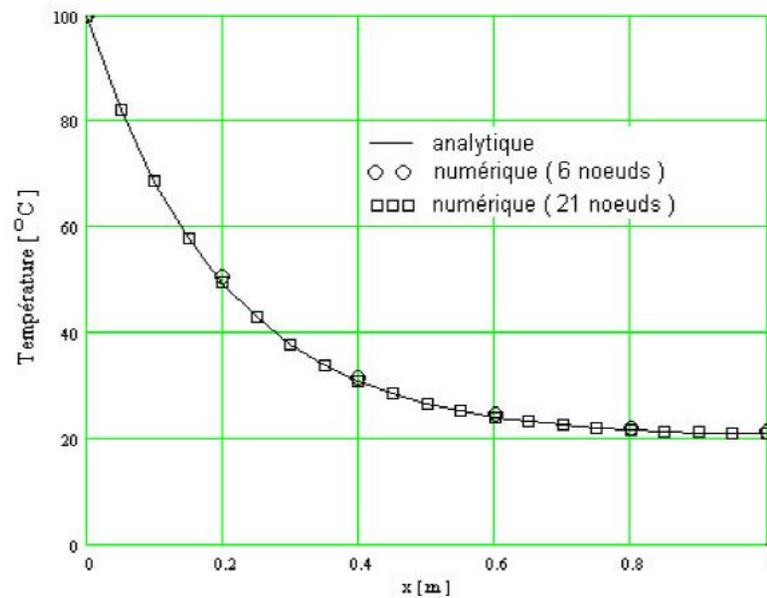


Fig. 4.14 Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique

4.2 Conduction thermique 1D instationnaire

4.2.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S, \quad (4.78)$$

où ρ est la densité de masse (kg / m^3), c_p étant la chaleur spécifique à pression constante (J/KgK).

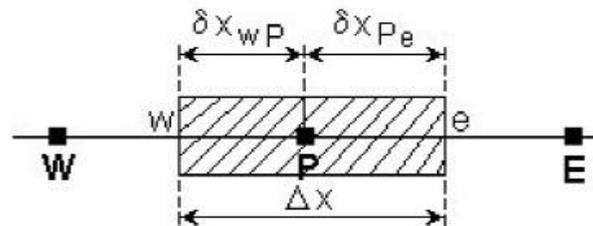


Fig. 4.15 Volume de contrôle 1D

On considère le volume de contrôle unidimensionnel de la figure 4.15. L'intégration de l'équation (4.78) sur le volume de contrôle et sur un interval de temps de t au $t + \Delta t$ donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dV dt . \quad (4.79)$$

L'équation intégrée (4.79) peut être écrite ainsi :

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt . \quad (4.80)$$

où A est l'aire transversale du volume de contrôle, ΔV étant le volume de celui-ci égale à $A\Delta x$.

Si la température du noeud P est supposée la même sur le volume de contrôle, la partie gauche de l'équation (4.80) peut être écrite ainsi :

$$\int_{VC} \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta V, \quad (4.81)$$

où T_P^0 est la température à l'instant t et T_P à l'instant $t + \Delta t$.

En utilisant un schéma avec des différences centrales pour les termes de conduction de la part droite de l'équation (4.81) on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left[\lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x dt, \quad (4.82)$$

Pour calculer la partie droite de l'équation (4.82) il faut connaître la variation de T_P , T_W et T_E dans le temps. Pour cela il y a de nombreuses possibilités, on peut prendre la température à l'instant t , T_P^0 , à l'instant $t + \Delta t$, T_P ou une combinaison linéaire des températures à l'instant t et $t + \Delta t$. La forme générale d'intégration temporelle s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = \begin{cases} T_P^0 \Delta t \\ T_P \Delta t \\ (f T_P + (1-f) T_P^0) \Delta t \end{cases}, \quad (4.83)$$

où $0 \leq f \leq 1$ est un facteur de pondération.

En appliquant la forme générale d'intégration temporelle (4.83) aux points T_P , T_W et T_E on obtient :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta x = & f \left[\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{\delta x_w} \right] \\ & + (1 - f) \left[\frac{\lambda_e (T_E^0 - T_P^0)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P^0 - T_W^0)}{\delta x_w} \right] + \bar{S} \Delta x \end{aligned} \quad (4.84)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.84) on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} + f \left(\frac{\lambda_e}{\delta x_e} + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right) \right] T_P = & \frac{\lambda_e}{\delta x_e} [f T_E + (1 - f) T_E^0] + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} [f T_W + (1 - f) T_W^0] \\ & + \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - f) \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - (1 - f) \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right] T_P^0 + \bar{S} \Delta x \end{aligned} \quad (4.85)$$

Si l'on identifie les coefficients de T_W et T_E comme a_W et a_E on peut écrire l'équation (4.85) sous la forme générale discrétisée :

$$a_P T_P = a_W [f T_W + (1-f) T_W^0] + a_E [f T_E + (1-f) T_E^0] + [a_P^0 - (1-f)a_W - (1-f)a_E] T_P^0 + b \quad (4.86)$$

où $a_P = f(a_W + a_E) + a_P^0$ $a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}$;

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \quad b = \bar{S} \Delta x \quad .$$

La forme exacte de l'équation discrétisée dépend de la valeur du facteur f . Lorsque $f = 0$ on utilise seulement les températures T_P^0 , T_W^0 et T_E^0 à l'instant t , dans le membre droit de l'équation (4.86), pour calculer T_P à l'instant $t + \Delta t$; un tel schéma s'appelle *schéma explicite*. Lorsque $0 < f \leq 1$, on utilise tant les températures à l'instant t que les températures à l'instant $t + \Delta t$; le schéma obtenu s'appelle *le schéma implicite*. Le cas limite quand $f = 1$ le schéma s'appelle *totalemment implicite*. Si $f = 1/2$ le schéma s'appelle *schéma Crank-Nicolson ou semi-implicite*.

4.2.2 Schéma explicite

Dans le cas du schéma explicite le terme source est linéarisé par l'expression $b = S_c + S_P T_P^0$. En remplaçant $f = 0$ dans l'équation (4.86) on obtient la *discrétisation explicite* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + \left[a_P^0 - (a_W + a_E - S_P) \right] T_P^0 + S_c, \quad (4.87)$$

$$\text{où } a_P = a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}.$$

La règle N° 2 n'est pas toujours satisfaite. Le coefficient de T_p^0 peut être regardé comme le coefficient du "voisin" de T_p dans la "direction" temps ou un coefficient voisin qui fait la liaison entre les valeurs de T à l'instant t et celles à l'instant $t + \Delta t$. Pour que le coefficient de T_p^0 soit positif il faut $a_p^0 - a_w - a_E \geq 0$. Dans le cas général la condition devient :

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \geq 0. \quad (4.88)$$

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ la condition (4.88) devient :

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \frac{2\lambda}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{2\lambda} \quad (4.89)$$

Si l'on note $\alpha = \lambda / \rho c_p$, on obtient le nombre de Fourier qui doit être inférieur ou égal à $1/2$:

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.90)$$

La relation (4.90) représente le critère de stabilité pour les schémas explicites.

Remarques

- le critère de convergence du schéma utilisé, pour l'intégration dans le temps, résulte d'une considération physique (la règle N° 2).
- si l'on réduit Δx pour améliorer la précision spatiale, il faut diminuer beaucoup Δt ($\propto 1/(\Delta x)^2$).

4.2.3 Schéma Crank-Nicolson

En remplaçant $f = 1/2$ dans l'équation (4.86) on obtient la *discrétisation Crank-Nicolson* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_E \left[\frac{T_E + T_E^0}{2} \right] + a_W \left[\frac{T_W + T_W^0}{2} \right] + \left[a_P^0 - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} \right] T_P^0 + b, \quad (4.91)$$

où
$$a_P = \frac{1}{2} (a_W + a_E) + a_P^0 - \frac{1}{2} S_P \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \quad b = S_c + \frac{1}{2} S_P T_P^0$$

À l'instant $t + \Delta t$ plusieurs inconnues sont présentes dans l'équation (4.91), le schéma est donc implicite et les équations doivent être résolues simultanément pour tous les noeuds à chaque pas dans le temps.

Mathématiquement le schéma Crank-Nicolson est inconditionnellement stable, mais *numériquement* la convergence vers une solution physiquement acceptable n'est pas assurée (par exemple, des solutions oscillantes d'amplitude constante ou décroissante).

La règle N° 2 est satisfaite uniquement lorsque

$$a_P^0 - \frac{a_E + a_W}{2} = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\lambda_e}{2\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{2\delta x_w} \geq 0. \quad (4.92)$$

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ la condition (4.92) devient :

$$\Delta t \leq \frac{\rho c_P (\Delta x)^2}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1. \quad (4.93)$$

Remarque

La relation (4.93) est moins restrictive que la relation (4.90) associée au schéma explicite. La précision du schéma Crank-Nicolson est de second ordre dans le temps donc pour le même pas dans le temps la précision des résultats est plus grande que dans le cas du schéma explicite.

4.2.4 Schéma totalement implicite

Lorsque $f=1$, dans l'équation (4.86) on obtient le schéma totalement implicite. L'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_c, \quad (4.94)$$

où $a_P = a_P^0 + a_W + a_E - S_P$ $a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w}$ $a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$.

La règle N° 2 est toujours vérifiée, donc le schéma totalement implicite (TI) est inconditionnellement stable. La précision du schéma TI est de premier ordre dans le temps, donc un petit pas dans le temps est nécessaire pour augmenter la précision des résultats.

4.2.5 Exemples

Par la suite on démontre les propriétés des schémas de discrétisation explicite et implicite en comparant les résultats numériques, pour un problème 1D instationnaire, avec la solution analytique.

Exemple 1

Une plaque métallique mince se trouve initialement à une température uniforme de 200°C . À l'instant $t=0$ la température de la paroi "East" de la plaque est brusquement réduite à 0°C . Les autres surfaces de la plaque sont isolées.

1. Utiliser le schéma explicite de la méthode des volumes finis, pour un pas de temps adéquate, pour calculer la distribution transitoire de la température et comparer les résultats avec la solution analytique aux instants (i) $t = 40\text{ s}$, (ii) $t = 80\text{ s}$, (iii) $t = 120\text{ s}$;
2. Calculer la solution numérique pour un pas de temps donné par la formule (4.90), pour $t = 40\text{ s}$ et comparer avec la solution analytique ;

Les données du problème sont : la longueur de la plaque $L = 2\text{ cm}$, la conductivité thermique $\lambda = 10\text{ W/mK}$ et $\rho c_p = 10^7\text{ J/m}^3\text{K}$.

Solution

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (4.95)$$

La condition initiale est : $T = 200^\circ\text{C}$ à $t = 0$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, t > 0 ;$$

$$T = 0 \quad \text{pour} \quad x = L, t > 0.$$

La solution analytique est donnée par la relation suivante [28] :

$$T(x, t) = T(x, 0) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x), \quad (4.96)$$

où $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$.

On considère six points sur le domaine de calcul avec $\Delta x = 0.004$ mm (fig. 4.16).

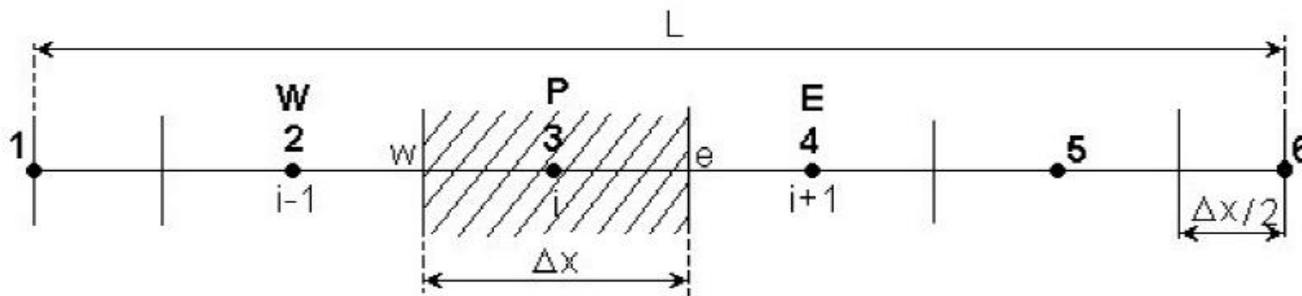


Fig. 4.16 Maillage pour le problème de l'exemple 1.

Pour un noeud intérieur (les noeuds 2, 3 et 4) l'équation discrétisée obtenue de l'équation (4.87) pour $S = 0$ est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + [a_P^0 - a_W - a_E] T_P^0, \quad (4.97)$$

où

$$a_P = a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour le noeud 1 (noeud situé sur la frontière), la condition à la limite impose d'intégrer l'équation (4.95) sur un demi-volume de contrôle. L'équation discrétisée ainsi obtenue, pour le noeud 1, est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + (a_P^0 - a_E) T_P^0, \quad (4.98)$$

où

$$a_P = a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{2\Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour le noeud 1 (noeud situé sur la frontière), la condition à la limite impose d'intégrer l'équation (4.95) sur un demi-volume de contrôle. L'équation discrétisée ainsi obtenue, pour le noeud 1, est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + (a_P^0 - a_E) T_P^0, \quad (4.98)$$

où
$$a_P = a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{2\Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour le noeud 6 (noeud de frontière), la condition à la limite étant de type Dirichlet, ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire. On utilise la même équation que pour un noeud intérieur, mais comme la température du point 6 est connue ($T_c = T_6 = 0^\circ \text{C}$) le terme qui contient la température du point 6 passe comme un terme source. Ainsi, on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 5 :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_W - a_E) T_P^0 + a_E T_C, \quad (4.99)$$

où
$$a_P = a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Le pas dans le temps Δt doit satisfaire la condition de stabilité (4.90), donc :

$$\Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{2\lambda} = \frac{10^7 \cdot (0.004)^2}{2 \cdot 10} = 8 \text{ s.}$$

Parce que $\Delta t \leq 8 \text{ s}$ on choisi $\Delta t = 2 \text{ s}$ et on trouve :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000 ;$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000.$$

Après la substitution des valeurs numériques, dans les équations (4.97), (4.98) et (4.99) et simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Noeud 1 :} & \quad 100T_P = 25T_E^0 + 75T_P^0 \\ \text{Noeuds 2} \div \text{4 :} & \quad 200T_P = 25T_W^0 + 25T_E^0 + 150T_P^0 \\ \text{Noeud 5 :} & \quad 200T_P = 25T_W^0 + 150T_P^0 + 25T_c \end{aligned} \tag{4.100}$$

Dans le tableau 4.4 on présente un exemple de calcul, en utilisant les équations (4.100) pour les deux premières pas de temps.

Tableau 4.4

<i>Temps</i>	<i>Noeud 1</i>	<i>Noeud 2</i>	<i>Noeud 3</i>	<i>Noeud 4</i>	<i>Noeud 5</i>
t=0 s	$T_1^0 = 200$	$T_2^0 = 200$	$T_3^0 = 200$	$T_4^0 = 200$	$T_5^0 = 200$
1	$100T_1^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 75 \cdot 200$	$200T_2^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_3^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_5^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 0$
t=2 s	$T_1^1 = 200$	$T_2^1 = 200$	$T_3^1 = 200$	$T_4^1 = 200$	$T_5^1 = 175$
2	$100T_1^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 75 \cdot 200$	$200T_2^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_3^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 175$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_5^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 175$ $+ 25 \cdot 0$
t=4 s	$T_1^2 = 200$	$T_2^2 = 200$	$T_3^2 = 198.72$	$T_4^2 = 196.87$	$T_5^2 = 156.25$

Les résultats numériques de l'exemple 1 sont présentés au tableau 4.5.

Tableau 4.5

<i>Temps [s]</i>	<i>Numéro du noeud</i>					
	1	2	3	4	5	6
	$x = 0$	$x = 0.004$	$x = 0.008$	$x = 0.012$	$x = 0.016$	$x = 0.02$
0	200	200	200	200	200	200
2	200	200	200	200	175	0
4	200	200	200	196.87	156.25	0
6	200	200	199.6	192.18	141.79	0
8	200	199.95	198.73	186.82	130.37	0
10	199.98	199.8	197.39	181.25	121.13	0
12	199.94	199.52	195.67	175.75	113.5	0
14	199.84	199.09	193.66	170.46	107.09	0
16	199.65	198.51	191.44	165.44	101.63	0
18	199.36	197.77	189.08	160.71	96.9	0
20	198.96	196.88	186.62	156.28	92.76	0

Le tableau 4.6 montre les résultats numériques et analytiques aux instants 40, 80 et 120 s. À la figure 4.17 on présente la comparaison des résultats numériques obtenus pour différents pas de temps avec la solution analytique (6 noeuds). La comparaison des résultats numériques et analytiques aux différents instants de temps est présentée à la figure 4.18 (21 noeuds).

Tableau 4.0

<i>Temps [s]</i>	<i>Noeud</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Erreur %</i>
<i>t = 40 s</i>	1	188.026	189.861	0.96
	2	182.196	183.814	0.88
	3	162.767	163.708	0.57
	4	125.662	125.712	0.039
	5	69.407	69.045	-0.52
	6	0	0	0
<i>t = 80 s</i>	1	153.526	154.462	0.6
	2	146.467	147.265	0.54
	3	125.610	126.080	0.37
	4	92.177	92.329	0.16
	5	48.851	48.850	-0.002
	6	0	0	0
<i>t = 120 s</i>	1	121.015	121.361	0.28
	2	115.150	115.460	0.26
	3	98.080	98.304	0.22
	4	71.376	71.500	0.17
	5	37.574	37.624	0.13
	6	0	0	0

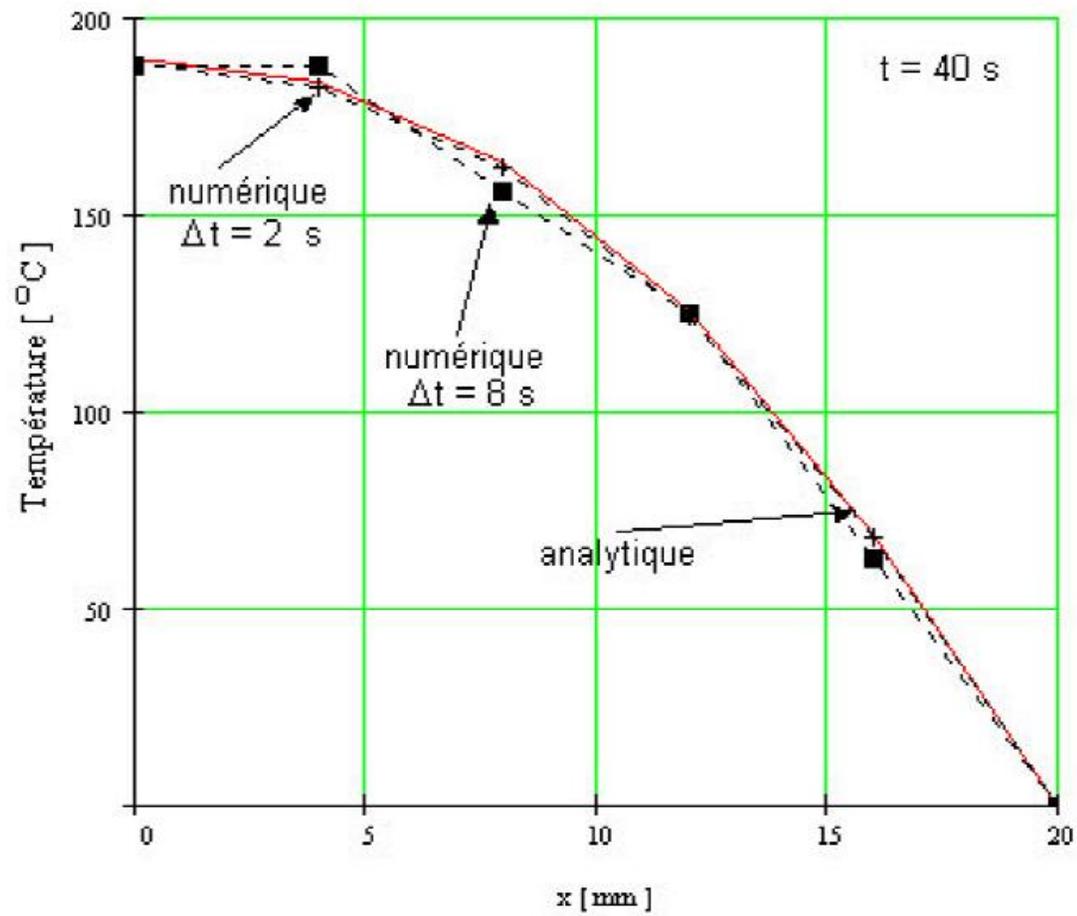


Fig. 4.17 Comparaison des résultats pour différents pas de temps.

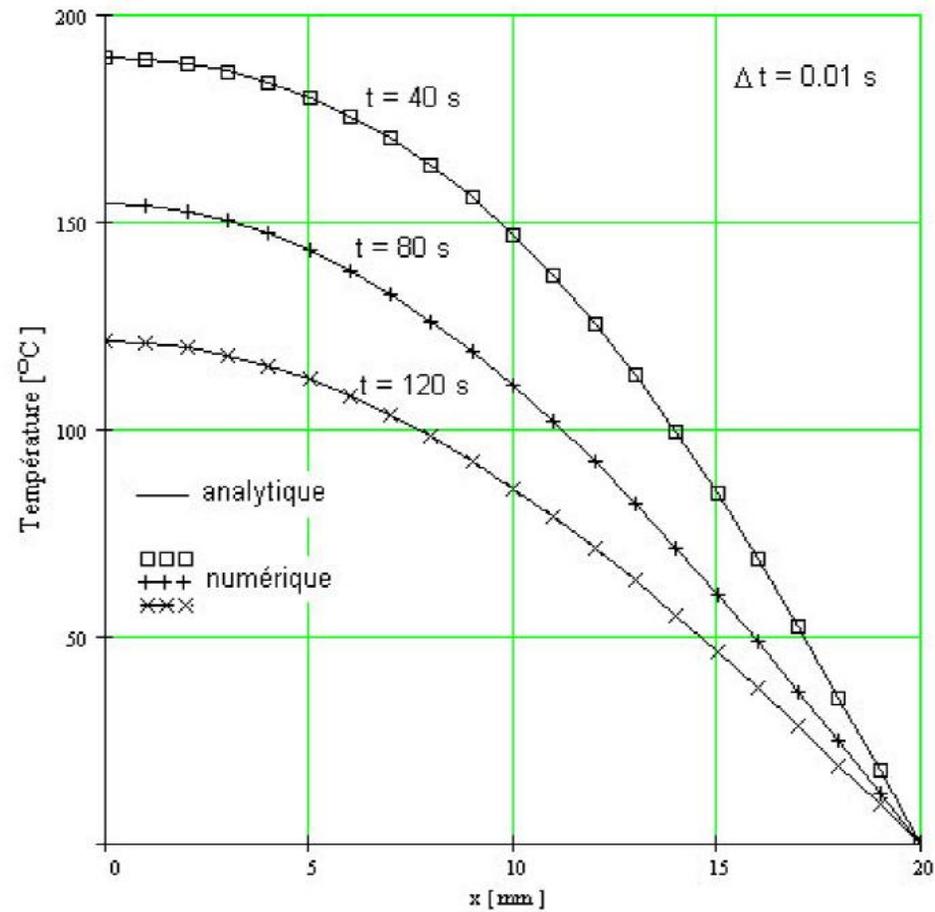


Fig. 4.18 Comparaison des résultats numériques (maillage à 21 noeuds) et analytiques aux différents instants de temps (méthode explicite).

Exemple 2

Résoudre le problème de l'exemple 1 en utilisant le schéma totalement implicite et comparer les résultats numériques obtenus avec la méthode implicite avec ceux obtenus avec la méthode explicite, pour un pas de temps de 8 s.

Solution

On utilise le même maillage de la figure 4.16. L'équation discrétisée, en utilisant le schéma totalement implicite, pour un noeud intérieur du domaine de calcul (*les noeuds 2, 3, et 4*) est celle décrite par l'équation (4.94) mais avec le terme source nul, c'est-à-dire :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \quad (4.101)$$

$$\text{où } a_P = a_P^0 + a_W + a_E \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} ;$$

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour les noeuds situés sur la frontière 1 et 5 un traitement spécial s'impose. Ainsi, pour *le noeud 1* l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \quad (4.102)$$

$$\text{où } a_P = a_P^0 + a_E \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour *le noeud 5* l'équation discrétisée, en tenant compte que $T_E \equiv T_6 = T_c$ (connue), est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_P^0 T_P^0 + a_E T_c, \quad (4.103)$$

$$\text{où } a_P = a_W + a_E + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x}.$$

Même si la méthode implicite permet d'utiliser un pas de temps quelconque, par la suite nous allons utiliser un pas de temps raisonnable, $\Delta t = 2 \text{ s}$, pour assurer une bonne précision des résultats. On a donc :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000 ;$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000.$$

Après la substitution des valeurs numériques dans les équations (4.101), (4.102) et (4.103) et après simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Noeud 1 :} & \quad 125T_P = 25T_E + 100T_P^0 \\ \text{Noeuds 2 } \div \text{ 4 :} & \quad 250T_P = 25T_W + 25T_E + 200T_P^0 \\ \text{Noeud 5 :} & \quad 250T_P = 25T_W + 200T_P^0 + 25T_c \end{aligned} \tag{4.104}$$

En tenant compte que $T_c = 0$ le système d'équations algébriques à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 125 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 250 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 250 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 250 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100T_1^0 \\ 200T_2^0 \\ 200T_3^0 \\ 200T_4^0 \\ 200T_5^0 \end{bmatrix} \tag{4.105}$$

On constate que l'équation pour chaque point contient les températures inconnues des points voisins. La méthode implicite nécessite la résolution simultanée du système d'équations (4.105). Les valeurs de la température du pas de temps précédent sont utilisées seulement pour le calcul du membre droit de l'équation matricielle (4.105).

Le tableau 4.7 et la figure 4.19 présentent les résultats numériques en comparaison avec la solution analytique (pour un maillage de 6 noeuds). Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G (THER1Di2)

Tableau 4.7

<i>Temps [s]</i>	<i>Noeud</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Ereur %</i>
<i>t = 40 s</i>	1	187.419	189.861	1.28
	2	181.853	183.814	1.06
	3	163.162	163.708	0.33
	4	126.868	125.712	-0.91
	5	70.605	69.045	-2.25
	6	0	0	0
<i>t = 80 s</i>	1	153.719	154.462	0.48
	2	146.754	147.265	0.34
	3	126.087	126.080	-0.005
	4	92.739	92.329	-0.44
	5	49.241	48.850	-0.8
	6	0	0	0
<i>t = 120 s</i>	1	121.524	121.361	-0.13
	2	115.656	115.460	-0.16
	3	98.559	98.304	-0.25
	4	71.766	71.501	-0.37
	5	37.797	37.624	-0.45
	6	0	0	0

À la figure 4.20 on présente une comparaison, des résultats numériques à l'instant $t = 40$ s, obtenus en utilisant les schémas explicite et implicite, avec la solution analytique pour un pas de temps de $\Delta t = 8$ s. On constate que le schéma explicite, pour $\Delta t = 8$ s, donne des oscillations, tandis que le schéma implicite donne des résultats en bon accord avec la solution analytique. Ceci montre l'avantage du schéma implicite qui permet d'utiliser un pas de temps plus grand. Il faut signaler toutefois qu'une bonne précision sera obtenue en utilisant tout de même un pas de temps plus petit.

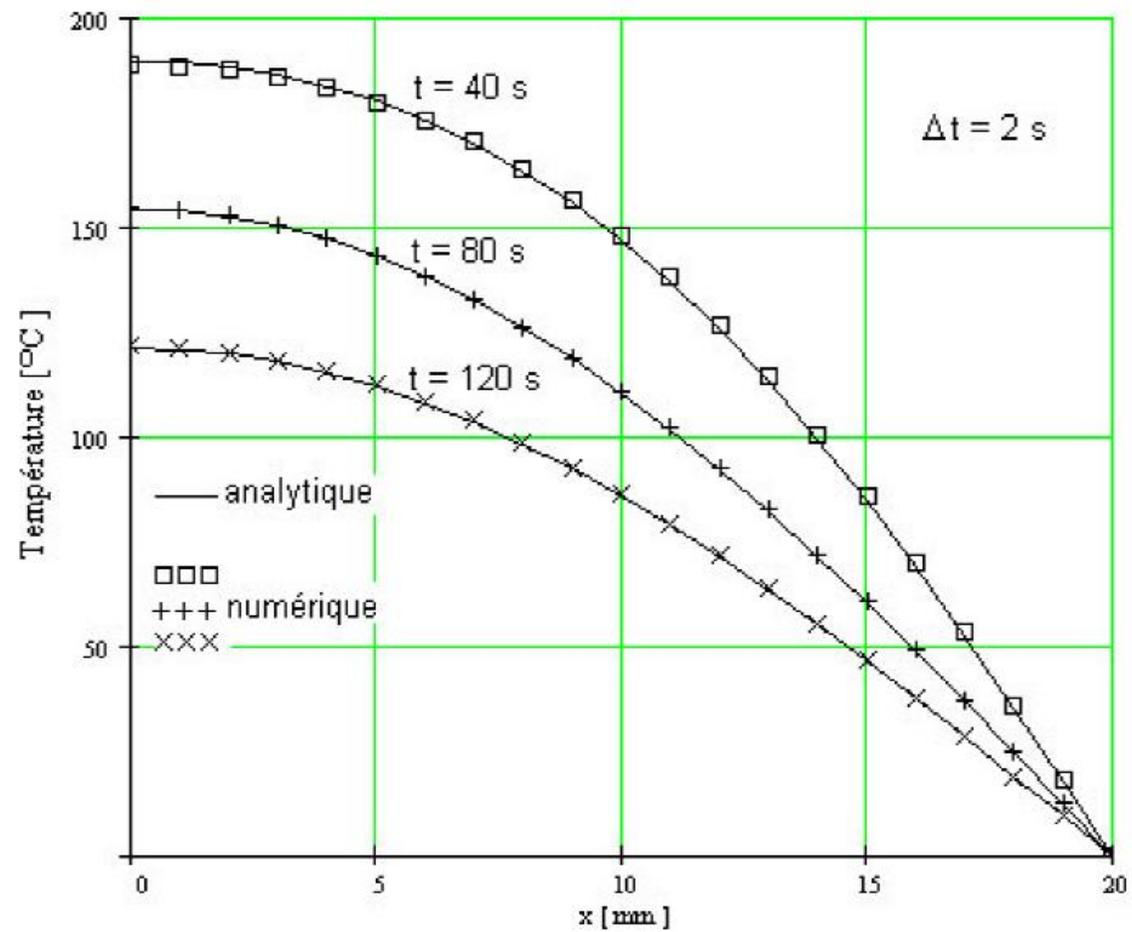


Fig. 4.19 Comparaison des résultats numériques (maillage de 21 noeuds) et analytiques au différents instants de temps (méthode implicite).

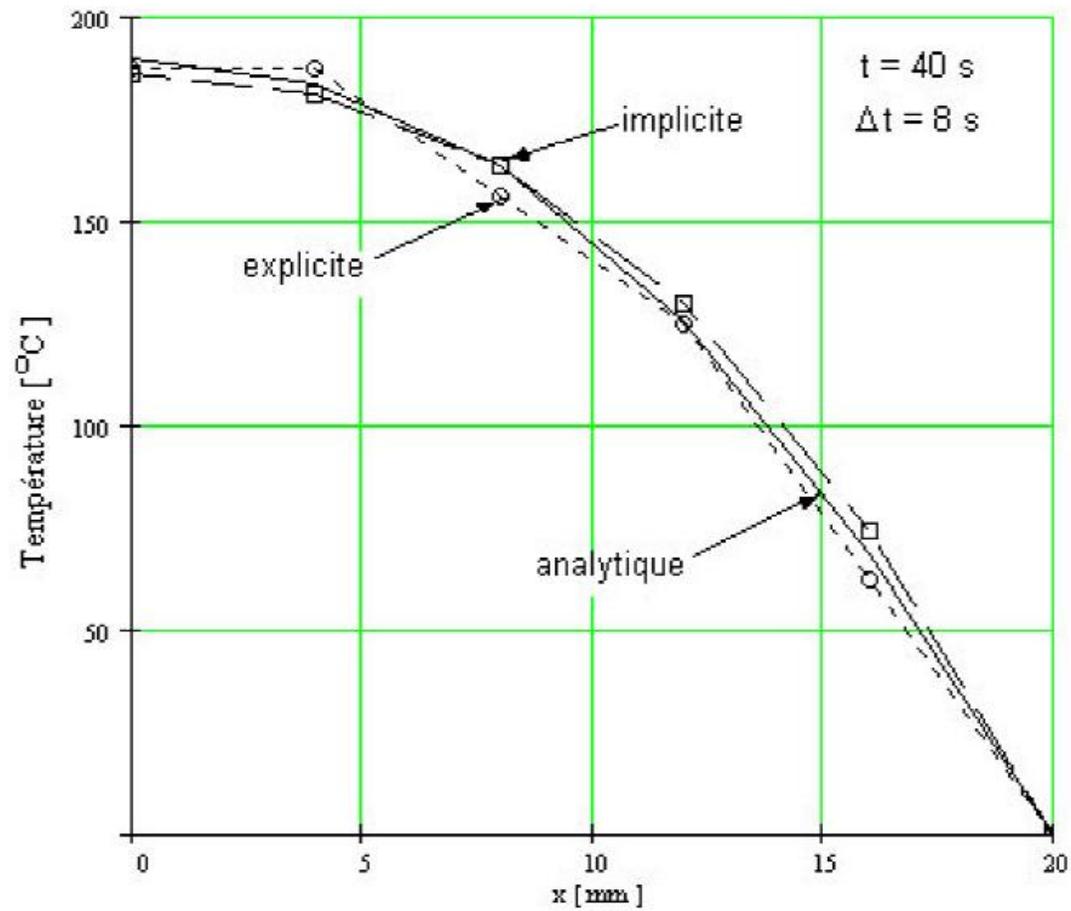


Fig. 4.20 Comparaison des solutions, en utilisant les méthodes explicite et implicite

4.3 Conduction thermique stationnaire en deux dimensions (2D)

4.3.1 Forme générale de l'équation discrétisée

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel (2D). Pour illustrer cette technique on considère l'équation de la conduction thermique 2D stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0. \quad (4.106)$$

Le type de maillage utilisé, dans ce cas, est représentée à la figure 4.21

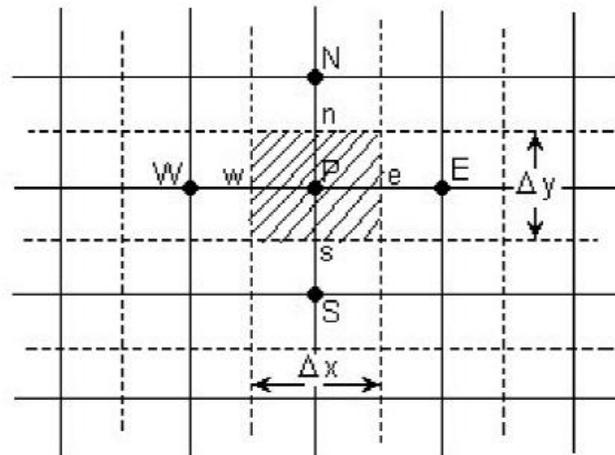


Fig. 4.21 Maillage 2D.

De plus, par rapport au maillage 1D, aux noeuds voisins, "East" (E) et "West" (W) du point P on ajoute les voisins "North" (N) et "South" (S).

L'intégration de l'équation (4.106), sur le volume de contrôle, donne :

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \int_{VC} S dV = 0. \quad (4.107)$$

Si l'on note $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$, on obtient :

$$\left[\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0. \quad (4.108)$$

L'équation (4.108) représente le bilan entre la génération de T dans le volume de contrôle et les flux aux faces du volume de contrôle. En utilisant la même approximation que dans le cas 1D, c'est-à-dire on suppose une variation linéaire du gradient de température entre deux points voisins du maillage, on peut écrire les flux aux faces du volume de contrôle :

$$\text{Le flux au face " w " } = \lambda_w A_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w = \lambda_w A_w \frac{T_E - T_W}{\delta x_{WP}} \quad (4.109)$$

$$\text{Le flux au face "e"} = \lambda_e A_e \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} ; \quad (4.110)$$

$$\text{Le flux au face "s"} = \lambda_s A_s \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s = \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} ; \quad (4.111)$$

$$\text{Le flux au face "n"} = \lambda_n A_n \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_n = \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} . \quad (4.112)$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (4.108), on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 . \quad (4.113)$$

Si l'on tient compte que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ et $\bar{S} = S_c + S_p T_P$ et finalement en regroupant les termes, l'équation (4.113) peut s'écrire ainsi :

Si l'on tient compte que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ et $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ et finalement en regroupant les termes, l'équation (4.113) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_p \Delta x \Delta y \right) T_p \\ & = \left(\frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_w + \left(\frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_e + \left(\frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) T_s + \left(\frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) T_n + S_c \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (4.114)$$

L'équation (4.114) peut être écrite donc sous la forme générale discrétisée pour un noeud intérieur :

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + b, \quad (4.115)$$

où $a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \quad a_e = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \quad a_s = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \quad a_n = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} ;$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n - S_p \Delta x \Delta y \quad b = S_c \Delta x \Delta y.$$