الفصل الثالث : الاهتزازات المجبرة للأنظمة ذات درجة حرية واحدة

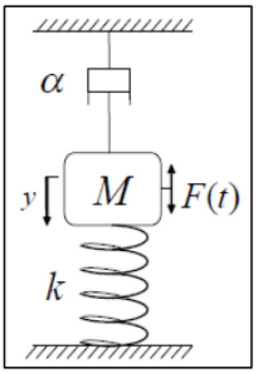
- المعادلة التفاضلية لنظام متخامد مجبر ذو درجة حرية واحدة
- حل المعادلة التفاضلية
- دراسة الحل الخاص و ظاهرة التجاوب

الفصل الثالث : الاهتزازات المجبرة للأنظمة ذات درجة حرية واحدة

تخامد الحركة الاهتزازية يعود في الأصل الى ضياع الطاقة، و للمحافظة على هذه الحركة الاهتزازية يجب تعويض الطاقة الضائعة، أي ان النظام بحاجة الى مصدر للطاقة من خلال قوة خارجية محرضة تكون في نفس اتجاه الحركة. في هذه الحالة نقول ان الاهتزازات مجبرة (oscillations forcées).

1. معادلة الحركة للهزاز المجبر

في هذه الحالة يمثل الاهتزاز بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات طرف ثاني غير معدوم. نأخذ كمثال النواس المروني (كتلة–نابض–مخمد) كما نؤثر عليه بقوة خارجية دورية توافقية، حيث تكون هذه القوة على الشكل:



$$f_{ext} = f_0 \cos \omega t$$

او $$f_{ext} = f_0 e^{i\omega t}$$

لدينا معادلة الحركة المتخامدة

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

اذن عند التحريض بقوة خارجية جيبية $f_{ext} = f_0 e^{i\omega t}$ يمكن كتابة معادلة الحركة كما يلي:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t}$$

بتعميم المعادلة

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t}$$

2. حل المعادل التفاضلية للحركة :

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t}$$

حل هذه المعادلة يكون على الشكل: $q_G = q_H + q_P$

q_G : الحل العام للمعادلة

q_H : الحل المتجانس أي حل المعادلة التفاضلية بدون طرف ثاني.

q_P : الحل الخاص يمثل حل المعادلة التفاضلية بطرف ثاني و الشكل الرياضي ل q_P يتعلق بشكل دالة التحريض.

- الحل المتجانس q_H

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

حل هذه المعادلة موجود في الفصل السابق.

- الحل الخاص q_P : بما أن التحريض جيبي فان الحل الخاص يأخذ الشكل الجيبي

$$q_P(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

حيث :

A : سعة الحل الخاص

ω : نبض الاستجابة و يساوي نبض التحريض

φ : الطور الابتدائي للحل الخاص

لايجاد A و φ نستخدم التمثيل بالأعداد المركبة

$$q(t) = A\cos(\omega t - \varphi) \equiv\ q(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$\dot{q} = i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{q} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

بالتعويض في المعادلة : $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t}$

نجد:

$$-\omega^2 Ae^{i(\omega t+\varphi)} + 2\lambda\, i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Ae^{i(\omega t+\varphi)} = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)}(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega) = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{f_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

حيث : a هو ثابت

$$\varphi = arctg\,\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x_p(t) = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + arctg\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

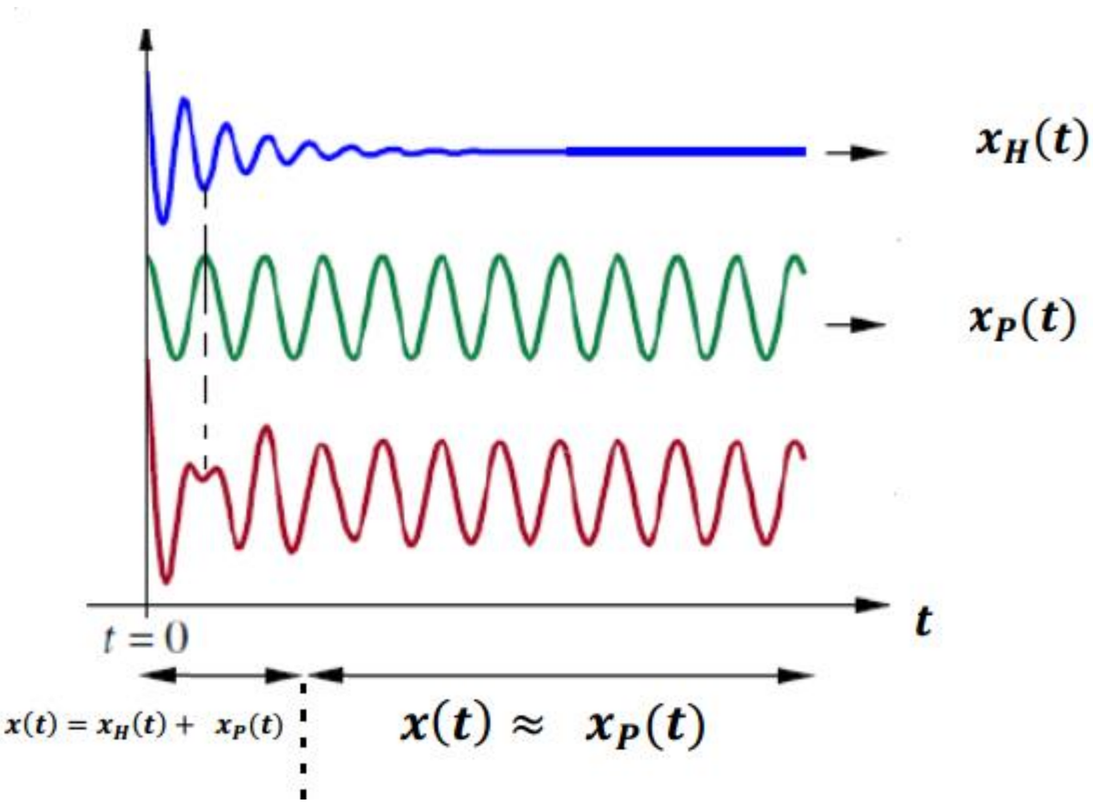
ملاحظات:

الحل العام للمعادلة التفاضلية يكتب من الشكل :

$$x_G(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

الحل المتجانس $x_H(t)$: تكون فيه السعة متناقصة أسيا مع الزمن حتى تنعدم ، أي انه حل مؤقت و بعد مدة زمنية معينة يختفي الحل المتجانس أي ان الحل العام يكتب كما يلي :

$$x(t) \approx x_p(t)$$



3. دراسة تغيرات سعة الحل الخاص و ظاهرة التجاوب:

عند التحريض بقوة خارجية تصبح سعة الحركة $A = A(\omega)$ التي تتعلق بنبض التحريض للقوة الخارجية، البحث عن القيمة الأعظمية للسعة يمكن الحصول عليه بالبحث عن القيمة الصغرى لمربع المقام.

$A = A(\omega)$ اعظمية $\Longrightarrow D^2 = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2$ اصغري

للبحث عن القيمة الصغرى ل D^2 يكفي البحث عن إمكانية انعدام المشتقة بالنسبة للنبض ω : $\frac{dD^2}{d\omega}$

بوضع : $\omega^2 = u$

$$D^2 = (\omega_0^2 - u) + 4\lambda^2 u$$

$$\frac{dD^2}{du}\frac{du}{d\omega} = \left[-2(\omega_0^2 - u^2) + 4\lambda^2\right]\frac{du}{d\omega}$$

نعلم ان: $\frac{du}{d\omega} = 2\omega$ و بالتعويض $\omega^2 = u$ نجد :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = 4\omega\left[(\omega^2 - \omega_0^2) + 2\lambda^2\right]$$

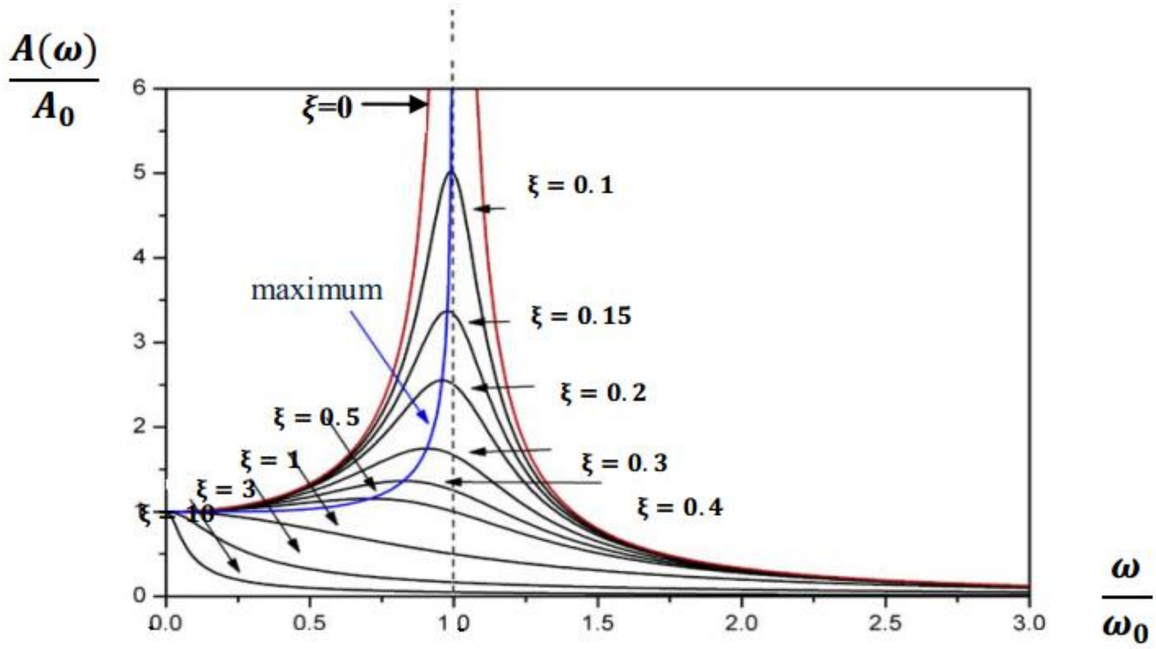
هذه المشتقة تنعدم من اجل: $\omega = 0$ أو اذا كان: $(\omega^2 - \omega_0^2) + 2\lambda^2 = 0$

$$(\omega^2 - \omega_0^2) + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2 \Rightarrow \omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \Rightarrow \omega_0 > \lambda\sqrt{2}$$

اذن: تكون تكون قيمة نبض التجاوب اعضمية $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ عندما يكون التخامد $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} > \lambda$، في هذه الحالة نقول النظام في حالة تجاوب و السعة تأخذ قيمة أعظمية .

بوضع : $\xi = \frac{\lambda}{\omega_0}$

اذن يمكن تمثيل تغيرات السعة بدلالة النبض من اجل عدة قيم ل ξ :



و يمكن كتابة هذا الشرط بإدخال معامل الجودة على الشكل التالي :

$$\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \iff \omega_0^2 > 2\lambda^2 \iff \frac{\omega_0^2}{2\lambda^2} > 1 \Rightarrow \frac{\omega_0^2}{4\lambda^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

أي انه يكون هناك رنين اذا كان معامل الجودة $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. دراسة تغيرات الطور الابتدائي $\boldsymbol{\varphi}$:

لدينا :

$$tg\,\varphi = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

اذن :

$$\boldsymbol{tg\,\varphi = \frac{-2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

- **اذا كان :**

$$\boldsymbol{\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow tg\,\varphi \to -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

- **اذا كان**

$$\boldsymbol{\xi = 0 \Rightarrow tg\,\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ او } \varphi = -\pi}$$