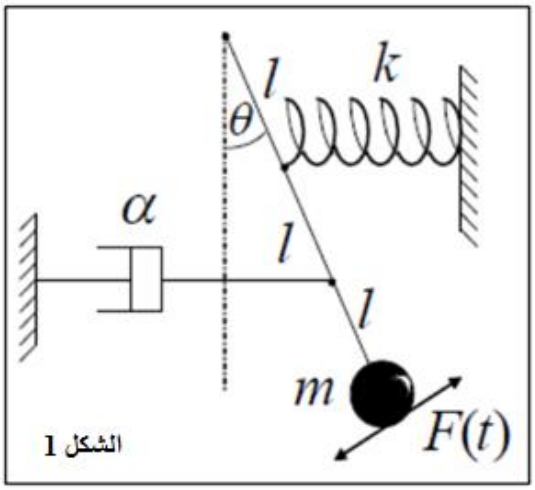
**السلسلة رقم** 3: (الهزاز المتخامد المجبر)

**التمرين الأول :**



الشكل 1

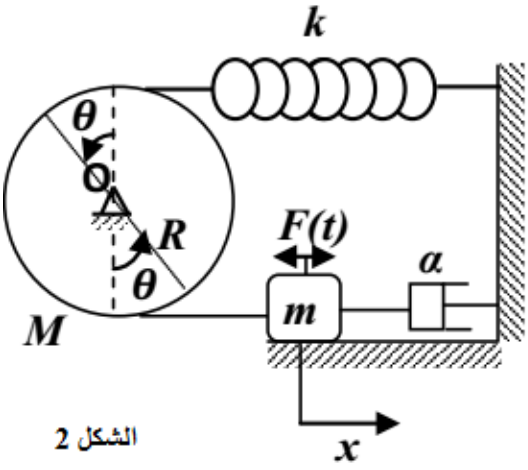
يمثل الشكل 1 كتلة $m$ معلقة بساق مهمل الكتلة طوله $3l$ و نابض ثابت مرونته $k$ و مخمد $\alpha$ و نؤثر على النظام بقوة خارجية: $f = f_0 \cos \omega t$

1. اوجد عبارة الطاقة الحركية، الطاقة الكامنة و دالة التبدد من اجل الاهتزازات الصغيرة $(\theta \ll 1)$.
2. اكتب دالة لاغرانج للحركة
3. اكتب المعادلة التفاضلية للحركة.
4. باستعمال التمثيل بالاعداد المركبة اوجد سعة الحل الخاص $A$ و الطور الابتدائي $\varphi$

اذا كان : $\theta \ll 1$ فان :

$$(1 - \cos\theta) = \frac{\theta^2}{2} \qquad \cos\theta = 1 \qquad \sin\theta \approx \theta$$

**التمرين الثاني**



الشكل 2

يتكون النظام المبين في الشكل 2 من قرص كتلته $M$ و نصف قطره $R$ يمكنه الدوران حول محور ثابت. الكتلة $m$ على السطح الافقي مربوطة بمخمد $\alpha$ و بالقرص. نؤثر على الكتلة $m$ بقوة خارجية من الشكل : $f = f_0 \cos \omega t$

1. اوجد عبارة الطاقة الحركية، الطاقة الكامنة و دالة التبدد من اجل الاهتزازات الصغيرة حيث $j = \frac{1}{2} MR^2$.
2. اكتب دالة لاغرانج للحركة
3. اكتب المعادلة التفاضلية للحركة.
4. باستعمال التمثيل بالاعداد المركبة اوجد سعة الحل الخاص $A$ و الطور الابتدائي $\varphi$
5. اوجد نبض التجاوب $\omega_r$.

## حل السلسلة 3

**التمرين الأول :**

1. الطاقة الحركية $T$ ، الطاقة الكامنة $U$ ، طاقة التبدد $\mathcal{D}$

- الطاقة الحركية $T$

$$T = \frac{1}{2} j\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m(3l)^2\dot{\theta}^2 = \frac{9}{2} ml^2\dot{\theta}^2$$

- الطاقة الكامنة $U$

$$U = U_k + U_m$$

$$U_k = \frac{1}{2} k(l\sin\theta)^2 = \frac{1}{2} kl^2\theta^2$$

$$U_m = mg(3l - 3l\cos\theta) = 3mgl(1-\cos\theta) = \frac{3}{2} mgl\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2} kl^2\theta^2 + \frac{3}{2} mgl\theta^2$$

- طاقة التبدد $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(2l\dot{\theta})^2 = 2\alpha l^2\dot{\theta}^2$$

2. دالة لاغرانج $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{9}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kl^2\theta^2 - \frac{3}{2} mgl\theta^2$$

3. المعادلة التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} = f_0\cos\omega t$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9ml^2\dot{\theta} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -(kl^2 + 3mgl)\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha l^2\dot{\theta}$$

$$9ml^2\ddot{\theta} + 4\alpha l^2\dot{\theta} + (kl^2 + 3mgl)\theta = f_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{9m}\dot{\theta} + \frac{(kl^2 + 3mgl)}{9ml^2}\theta = \frac{f_0}{9ml^2}\cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{9m}\dot{\theta} + \left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right)\theta = \frac{f_0}{9ml^2}\cos \omega t$$

المعادلة من الشكل: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = f$

$$2\lambda = \frac{4\alpha}{9m} \implies \lambda = \frac{2\alpha}{9m}$$

$$\omega_0^2 = \left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right)$$

4. سعة الحل الخاص $A$ و الطور الابتدائي $\varphi$

الحل الخاص يكتب من الشكل : $\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{f_0}{9ml^2}\cos \omega t = \frac{f_0}{9ml^2}e^{i\omega t}$$

$$\theta = A\cos(\omega t + \varphi) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{\theta} = iA\omega e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\ddot{\theta} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} + \frac{4\alpha}{9m} iA\omega e^{i\omega t} + \left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) Ae^{i\omega t} = \frac{f_0}{9ml^2} e^{i\omega t}$$

$$Ae^{i\omega t} e^{i\varphi} \left(-\omega^2 + \frac{4\alpha}{9m} i\omega + \left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right)\right) = \frac{f_0}{9ml^2} e^{i\omega t}$$

$$Ae^{i\varphi} \left(\left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2 + i\frac{4\alpha}{9m}\omega\right) = \frac{f_0}{9ml^2}$$

$$\left(\left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2 + i\frac{4\alpha}{9m}\omega\right) = \frac{f_0}{A9ml^2} e^{-i\varphi}$$

$$\left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2 + i\frac{4\alpha}{9m}\omega = \frac{f_0}{A9ml^2} (\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

بوضع المساواة بين الجزء الحقيقي للطرفين و المساواة بين الجزء التخيلي للطرفين نجد :

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2 = \frac{f_0}{A9ml^2} \cos\varphi \\ \frac{4\alpha}{9m}\omega = -\frac{f_0}{A9ml^2} \sin\varphi \end{cases}$$

بالتربيع و الجمع :

$$\left(\frac{f_0}{A9ml^2}\right)^2 = \left(\left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{4\alpha}{9m}\omega\right)^2$$

$$A = \frac{B}{\sqrt{\left(\left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{4\alpha}{9m}\omega\right)^2}}$$

$$tg\ \varphi = \frac{-\frac{4\alpha}{9m}\omega}{\left(\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l}\right) - \omega^2}$$

**التمرين الثاني:**

1. الطاقة الحركية $T$ ، الطاقة الكامنة $U$ ، طاقة التبدد $\mathcal{D}$

- الطاقة الحركية $T$

$$x = R\theta \implies \theta = \frac{x}{R}$$

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}M\,R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2$$

- الطاقة الكامنة $U$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

- طاقة التبدد $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

2. دالة لاغرانج $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

3. المعادلة التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} = f_0\cos\omega t$$

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f_0\cos\omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{\left(\frac{M}{2} + m\right)}\dot{x} + \frac{k}{\left(\frac{M}{2} + m\right)}x = \frac{f_0}{\left(\frac{M}{2} + m\right)}\cos\omega t$$

معادلة تفاضلية من الشكل : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2\left(\frac{M}{2} + m\right)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\left(\frac{M}{2} + m\right)}$$

4. سعة الحل الخاص $A$ و الطور الابتدائي $\varphi$

باستعمال الاعداد المركبة

$$\begin{cases} f = f_0 e^{i\omega t} \\ x(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

$$tg\ \varphi = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

5. نبض التجاوب $\omega_r$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$