الفصل 2

حركة شحنة في الحقلين الكهربائي والمغناطيسية

مقدمة

البلازما جملة كثيرة الأجسام مشحونة ومعتدلة ومستقرة ومعقدة لأن حركة شحناتها يحددها الحقلين الكهربائي والمغناطيسي، والحقلان يحددهما كثافة التيار وكثافة الشحنات، وكثافة التيار وكثافة الشحنات تحددهما حركة الشحنات. لهذا وصف حركة أجسام البلازما بالغة التعقيد.

فاحتار الباحثون في تصور مقاربة يصفون من خلالها حركة شحنات البلازما q_1، q_2، ...، q_α، ... في الحقول الكهرومغناطيسية. فتصوروا مقاربات تقوم على خصائصها، فصنفوها بحسب كثافتها ومثاليتها و...، فهذا التصنيف هو تقريبي، لكن يمدنا من معلومات هامة على حركة أجسامها. فصنفوها إلى ثلاثة أصناف:

أ. بلازمات خفيفة الكثافة أو مثالية

ب. وبلازمات متوسطة الكثافة

ج. وبلازمات عالية الكثافة.

تصوروا أجسام البلازما خفيفة الكثافة بعيدة على بعضها البعض أو مثالية، إلى درجة يمكن إهمال تلاقي الأجسام(التصادم)، وبالتالي يمكن إهمال تأثير بعضها على بعض. بلفظ آخر كل شحنة تتحرك بمعزل عن الشحنات الأخرى. سمي هذا الصنف"الحركة المفردة الأجسام البلازما". وبالتالي يكفي دراسة حركة شحنة منفردة في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي. وحركة كل شحنة من شحنات البلازما تماثلها.

وتصوروا بلازما متوسطة الكثافة غير مثالية، فلا يمكن التغاضي عن تلاقي(تصادم) أجسامها. المقاربة اللائقة هي النظري الحركي (kinetic theory).

وتصوروا بلازما عالية الكثافة أجسامها قريبة من بعضها البعض فحركة أجسامها تشبه حركة أجسام مائع، غير مثالية. فالمقاربة اللائقة هي المستخدمة لوصف حركة المائع.

سنخوض في حركة الجسم الفرد، ونؤجل المقاربات الأخرى لوقت آخر.

1.2 حركة شحنة في الحقول الكهرومغناطيسية

معدلة حركة الشحنة q في الحقول الكهرومغناطيسية الداخلية والخارجية، في إطار الجسم الفرد هي

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1.2}$$

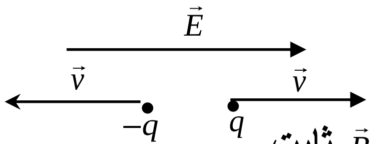
فارضين الحقول لا تتعلق بالزمن ولا بالموضع. حتى هذه المعادلة مازالت عصية الحل. فمن الأليق دراسة مسألة الحركة جزءا جزءا.

2.2 حركة الشحنة q في الحقل $\vec{E}$ الثابت

معادلة حركة الشحنة q في الحقل الكهربائي الثابت هي

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{q}{m}\vec{E}=\text{ثابت} \quad \text{،} \quad m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{E} \tag{2.2}$$

فحركتها متغيرة بانتظام، تعد معروفة. تكتسب الشحنة q طاقة حركة من الحقل نتيجة تسريعها. فالحقل الكهربائي يسوق الشحنات الموجبة ويدفع الشحنات السالبة ورائه.



3.2 حركة الشحنة q في حقل مغناطيسي $\vec{B}$ ثابت

معادلة حركة الشحنة q في حقل مغناطيسي هي

$$\vec{\omega}\equiv-\frac{q\vec{B}}{m} \ \text{حيث} \ \text{،} \quad \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{q}{m}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=\vec{\omega}\times\vec{v} \quad \text{،} \quad m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{3.2}$$

فالقوة التي تتلقاها الشحنة q من الحقل $\vec{B}$ تتعلق بسرعتها وعمودية عليها.

أ. دراسة حركة الشحنة q سرعتها في مستوي عمودي على الحقل $\vec{B}$.

وعليه مركبتي تسارعها الناظم والمماس هما

$$a_T=\frac{dv}{dt}=0 \quad \text{،} \quad a_N=\frac{v^2}{\rho} \tag{4.2}$$

واضح أن طول سرعة الشحنة في الحقل المغناطيسي الثابت ثابتة. هذه أول نتيجة عن حركة الشحنة.

نواصل دراسة حركة الشحنة في المستوي العمودي على الحقل $\vec{B}$.

4.2 حركة الشحنة في المستوي العمودي على الحقل $\vec{B}$

إذا كانت سرعة الشحنة q عمودية على الحقل $\vec{B}$، فإن معادلة حركة الشحنة q في الحقل $\vec{B}$ هي

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

فطولها هو

$$\rho=R=\frac{mv}{qB} \ \text{ومنه} \ m\frac{v^2}{\rho}=qvB \quad \text{،} \quad ma_N=\left|q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right| \tag{5.2}$$

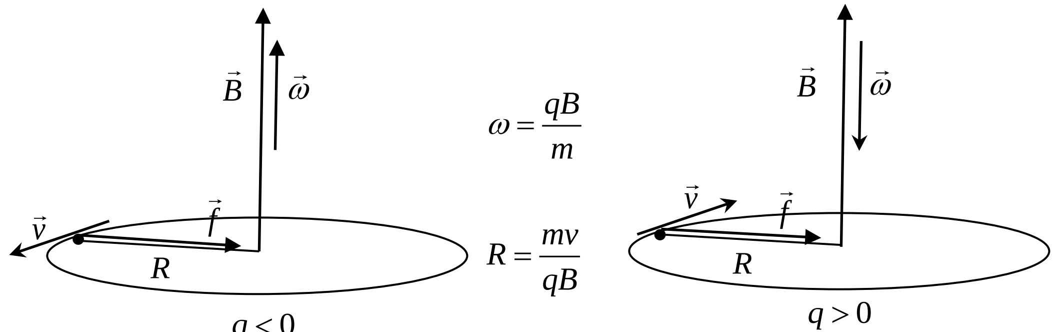
وسرعتها تعريفا هي نسبة محيط الدائرة إلى زمن الدور T، من ثم العلاقات

$$v=\frac{2\pi R}{T}=\omega R=\omega\frac{mv}{qB} \ \text{من ثم} \ v=\frac{2\pi R}{T} \tag{6.2}$$

ومنه تدور الشحنة q على الحقل $\vec{B}$ بسرعة الزاوية

$$\omega=\frac{qB}{m}$$

مسار الشحنة في الحقل الثابت دائري عمودي على الحقل، كما في الشكلين(1). محور الدوران حامل $\vec{B}$ وسرعة الزاوية في وقت. الشحنات الموجبة تدور على الحقل في اتجاه عقارب الساعة، والشحنات السالبة تدور عكسها.



الشكل 1أ: يبين حركة شحنة موجبة في حقل B ثابت   الشكل 1 ب: يبين حركة شحنة سالبة في حقل B ثابت

5.2 حركة الشحنة في حقل ليس عمودي على سرعتها

إذا كانت سرعة الشحنة كيفية بالنسبة للحقل، تحليل السرعة إلى مركبتين، موازية للحقل $\vec{v}_{\parallel}$، وعمودية عليه $\vec{v}_{\perp}$، وبالتالي $\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$. من جهة أخرى، معلوم أن القوة المغناطيسية عمودية على الحقل $\vec{B}$وبالتالي القوة وفق الحقل $\vec{f}_{\parallel}$ معدومة. وعليه معادلة حركة الشحنة q في الحقل الثابت $\vec{B}$ هي

$$m\frac{dv_{\perp}}{dt} = f_{\perp} = qv_{\perp}B \quad ، \quad m\frac{dv_{\parallel}}{dt} = f_{\parallel} = 0 \qquad (7.2)$$

العلاقة الثانية من العلاقتين (7.2) هي نفسها العلاقة(5.2). والعلاقة الأولى من العلاقتين(7.2) تفيد أن حركة الشحنة وفق الحقل منتظمة

$$z(t) = v_{\parallel}t = v_z(0)t \quad \text{و} \quad v_{\parallel}(t) = v_z(0) \qquad (8.2)$$

أما الحركة في المستوي العمودي على الحقل دائرية، مثل الحركة السابقة، بالسرعة $\vec{v}_{\perp}(t)$.

6.2 حركة الشحنة في حقل مغناطيسي ثابت

يمكننا أن نكتفي بالتحليل السابق لبلوغ معارف عن حركة الشحنة q. نعرض في هذه الفقرة بمنظور لا يحتاج لاعتبارات. تحليل معادلة حركة الشحنة q في الحقل $\vec{B}$ الثابت (3) على أساس ثلاثي يفضي للمعادلات

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}\left(v_x B_y - v_y B_x\right) \; ، \; \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}\left(v_z B_x - v_x B_z\right) \; ، \; \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}\left(v_y B_z - v_z B_y\right) \qquad (9.2)$$

معلم الإسناد مازال اختياري، نختار محوره z بحيث يوازي الحقل $\vec{B}$. عندئذ $B_x = B_y = 0$، و $B_z = B$، فتغدو العلاقات (9.2) العلاقات

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad ، \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B \quad ، \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}v_y B \qquad (10.2)$$

واضح أن الحركة وفق الحقل منتظمة، وبالتالي

$$z(t) = v_z(0)t = v_{\parallel}t \quad \text{من ثم} \quad v_z(t) = v_z(0) = v_{\parallel} = \text{ثابت} \qquad (11.2)$$

ولمواصلة البحث عن المركبتين $v_x(t)$ و $v_y(t)$ نضرب العلاقة الثانية من العلاقات (10.2) في $i = \sqrt{-1}$، وجمعها

مع الأولى، يفضي ذلك للعلاقة

$$\frac{d}{dt}\left(v_x+iv_y\right)=\frac{q}{m}\left(v_y-iv_x\right)B\equiv -i\omega\left(v_x+iv_y\right) \tag{12.2}$$

حيث $\omega\equiv\left(qB/m\right)$، تبين من صحة المعادلة. يمكننا وضع العلاقة (12.2) على الصورة لتهيئتها للتكامل

$$\frac{d}{dt}\left[e^{i\omega t}\left(v_x+iv_y\right)\right]=0 \tag{13.2}$$

وتكاملها يفضي للعلاقة

$$v_x\left(t\right)+iv_y\left(t\right)=\left(v_x\left(0\right)+iv_y\left(0\right)\right)\left(\cos\omega t-i\sin\omega t\right) \tag{14.2}$$

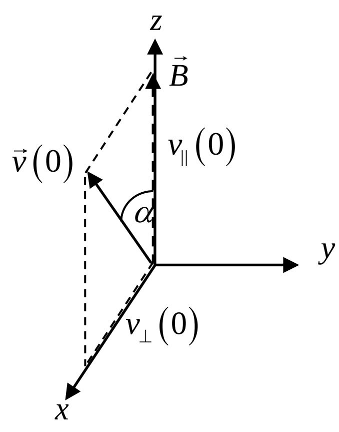
العلاقة (14.2) تفيد المركبتين

$$\begin{aligned} v_x\left(t\right)&=v_x\left(0\right)\cos\omega t+v_y\left(0\right)\sin\omega t\\ v_y\left(t\right)&=-v_x\left(0\right)\sin\omega t+v_y\left(0\right)\cos\omega t \end{aligned} \tag{15.2}$$

يمكننا أن نزيد في تبسيط المسألة بإدارة جملة الإحداثيات حول الحقل $\vec{B}$ (حول المحور Δ_z) حتى تكون السرعة الابتدائية $\vec{v}\left(0\right)$ في المستوي zx هذا ليس تقريبا ولا ينقص من عمومية المسألة. عندئذ $v_x\left(0\right)=v_\perp\left(0\right)$ و $v_y\left(0\right)=0$. إدخال ذلك في العلاقات (15.2)، فتغدو العلاقات

$$\begin{aligned} v_x\left(t\right)&=v_x\left(0\right)\cos\omega t=v_\perp\left(0\right)\cos\omega t\\ v_y\left(t\right)&=-v_x\left(0\right)\sin\omega t=-v_\perp\left(0\right)\sin\omega t\\ v_z\left(t\right)&=v_\parallel\left(0\right) \end{aligned} \tag{16.2}$$

يوضح الشكل(2) وضع جملة المحاور والحقل $\vec{B}$ والسرعة الابتدائية $\vec{v}\left(0\right)$ في لحظة الابتداء.



الشكل 2: يبين وضع الحقل المغناطيسي الثابت $\vec{B}$، وسرعة الشحنة q عند الابتداء $\vec{v}\left(0\right)$ ومركباتها

الجدير بالملاحظة هو ثبوت طول سرعة الشحنة في الحقل المغناطيسي الثابت، ذلك متضمن في طول السرعة

$$v\left(t\right)=\sqrt{v_x\left(t\right)^2+v_y\left(t\right)^2+v_z\left(t\right)^2}\equiv\sqrt{v_\perp\left(0\right)^2+v_\parallel\left(0\right)^2}=v\left(0\right) \tag{17.2}$$

ليس هذا فحسب بل طول سرعة الشحنة في المستوي العمودي على الحقل مستقل عن الزمن، نرى ذلك من العلاقة

$$v_\perp\left(t\right)=\sqrt{v_x\left(t\right)^2+v_y\left(t\right)^2}=v_\perp\left(0\right) \tag{18.2}$$

واضح أن الحقل المغناطيسي الثابت لا يغير أطوال السرعات $\vec{v}\left(t\right)$ و $\vec{v}_\perp\left(t\right)$ و $\vec{v}_\parallel\left(t\right)$ وإنما يديرها حوله بسرعة

الزاوية ω. ومواصلة تكامل العلاقات (16.2)، انطلاقا من العلاقات

$$\frac{dx}{dt}=v_x(t)=v_{\perp}(0)\cos\omega t \quad ، \quad \frac{dy}{dt}=v_y(t)=-v_{\perp}(0)\sin\omega t \quad ، \quad \frac{dz}{dt}=v_z(t)=v_{\parallel}(0)$$

يفضي للعلاقات

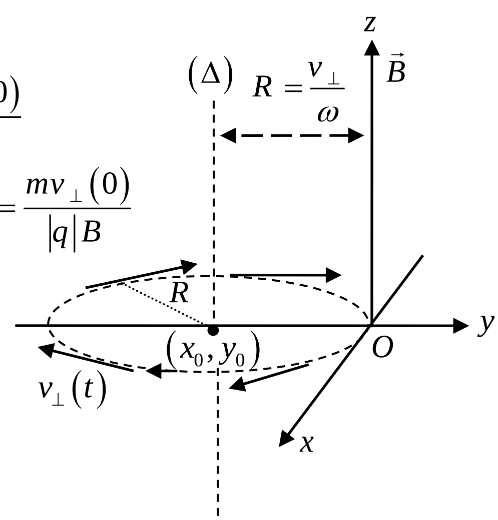
$$x(t)=\frac{v_{\perp}(0)}{\omega}\sin\omega t \quad \text{و} \quad y(t)=\frac{v_{\perp}(0)}{\omega}(\cos\omega t-1) \quad \text{و} \quad z(t)=v_{\parallel}(0)t \tag{19.2}$$

وحذف الزمن بين الإحداثيتين x و y يؤدي لمعدلة المسار

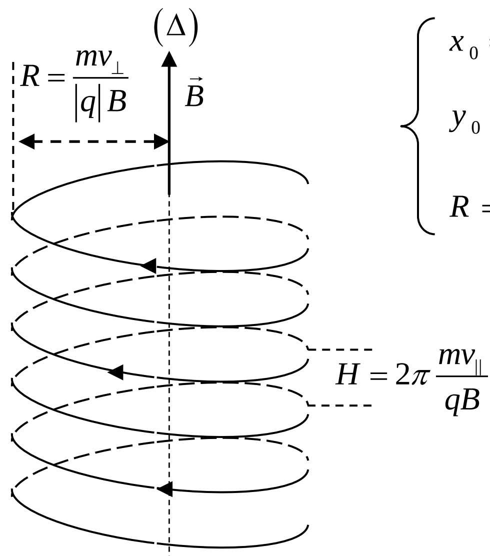
$$\left\{\begin{array}{l} x^2+\left(y+\dfrac{v_{\parallel}(0)}{\omega}\right)^2=\left(\dfrac{v_{\parallel}(0)}{\omega}\right)^2=\text{ثابت} \\ z(t)=v_{\parallel}(0)t \end{array}\right. \tag{20.2}$$

العلاقة (20.2) هي معادلة دائرة نصف قطرها $R=(v_{\perp}/\omega)$، ومركزها على المحور y في النقطة التي

$$\left\{\begin{array}{l} x_0=0 \\ y_0=-\dfrac{v_{\perp}(0)}{\omega} \\ R=\dfrac{v_{\perp}(0)}{\omega}=\dfrac{mv_{\perp}(0)}{|q|B} \end{array}\right.$$



الشكل 3أ: يبين حركة الشحنة q في المستوي العمودي على $\vec{B}$ والمسار الدائري ومركزه ومسارها



الشكل 3ب: يبين حركة الشحنة q في الفضاء ومسارها اللولبي والحقل المغناطيسي $\vec{B}$ الثابت

إحداثياتها $x_0=0$ و $y_0=-(v_{\perp}/\omega)$، كما يبين الشكل(3أ). تبين من خلال تعيين حركة الشحنة q في الحقل المغناطيسي الثابت $\vec{B}$ أن حركتها مركب من حركتين: حركة منتظمة وفق الحقل بالسرعة $\vec{v}_{\parallel}(t)=\vec{v}_{\parallel}(0)$. وحركة دوران حول الحقل بسرعة زاوية ω في المستوي العمودي عليه. ميزات حركة الشحنة في الحقل $\vec{B}$ هي

(21.2) مسارها دائري نصف قطره $R\equiv\dfrac{mv_{\perp}}{|q|B}$

(22.2) تتسلق الحقل خلال دور بخطوة قدرها $H\equiv2\pi\dfrac{mv_{\parallel}}{|q|B}$

(23.2) وبسرعة دوران قدرها $\omega\equiv\dfrac{|q|B}{m}$ ودور $T\equiv\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{m}{|q|B}$

مثال: دخلت الشحنة q حقلا مغناطيسيا $\vec{B}$ ثابتا في اللحظة $t=0$ بسرعة متعامدة عليه $\vec{v}(0)=\vec{v}_{\perp}(0)$. فعين مستقبل حركتها فيه. اثبت أولا أن الحقل المغناطيسي لا يغير طول سرعة الشحنة المتحركة فيه.

الحل: إثبات أن الحقل المغناطيسي لا يغير طول سرعة الشحنة المتحركة فيه. فعمل القوة المغناطيسية لنقل الشحنة بـ $d\vec{\ell}$ هو

$$dW = d\vec{\ell}\cdot\vec{F} = qd\vec{\ell}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad (24.2)$$

حيث $d\vec{\ell}=dt\,\vec{v}$، من ناحية أخرى، العلاقة بين عمل القوى وتغير طاقة الحركة هي

$$dW = d\vec{\ell}\cdot\vec{F} = -dE_C$$

إدماج العلاقتين يفضي للعلاقة

$$dW = d\vec{\ell}\cdot\vec{F} = qdt\ \vec{v}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = -dE_C = 0 \qquad (25.2)$$

استعملت خاصية الجداء الثلاثي السلمي $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$، القائلة إذا تكرر فيها شعاع تنعدم. والشعاع $\vec{v}$ تكرر فيها. وبالتالي القوة المغناطيسية لا تقدم عملا. وعليه تغيير طاقة حركتها الشحنة معدوم، يعني الأمر

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \text{ثابت} \qquad (26.2)$$

الذي يفيد ثبوت طور السرعة الشحنة المتحركة في الحقل المغناطيسي الثابت. وحسب قوانين التحريك، مركبتي التسارع الناظم والمماس هما

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad ، \quad a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{q}{m}\left|\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right| = \left(qvB/m\right) \qquad (27.2)$$

هذا لان طول سرعة الشحنة في الحقل المغناطيسي ثابت. من ثم مسار الشحنة دائري نصف قطره ثابت ومقداره $R=(mv/qB)$، ودورها حول الحقل هو $T=2\pi\left(R/v\right)=2\pi\left(m/qB\right)$ وسرعة دورانها هي $\omega=\frac{2\pi}{T}\equiv\frac{qB}{m}$، وترددها هو $\nu=\frac{1}{T}=\frac{qB}{2\pi m}$. الجدير بالملاحظة أن سرعة الزاوية والدور لا يتعلقان بسرعة الشحنة.

تطبيق: أن نصف قطر الدائرة التي تسلكها شحنة يتناسب مع كتلتها، وعليه نصف قطر الدوائر التي تسلكها الأيونات أكبر بكثير من التي تسلكها الإلكترونات، وكذا زمن الدور T.

تمرين:

أ. أثبت أنه إذا سرّع بروتون وإلكترون بنفس فرق الكمون Δ، فإن نصف دوران بروتون إلى نصف قطر دوران إلكترون هو

$$\frac{R_p}{R_e} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{1836} \cong 42.85 \qquad (28.2)$$

ودور البروتون إلى دور الإلكترون في الحقل ذاته هو

$$\frac{T_p}{T_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1836 \qquad (29.2)$$

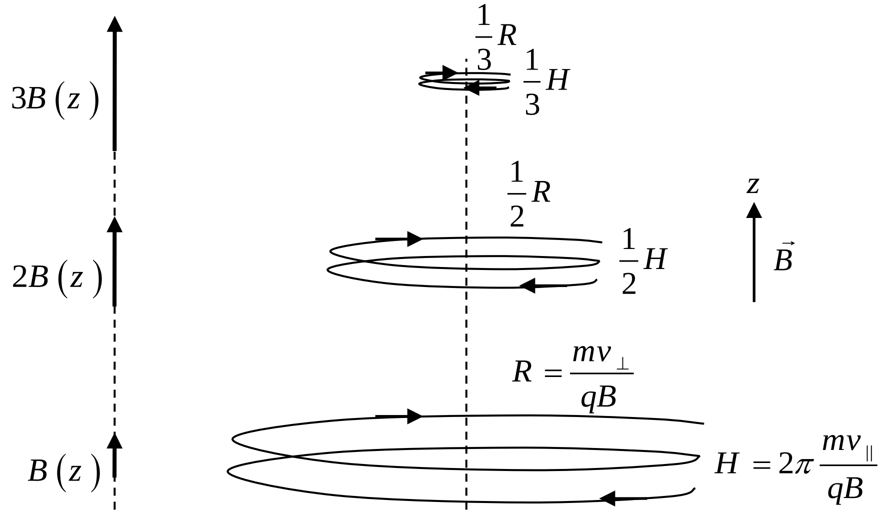
ب. تبين من أن حركة الشحنة q منتظمة وفق الحقل المنتظم $\vec{B}$ بالسرعة $v_{\parallel}=v_{\parallel}(0)$، وفي نفس الوقت تدور عليه بالسرعة $v_{\perp}=v_{\perp}(0)$. وتبين من أن نصف قطر دوران وخطوة إلكترون وأيون هي

$$H_i=2\pi\frac{m_i v_{\parallel}^{i}}{ZeB} \quad \text{و} \quad R_i=\frac{m_i v_{\perp}^{i}}{ZeB} \quad ، \quad H_e=2\pi\frac{m_e v_{\parallel}^{e}}{eB} \quad \text{و} \quad R_e=\frac{m_e v_{\perp}^{e}}{eB} \qquad (30.2)$$

8.2 حركة شحنة في حقل مغناطيسي غير منتظم

نعتبر حركة شحنة q في حقل مغناطيسي متغير الشدة وفق z. بالتحديد يتزايد بزيادته $\vec{B}(z)=B(z)\,\vec{e}_z$، كما يوضح الشكل(4).

إن نصف قطر الدوران وخطوة الشحنة في الحقل الضعيف كبيران، والعكس عند الحقل الشديد. كما أن السرعة الموازية لحركة الشحنة تضعف شيئا فشيئا كلما اشتد الحقل، حتى إذا صار شديدا فتكاد تنعدم خطوتها وسرعتها الموافقة للحقل. هذه الظاهرة يعتمد عليها في صناعة جهاز المرايا المغناطيسية. نشير إلى وجود هذه الظاهرة في الطبيعة، على الخصوص حركة الشحنات الكونية في حقل المغناطيس الأرضي، حيث



الشكل 4: يبين حركة شحنة في حقل مغناطيسي غير منتظم في اتجاه الحقل

تظل تتحرك فيه أسابيع ذاهبة وراجعة بين القطبين الشمالي والجنوبي، حتى تفرغ من طاقتها الحركية بالتصادم.

9.2 حركة الشحنة q في الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$

نبحث في هذه الفقرة عن حركة الشحنة q في الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ الثابتين. معادلة حركتها هي

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad (31.2)$$

نبحث حل المعادلة (31.2) في حالة تعامد الحقلين.

10.2 حركة الشحنة q في الحقلين الثابتين $\vec{B}\perp\vec{E}$

نلتمس حلا للعلاقة(31.2)، عندما يكون الحقلان متعامدين، على الصورة

$$\vec{v}(t)=\vec{u}(t)+\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} \qquad (32.2)$$

إدخال الحل(32.2) في المعادلة(31.2)، يفضي للعلاقة

$$m\frac{d\vec{u}}{dt}=q\left(\vec{E}+\left\{\vec{u}+\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\right\}\times\vec{B}\right)=q\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right)+\frac{q}{B^2}\left[\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right]$$

وتحليل العلاقة السابقة ينتج

$$\left[\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right]\equiv-\left[\vec{B}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]=-\left[B^2\vec{E}-\left(\vec{B}\cdot\vec{E}\right)\vec{B}\right]=\left(\vec{B}\cdot\vec{E}\right)\vec{B}-B^2\vec{E}$$

ومنه

$$\left[\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right]\equiv-B^2\vec{E}$$

تعويض هذه النتائج يفضي للعلاقة

$$m\frac{d\vec{u}}{dt}=q\left(\vec{u}\times\vec{B}\right) \qquad (33.2)$$

العلاقة (33.2) تصف حركة الشحنة q في الحقل المغناطيسي $\vec{B}$، ولا وجود للحقل الكهربائي فيها البتة. الجدير بالملاحظة هو أن الكمية $\vec{v}_d=\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)/B^2$ هي سرعة انسحاب ثابتة للشحنة q في الحقلين الثابتين المتعامدين. أما السرعة $\vec{u}$ فهي سرعة دوران محض للشحنة q حول الحقل المغناطيسي.

خلاصة البحث

إذا أحست الشحنة q بحقلين كهربائي ومغناطيسي متعامدين وثابتين فإنها:

أ. ينسحب مركز دورانها بالحقل الكهربائي بسرعة ثابتة قدرها $\vec{v}_d=\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)/B^2$، لا تتعلق بالشحنة ولا بالكتلة. مما يعني أن الحقل الكهربائي يجرف الشحنات السالبة والموجبة والخفيفة والثقيلة في اتجاه واحد وبنفس السرعة، كما يبين الشكل(7).

ب. وفي نفس الوقت، تدور الشحنة q على الحقل المغناطيسي بالسرعة $\vec{u}$ على دائرة نصف قطرها ثابت

$$R=\frac{mu}{|q|B} \qquad (34.2)$$

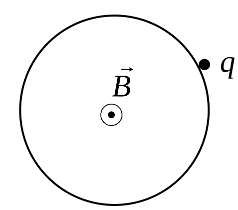
وكأنه لا وجود لحقل كهربائي. تسمى السرعة $\vec{v}_d$ سرعة جرف الشحنة q بالحقل الكهربائي. وتسمى أيضا سرعة مركز الدوران بالحقل الكهربائي. وبما أن الحقلين متعامدين، فإن العلاقة التالية محققة

$$\left|\vec{v}_d\right|=\frac{\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|}{B^2}=\frac{EB}{B^2}=\frac{E}{B} \qquad (35.2)$$

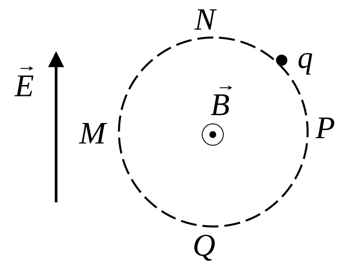
إن جرف الشحنات في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي يعود للحقل الكهربائي. فالشحنة خلال دورانها حول الحقل المغناطيسي تتحرك مرة في اتجاه الحقل الكهربائي ومرة عكسه. عندما تكون في جهة اتجاه الحقل الكهربائي، يزيد من طاقتها وبالتالي من سرعتها، وعندما تكون في جهة تتحرك عكسه فينقص من طاقتها وبالتالي من سرعتها. وبما

أن نصف قطر الدوران يتناسب مع سرعة الدوران، فإن نصف قطر الدوران جهة الحركة في اتجاه الحقل أكبر من نصف القطر جهة الحركة عكس الحقل، كما يبين الشكل(7).

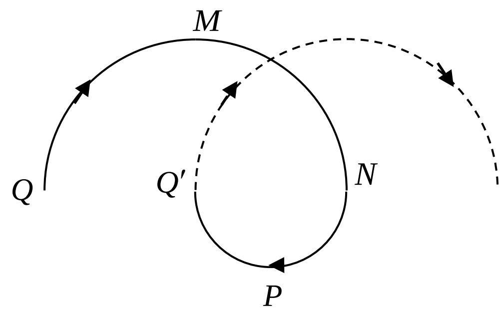
الشحنة q لما تنتقل من النقطة Q في الشكل(6) إلى النقط N مرورا بـ M يزيد الحقل الكهربائي من سرعتها، وبالتالي يزيد من نصف قطر دورانها، فيبدو مسارها كما يوضح الشكل(7). ولما تنتقل الشحنة q من النقطة N إلى النقطة Q مرورا بـ P يكبح الحقل الكهربائي حركتها فيقلل من سرعتها، وبالتالي يقلل من نصف قطرها، فيبدو مسارها كما يوضح الشكل(7). فيمنع الحقل الكهربائية الشحنة من العودة إلى Q، بل تمر بـ Q'. وبالتالي يجرف الحقل الكهربائي الشحنة q، في كل دورة في الحقل المغناطيسي، مسافة QQ'.



الشكل 5: حركة شحنة في حقل $\vec{B}$ ثابت



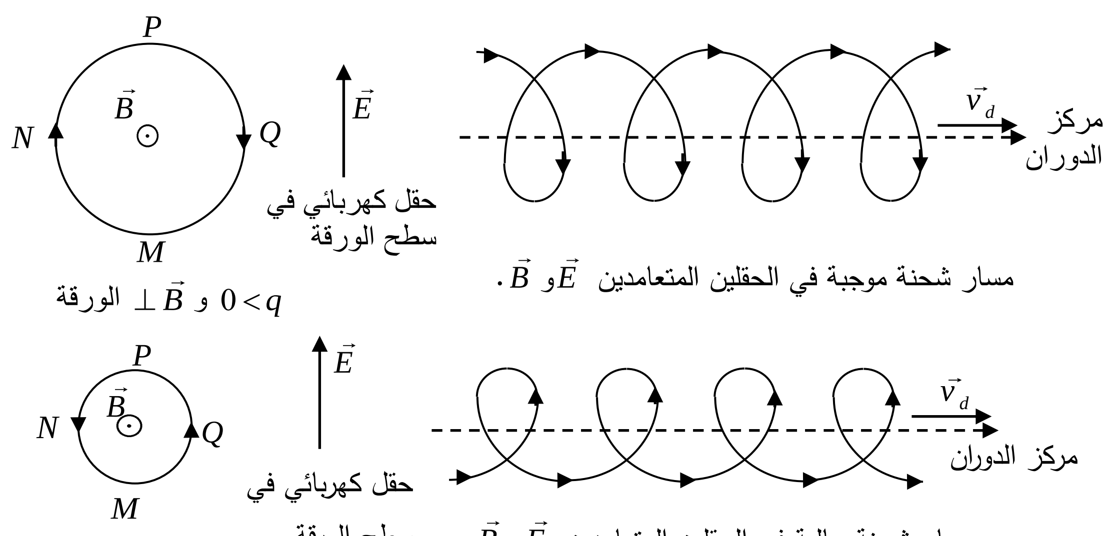
الشكل 6: تتبع حركة شحنة في حقل $\vec{B}$ و $\vec{E}$ ثابتين



الشكل 7: حركة شحنة في حقل $\vec{B}$ و $\vec{E}$ ثابتين

تبين الأشكال(8) جرف الحقل الكهربائي الشحنات الموجبة والسالبة في الحقلين المتعامدين وإذا كان الحقل الكهربائي

حركة q في وجود حقل كهربائي، يجرفها بالسرعة $\vec{v}_d$ — حركة q في غياب حقل كهربائي



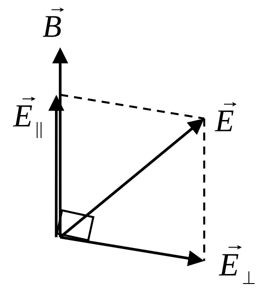
الشكل 8: يبين حركة الشحنة q في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي المتعامدين

الحقل المغناطيسي متعامد على سطح الورقة وخارج منها في اتجاه القاري

ليس متعامدا على الحقل المغناطيسي، كما يبين الشكل(9)، فمركبته العمودية على الحقل المغناطيسي $\vec{E}_{\perp}$، تقوم مقام $\vec{E}$، كما جاء في الجزء السابق من الدرس. والمركبة الموازية $\vec{E}_{\parallel}$ ستسرّع الشحنة وفق الحقل المغناطيسي وعليه

إذا كان الحقل الكهربائي ليس متعامدا على الحقل المغناطيسي سيجرف مركز دوران الشحنة في المستوي العمودي على الحقل المغناطيسي بالسرعة

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2} \tag{36.2}$$



الشكل 9: يبين عدم تعامد الحقل الكهربائي مع الحقل المغناطيسي، ومركبات الحقل الكهربائي

ويجرف، في نفس الوقت، الشحنة بالقوة $q\vec{E}_\parallel$ الشحنة وفق الحقل المغناطيسي. وبالتالي سيتغير مسار الشحنة في الفضاء، بحركتها وفق الحق $\vec{B}$.

ينبغي الإشارة إلى أن الشحنة q تمثل أحد شحنات البلازما. وما يحدث ويقال عن حركة هذه الشحنة يحدث ويقال لكافة شحناتها. الاختلاف سيكون في إشارة الشحنة فقط.

الجدير بالملاحظة أنه من المهم والمفيد جدا القول الشحنة q جرفتها القوة الكهربائية $q\vec{E}$ في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي المتعامدين. من ثم سرعة جرف مركز الدوران بالحقل الكهربائي تصير

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{qB^2} \equiv \frac{\vec{F}_\perp \times \vec{B}}{qB^2} \tag{37.2}$$

للعلاقة (37.2) تطبيقات عديدة وهامة ومساعدة.

جرف الشحنة بحقل الجاذبية

يجرف حقل الجاذبية $\vec{g}$ الشحنة q المتحركة في حقل مغناطيسي $\vec{B}$ ، كما يبين الشكل(10). فمعادلة حركتها في الحقلين هي

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{38.2}$$

ومقارنة معادلة الحركة (38.2) بمعادلة الحركة (31.2) في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي يتبين أن القوة $m\vec{g}$ حلت محل القوة الكهربائية $q\vec{E}$. من ثم يمكننا القول مركز دوران الشحنة على الحقل المغناطيسي سيجرف بقوة الجاذبية بالسرعة

$$\vec{v}_d = \frac{m\vec{g}_\perp \times \vec{B}}{qB^2} \tag{39.2}$$

حيث $\vec{g}_\perp$ هي المركبة العمودية لحقل الجاذبية على الحقل المغناطيسي. من ثم فإن

$$\omega_C = \frac{|q|B}{m} \quad \text{و} \quad v_d = \frac{mg_\perp}{qB} = \frac{g_\perp}{(qB/m)} = \frac{g_\perp}{\omega_C} \tag{40.2}$$

الكمية ω_C هي سرعة زاوية الدوار. الجدير بالملاحظة أن سرعة جرف مركز دوران الشحنات بحقل الجاذبية تتعلق بشحنة. وعليه يجرف الشحنات الموجبة في جهة ويجرف الشحنات السالبة في جهة أخرى. الأمر الذي يؤدي إلى فصل شحنات البلازما. فيتولد حقل راد سيعمل على منع الفصل.

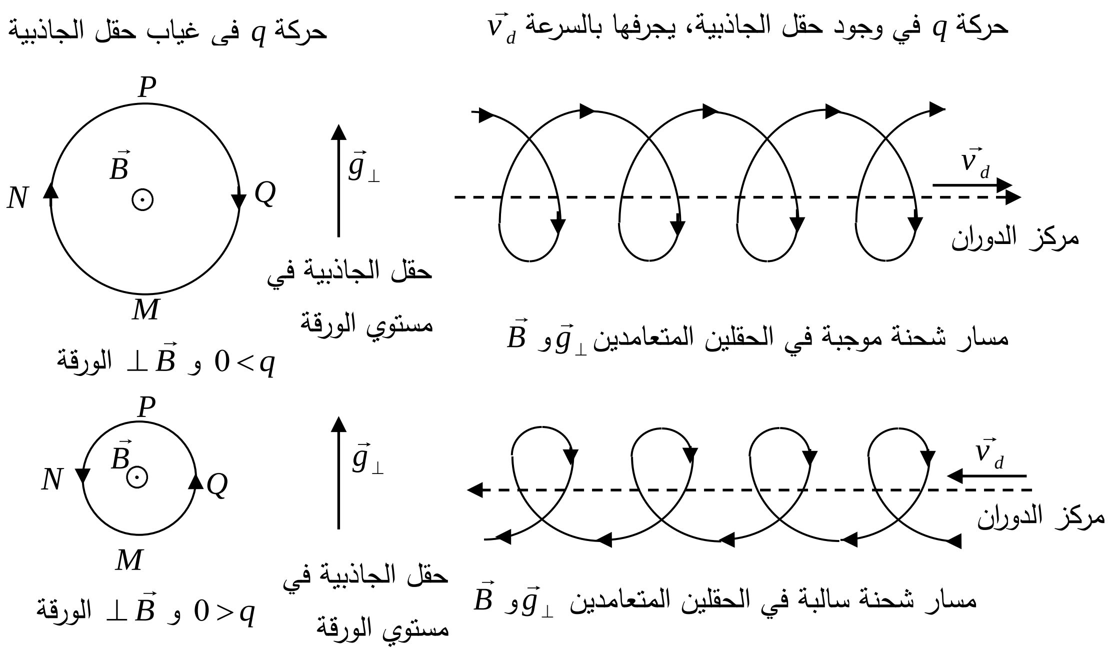
كثافة التيار

إن كثافة تيار شحنات البلازما معرف بالعلاقة

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\rho_i(\vec{r})\vec{v}_i(t)+\rho_e(\vec{r})\vec{v}_e(t) \qquad (41.2)$$

حيث ρ كثافة الشحنات $\rho=nq$ حيث n الكثافة العددية (تعبر عن عدد الأجسام في وحدة الحجم) و q الشحنة الأساسية. أما i و e فيشيران إلى أن مطية الشحنة أيونا أو إلكترونا. من ثم فإن

$$\vec{J}(\vec{r},t)=n^i q^i\left[\frac{m^i\vec{g}_\perp\times\vec{B}}{q^i B^2}\right]+n^e q^e\left[\frac{m^e\vec{g}_\perp\times\vec{B}}{q^e B^2}\right]$$



الشكل 10: يبين حركة الشحنة q في الحقلين المتعامدين الجاذبية والمغناطيسي.
الحقل المغناطيسي متعامد على سطح الورقة وخارج منها في اتجاه القاري

بفرض أن البلازما متعادلة، يعني كمية الشحنة الموجبة يساوي كمية الشحنة السالبة $n=n^e=n^i$. من ثم فإن كثافة تيار البلازما هي

$$\vec{J}(\vec{r},t)=n\left(m^i+m^e\right)\frac{1}{B^2}\left(\vec{g}_\perp\times\vec{B}\right) \qquad (42.2)$$

إن فصل شحنات في البلازما يؤدي إلى توليد حقل كهربائي راد(مرجّع)(معارض للفصل) متجه من الشحنات الموجبة إلى الشحنات السالبة ويعمل على إيقاف الفصل، يسمى الحقل المرجّع أو الراد $\vec{\mathcal{E}}$ (Restoring Field)، تزداد شدته كلما زاد فصل الشحنات. بناء عليه تتعرض شحنات البلازما لقوة مترتبة عن الحقل الراد قدرها $q\vec{\mathcal{E}}$،

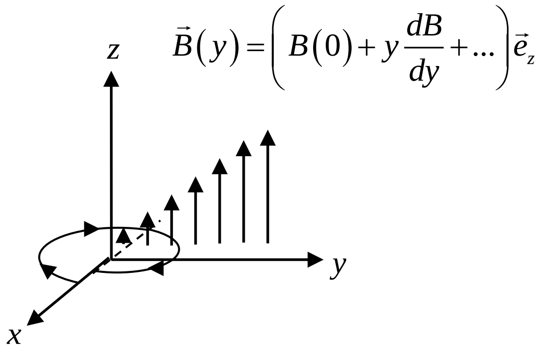
ويترتب على هذه القوة انجراف جماعي لشحنات البلازما في اتجاه واحد، مثلما حدث في جرف الحقل الكهربائي آنفا

$$\vec{v}'_{\perp} = \frac{1}{B^2}\left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}\right) \tag{43.2}$$

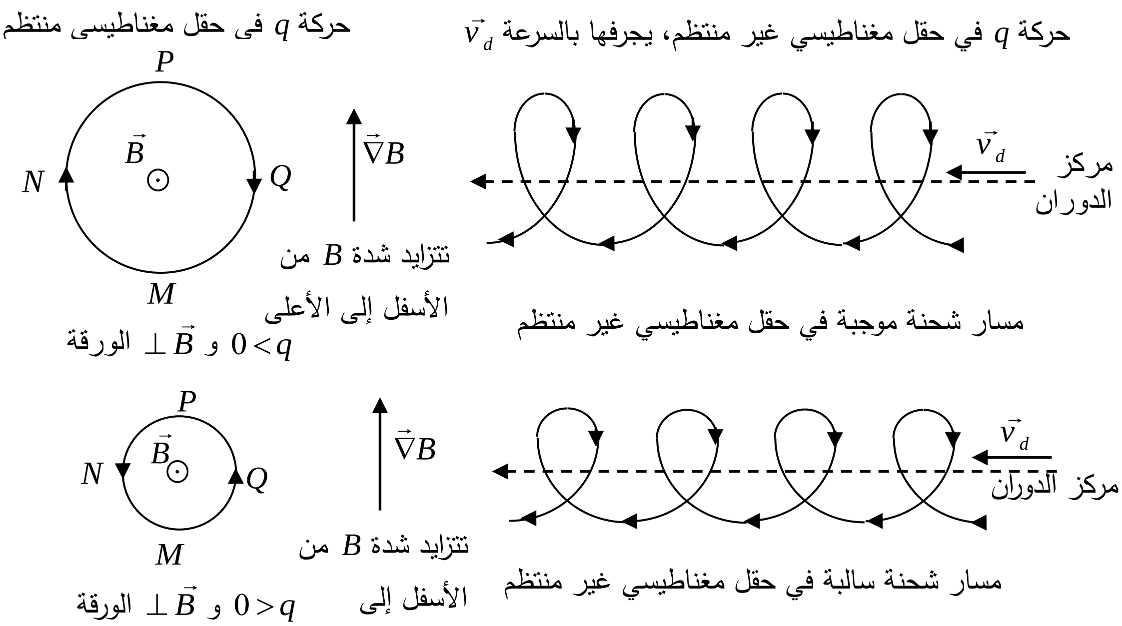
حيث الآن الحقل الكهربائي $\vec{\varepsilon}$ هو الحقل الراد

جرف الشحنات بحقل $\vec{B}$ غير منتظم $\vec{\nabla} B$

الشحنة المتحركة في حقل مغناطيسي $\vec{B}(\vec{r})$ غير المنتظم يجرفها بتدرجه $\vec{\nabla} B$. يبين الشكل(11) حقلا غير منتظم وفق y ويتزايد بزيادتها. فيجرف الشحنة الموجبة عكس x والسالبة وفق x.



الشكل 11: يبين الحقل $\vec{B}(y)$ يتزايد بتزايد y وعدم انتظامه يتسبب في جرف q



الشكل 12: يبين حركة الشحنة q في حقل مغناطيسي غير منتظم. الحقل المغناطيسي متعامد على سطح الورقة وخارج منها صوب القاري. تتزايد شدة الحقل من أسفل الورقة إلى أعلاها

يبين الشكل(12) مسار الشحنة في الحقل المغناطيسي غير المنتظم. الغاية في هذه الفقرة هي تعيين سرعة جرف الشحنة الناتجة عن تدرج $B(y)$. فمعادلة حركة الشحنة q في الحقل المغناطيسي هي

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{44.2}$$

إن نشر الحقل المغناطيسي حول $\vec{r}=0$ هو

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\vec{B}_0+\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\cdots \qquad (45.2)$$

حيث $\vec{B}_0=\vec{B}\left(0\right)$ منتظم. ومادام الحقل يتعلق بالإحداث y فقط، تصير العلاقة (44.2) العلاقة

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right)=B_z\left(y\right)\vec{e}_z=B_0\vec{e}_z+y\frac{dB}{dy}\vec{e}_z+\cdots\equiv\left(B_0+y\nabla_{\perp}B+\cdots\right)\vec{e}_z \qquad (46.2)$$

إدخال العلاقة (46.2) في معادلة الحركة (44.2)، يفضي للعلاقة

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{v}\times\vec{e}_zB_0\right)+q\left(\vec{v}\times\vec{e}_zy\nabla_{\perp}B\right) \qquad (47.2)$$

الجدير بالملاحظة هو أن القوة المهيمنة على الحركة هي $q\left(\vec{v}\times\vec{B}_0\right)$، والقوة التي تعود لعدم انتظام الحقل هي

$$\vec{F}=q\left(\vec{v}\times\vec{e}_zy\nabla_{\perp}B\right) \qquad (48.2)$$

وتحليل العلاقة (48.2) على المحاور يفضي للعلاقات

$$F_z=0 \text{ ،} F_y=q\left(\vec{v}\times\vec{e}_z y\nabla_{\perp}B\right)_y=-qv_x y\nabla_{\perp}B_z \text{ ،} F_x=q\left(\vec{v}\times\vec{e}_z y\nabla_{\perp}B\right)_x=qv_y y\nabla_{\perp}B_z \qquad (49.2)$$

حساب السرعة $\vec{v}$ والإحداثية y، وتحليل معادلة الحركة غير المضطربة هو

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}_0\right) \qquad (50.2)$$

فيفضي للعلاقات

$$\frac{dv_z}{dt}=0 \text{ ،} \frac{dv_y}{dt}=\frac{q}{m}\left(\vec{v}\times\vec{B}_0\right)_y=-\omega_c v_x \text{ ،} \frac{dv_x}{dt}=\frac{q}{m}\left(\vec{v}\times\vec{B}_0\right)_x=\omega_c v_y \qquad (51.2)$$

حيث $\omega_c\equiv\left(qB_0/m\right)$ هي سرعة زاوية الدوار. ضرب العلاقة الثانية من (51.2) في i ثم جمعها مع العلاقة الأولى، ثم رتبه، تجد

$$\frac{dv_x}{dt}+i\frac{dv_y}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v_x+iv_y\right)=-i\,\omega_c\left(v_x+iv_y\right)$$

وتكتب على الصورة

$$\frac{d}{dt}\left(v_x+iv_y\right)+i\,\omega_c\left(v_x+iv_y\right)=\frac{d}{dt}\left[\left(v_x+iv_y\right)e^{i\omega_c t}\right]=0$$

وبعد إجراء التكامل نحصل على مركبات سرعة وإحداثيات الشحنة q

$$v_z\left(t\right)=0 \text{ ،} v_y\left(t\right)=-v_{\perp}\sin\omega_c t \text{ ،} v_x\left(t\right)=v_{\perp}\cos\omega_c t \qquad (52.2)$$

لقد وجهنا جملة المحاور بحيث $v_y\left(0\right)=0$ و $v_x\left(0\right)\equiv v_{\perp}$، من ثم فإن

$$z\left(t\right)=0 \text{ ،} y\left(t\right)=\frac{v_{\perp}}{\omega_c}\cos\omega_c t \text{ ،} x\left(t\right)=\frac{v_{\perp}}{\omega_c}\sin\omega_c t \qquad (53.2)$$

ادخل السرعات والإحداثيات في العلاقة (49.2)، تحصل على مركبات القوة

$$F_x=q\left(-v_{\perp}\sin\omega_c t\right)\left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c}\cos\omega_c t\right)\nabla_{\perp}B_z\equiv-q\frac{v_{\perp}^2}{\omega_c}\sin\omega_c t\cos\omega_c t\;\;\nabla_{\perp}B_z \qquad (54.2)$$

$$F_y = -q\left(v_\perp \cos\omega_c t\right)\left(\frac{v_\perp}{\omega_c}\cos\omega_c t\right)\nabla_\perp B_z \equiv -q\frac{v_\perp^2}{\omega_c}\cos^2\omega t\ \nabla_\perp B_z \tag{55.2}$$

واضح أن القوة الناتجة عن تدرج B تتعلق بالزمن (قوة آنية). حذف التغير الآني للقوة يتم باعتبار قيمتها المتوسطة على دور المعرف بالعلاقة

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt f\ (t) \tag{56.2}$$

يمكننا إثبات أن $\langle F_x\rangle = f_x = 0$، وحساب متوسط F_y يتم كما يلي

$$\langle F_y\rangle = -q\frac{v_\perp^2}{\omega_c}\nabla_\perp B_z\ \frac{1}{T}\int_0^T dt\cos^2\omega_c t \equiv -q\frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\nabla_\perp B_z \tag{57.2}$$

وعليه، القوة التي تتلقاها الشحنة q نتيجة حركتها في حقل مغناطيسي غير منتظم في الفضاء هي

$$\vec{f} = -q\frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\nabla_\perp B_z\ \vec{e}_y \tag{58.2}$$

والسرعة جرف الشحنة q المترتبة على عدم انتظام الحقل المغناطيسي، حسب العلاقة (37.2)، هي

$$\vec{v}_d = \frac{1}{qB^2}\left(\vec{F}_\perp\times\vec{B}\right) = \frac{1}{qB_0^2}\left(\vec{f}\times\vec{B}_0\right) = -\frac{1}{qB_0^2}\left(q\frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\nabla_\perp B_z\right)B_0\ \vec{e}_x$$

وطولها يساوي

$$v_d = \frac{1}{qB_0^2}\left(q\frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\nabla_\perp B_z\right)B_0 \equiv \frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\frac{\nabla_\perp B}{B_0} = \frac{mv_\perp^2}{2qB_0}\frac{\nabla_\perp B}{B_0} = \frac{E_C^\perp}{qB_0^2}\nabla_\perp B$$

من ثمّ، سرعة جرف q بالتدرج $\nabla_\perp B$ هي

$$v_d = \frac{E_C^\perp}{qB_0^2}\nabla_\perp B \tag{59.2}$$

حيث $E_C^\perp$ هي طاقة حركة الشحنة العمودية على الحقل المغناطيسي، صورة شعاع سرعة جرف الشحنة q بواسطة $\nabla_\perp B$ هل

$$\vec{v}_d = \frac{E_C^\perp}{qB^3}\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}_\perp B\right) \tag{60.2}$$

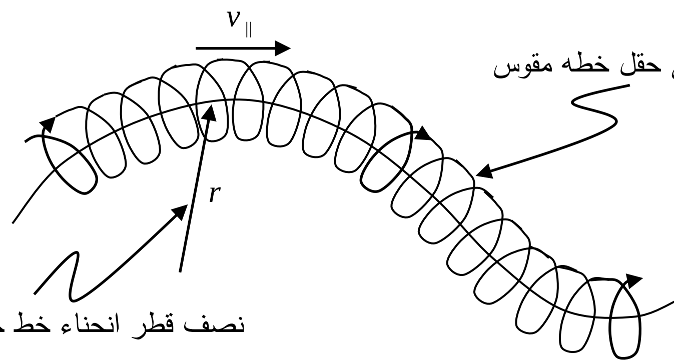
هكذا بين البحث أن الحقل المغناطيسي غير المنتظم في الفضاء يجرف الشحنة المتحركة فيها، كما تظهر العلاقة (60.2) والشكل(12). كما بين البحث أن سرعة جرفها تتناسب مع طاقة حركتها العمودية عليه $E_C^\perp$، وتدرجه. هذا الذي يحدث لكل شحنة البلازما.

الجدير بالملاحظة أن سرعة الجرف الناتجة عن $\nabla_\perp B$ تتعلق بالشحنة q، الأمر الذي يترتب عليه فصل الشحنات. وبالتالي يظهر حقل راد في البلازما. من ثم يترتب عليه تذبذب في البلازما.

جرف بتقوس خطوط الحقل $\vec{B}$

هناك جرف لشحنات البلازما يعود لتقوس خطوط حقل $\vec{B}$. ولإظهاره نعتبر شحنة عالقة بخط حقل مغناطيسي

مقوس، كما يبين الشكل(13). الشحنة التي هذه حركتها متسرعة، وتسارعها الناظم هو



الشكل 13: يبين حقلا مغناطيسي عمودي على الورقة وخارج منها على تعامد على سطحها. وغير منتظم في اتجاه y

$$a_N = \frac{v_{\parallel}^2}{r}$$

وعليه القوة التي تتلقاها الشحنة جراء تقوس خط الحقل هي

$$\vec{F} = ma_N \vec{e}_N = -m\frac{v_{\parallel}^2}{r}\vec{e}_r \qquad (61.2)$$

وسرعة جرف الشحنة جراء تقوس خط الحقل، حسب العلاقة (37.2)، هي

$$\vec{v}_d = \frac{1}{qB^2}\left(-m\frac{v_{\parallel}^2}{r}\vec{e}_r \times \vec{B}\right) = \frac{2E_C^{\parallel}}{qB^2 r^2}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right) \qquad (62.2)$$

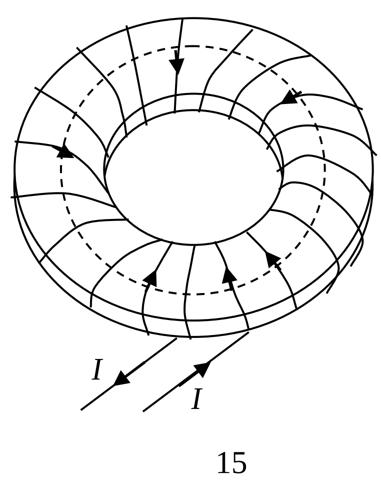
وطولها هو (63.2) $v_d = \frac{2E_C^{\parallel}}{qBr}$

هكذا تمكنا من حساب سرعة جرف الشحنات العائد لتقوس خط الحقل $\vec{B}$. الجدير بالملاحظة أن سرعة الجرف هذه تتناسب مع طاقة حركتها وفق خط الحقل $E_C^{\parallel}$.

قد يكون الحقل $\vec{B}$ غير منتظم وخطوطه مقوسة. عندئذ طول سرعة الجرف في هذا الحقل هي

$$v_d = \frac{2E_C^{\parallel}}{qrB} + \frac{E_C^{\perp}\nabla_{\perp}B}{qB^2} = \frac{1}{qB}\left(\frac{2E_C^{\parallel}}{r} + E_C^{\perp}\frac{\nabla_{\perp}B}{B}\right) \qquad (64.2)$$

حساب النسبة $\frac{\nabla_{\perp}B}{B}$ لحالة خاصة. أعتبر مسألة العصبة المبينة على الشكل (14)، وهي عبارة عن ملف دائري



الشكل 14: يبين عصبة لف عليها n لفة يسري بها التيار I

الشكل عليه n لفة، نصف قطره الداخلي R_1 والخارجي R_2. اعتبر المسار الدائري (المنقط) نصف قطره r، $R_1 \le r \le R_2$. اعتمادا على نظرية تجول الحقل المغناطيسي

$$\oint d\vec{\ell} \cdot \vec{B} = \mu_0 I'$$

حيث التجول يكون على مسار مغلق وكيفي، و I' يعرب عن التيارات التي يحيط بها المسار المنقط، وهو دائري هنا نصف قطره. بما أن r ثابت أثناء التجول، فإن الطول $B(r)$ ثابت أيضا، والحقل مماس للدائرة. من ثم

$$\oint d\vec{\ell} \cdot \vec{B} = \mu_0 I' = B(r)(2\pi r) = \mu_0 (nI)$$

ومنه

$$B(r) = \frac{\mu_0 nI}{2\pi r}$$

ومشتقها

$$\frac{dB}{dr} = \frac{\mu_0 nI}{2\pi r^2} = \frac{B}{r} \equiv \nabla_\perp B$$

لقد أسقطت الإشارة لعدم أهميتها في هذا الموضوع، وعليه

$$\frac{\nabla_\perp B}{B} \equiv \frac{1}{r}$$

إدخال النتيجة في العلاقة (64.2) ، تكون النتيجة التالية

$$v_d = \frac{1}{qB}\left(E_C^{\parallel}\frac{2}{r} + E_C^{\perp}\frac{\nabla_\perp B}{B}\right) = \frac{1}{qB}\left(\frac{2E_C^{\parallel}}{r} + \frac{E_C^{\perp}}{r}\right) = \frac{1}{qBr}\left(2E_C^{\parallel} + E_C^{\perp}\right) \qquad (65.2)$$

من جهة أخرى $E_C^{\perp}$ هي الطاقة الحركية للشحنة في المستوي العمودي للحقل $\vec{B}$، فهي تعبر عن حركة ذات درجتين من الحرية، و $E_C^{\parallel}$ يعبر عن حركة الشحنة وفق $\vec{B}$ فهي تعبر عن حركة ذات درجة والحدة من الحرية. ومن أجل بلازما في حالة استقرار حراري، فإن طاقة كل درجة من الحرية هي $(kT/2)$، من ثم، فإن

$$E_C^{\perp} = \frac{1}{2}mv_\perp^2 = 2\left(\frac{1}{2}kT\right) \quad ، \quad E_C^{\parallel} = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 = \frac{1}{2}kT \qquad (66.2)$$

ندخل كل ذلك في سرعة جرف شحنات البلازما في حقل خطوطه منحنية وغير منتظم، فتغدو العلاقة

$$v_d = \frac{1}{qBr}\left(2E_C^{\parallel} + E_C^{\perp}\right) = \frac{1}{qBr}\left(2\left(\frac{1}{2}kT\right) + 2\left(\frac{1}{2}kT\right)\right)$$

وعليه، فإن

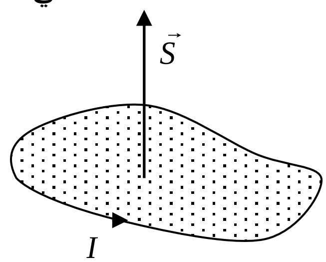
$$v_d = \frac{2kT}{qBr} \qquad (67.2)$$

العلاقة (67.2) تعبر عن سرعة جرف شحنة من شحنات البلازما بحقل مغناطيسي غير منتظم وخطوطه مقوسة والتي هي في حالة استقرار حراري، حيث r هو نصف قطر تقوس خط الحقل المغناطيسي.

عزم الثنائي القطب المغناطيسي لشحنة q في حقل $\vec{B}$

نواصل البحث عن خواص حركة شحنة في حقل مغناطيسي. نلتفت إلى تعيين عزم الثنائي القطب

المغناطيسي لحركة الشحنة q في الحقل $\vec{B}$. وهو مضروب التيار I في شعاع سطح العروة $\vec{\mu}=I\vec{S}$.



الشكل 15: يبين عروة تيار، حيث $|\vec{S}|$ هو مساحة العروة المنقطة.

التيار هنا هو المترتب عن حركة الشحنة q حول الحقل $\vec{B}$. وبما أن مسار الشحنة في الحقل دائري نصف قطره R، فالتيار المترتب عن سرعتها هو

$$I=\frac{q}{T}=\frac{qv_{\perp}}{2\pi R} \tag{68.2}$$

إدخال التيار في عبارة عزم الثنائي القطب، تغدو العبارة

$$\mu=IS=\frac{q}{T}\left(\pi R^2\right)=\frac{qv_{\perp}}{2\pi R}\left(\pi R^2\right)=\frac{qv_{\perp}}{2}R=\frac{qv_{\perp}}{2}\frac{mv_{\perp}}{qB}=\frac{1}{2}\frac{mv_{\perp}^2}{B}=\frac{E_C^{\perp}}{B} \tag{69.2}$$

وهو عزم الثنائي القطب المغناطيسي لحركة شحنة q من البلازما في الحقل $\vec{B}$. علاقته بطاقة حركة الشحنة العمودية على الحقل وشدته واضحة. يمكننا أن نعبر عن عزم الثنائي القطب بدلالة تدفق الحقل $\vec{B}$

$$\mu=IS=\frac{q}{T}\left(\pi R^2\right)=\frac{qv_{\perp}}{2\pi RB}\left\{B\left(\pi R^2\right)\right\}=\frac{q^2\Phi}{2\pi m} \tag{70.2}$$

حيث $\Phi\equiv B\left(\pi R^2\right)$ هو تدفق الحقل B عبر سطح الدائرة التي دارت عليها الشحنة حول الحقل. هكذا بينا أن عزم الثنائي القطب المغناطيسي لشحنة متحرك في حقل مغناطيسي متعلقة بطاقة حركتها العمودية والتدفق، من ثمّ

$$\mu=\frac{E_C^{\perp}}{B}=\frac{q^2\Phi}{2\pi m} \tag{71.2}$$

من ناحية أخرى، الدفع الزاوي لحركة الشحنة في الحقل المغناطيسي ثابت حركة. للوقوف على ذلك، تفطن إلى أن القوة المغناطيسية المؤثرة على الشحنة مركزية. يعني موازية لموضعها. وبالتالي

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=\vec{\tau}=0$$

من ثم فإن $\vec{L}$ ثابت حركة. كما أن طاقة الحركة، وحسب العلاقة السابقة ثابتة حركة أيضا. فعبارة الدفع الزاوي هي

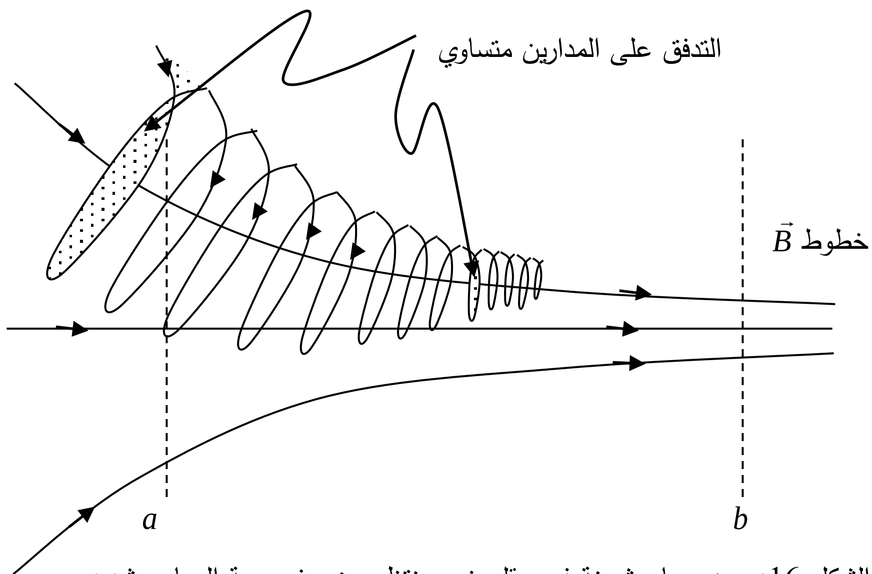
$$L=\left|\vec{r}\times\vec{p}_{\perp}\right|=\frac{mv_{\perp}}{qB}\left(mv_{\perp}\right)=m\frac{mv_{\perp}^2}{qB}=\frac{2m}{q}\frac{E_C^{\perp}}{B} \tag{72.2}$$

هذا يقودنا إلى غاية هذا الموضوع وهو أن

$$L=\frac{2m}{q}\frac{E_C^{\perp}}{B}=\frac{2m}{q}\mu=\text{ثابت} \tag{73.2}$$

النتيجة الباهرة هنا هي أن عزم الثنائي القطب المغناطيسي لحركة شحنة من البلازما في حقل مغناطيسي ثابت

حركة. انظر الشكل(16). ليس هذا فحسب، بل حتى تدفق الحقل المغناطيسي Φ عبر عروة



الشكل 16: يبين مسار شحنة في حقل غير منتظم، ضعيف جهة اليسار وشديد جهة اليمين. تدفق الحقل المغناطيسى على كل مدار Φ ثابت ويساوى $\pi R^2 B$

مركزها الحقل $\vec{B}$ ثابت حركة أيضا. هكذا تتحرك شحنات البلازما في الحقول المغناطيسية بحيث تحافظ على عزم ثنائي قطبها المغناطيسي رغم عدم انتظام الحقول. وعليه العلاقة

$$\mu = \frac{E_C^{\perp}}{B} = \frac{q^2\Phi}{2\pi m} = \frac{q^2}{2\pi m} B\left(\pi R^2\right) = \text{ثابت} \qquad (74.2)$$

نستنتج مما تقدم ما يلي:

أ. إذا زادت شدة الحقل تزيد معها طاقة الحركة $E_C^{\perp}$ وبالتالي $v_{\perp}$، حتى يظل μ ثابت.

ب. أن الشحنة تتحرك في الحقل $\vec{B}$ بحيث يظل تدفقه عبر سطح مدارها ثابت حركة

$$B\,R^2 = \text{ثابت} \qquad (75.2)$$

وعليه إذا اشتد الحقل يقل نصف قطر الدوران حول الحقل، والعكس صحيح. بناء على ما تقدم، واستنادا إلى الشكل(16) فإن العلاقتين صحيحتين

$$\frac{E_{Ca}^{\perp}}{B_a} = \frac{E_{Cb}^{\perp}}{B_b} = \text{ثابت} \qquad \text{و} \qquad B_a R_a^2 = B_b R_b^2 = \text{ثابت} \qquad (76.2)$$

انعكاس الشحنة q في الحقل $\vec{B}$

أشرنا مرارا أن طاقة حركة الشحنة في الحقل المغناطيسي ثابتة، لان القوة المغناطيسية لا تقدم عملا. لذلك يحق أن نكتب، انظر الشكل(16)

$$E_{Ca}^{\perp} + E_{Ca}^{\parallel} = E_{Cb}^{\perp} + E_{Cb}^{\parallel} \qquad \text{أو} \qquad E_{Ca} = E_{Cb} \qquad (77.2)$$

نحذف الطاقة الحركية $E_{Cb}^{\perp}$ باستخدام العلاقتين (75.2) و(77.2)، فنجد العلاقة

$E_{Ca}^{\perp}+E_{Ca}^{\parallel}=\frac{B_b}{B_a}E_{Ca}^{\perp}+E_{Cb}^{\parallel}$ وبعد ترتيبها نجد العلاقة

$$E_{Cb}^{\parallel}=E_{Ca}^{\parallel}-\left(\frac{B_b}{B_a}-1\right)E_{Ca}^{\perp} \qquad (78.2)$$

يتضح من العلاقة (78.2) أن الطرف الأيمن يمكن أن يكون موجبا أو معدوما أو سالبا بحسب قيمة النسبة $\left(B_b/B_a\right)$

أ. $E_{Ca}^{\parallel}>\left(\frac{B_b}{B_a}-1\right)E_{Ca}^{\perp}$ معناه $E_{Cb}^{\parallel}>0$، الشحنة تستمر في الحركة إلى يمين جهة b.

ب. $E_{Ca}^{\parallel}=\left(\frac{B_b}{B_a}-1\right)E_{Ca}^{\perp}$، معناه $E_{Cb}^{\parallel}=0$، الشحنة تقف جهة b ولا تستمر في الحركة.

ج. $E_{Ca}^{\parallel}<\left(\frac{B_b}{B_a}-1\right)E_{Ca}^{\perp}$، معناه $E_{Cb}^{\parallel}<0$، الشحنة عكست حركتها جهة b فارتدت. إذ لا توجد طاقة حركة سالبة.

فالحالة (ج) تبين أن انعكاس الشحنات في الحقل الشديد لتعود للحقول الضعيفة ممكنة، إذا تحقق الشرط

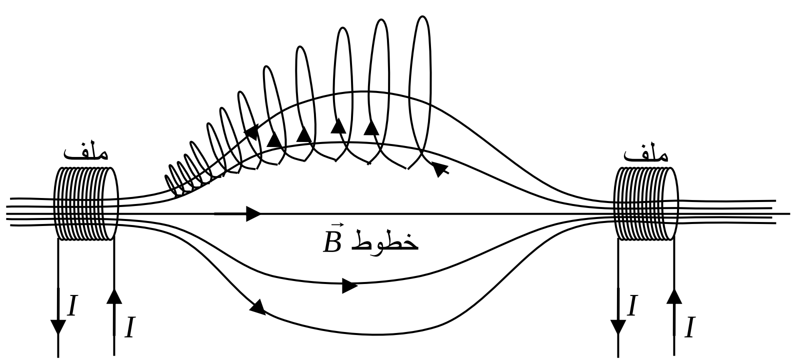
$$\frac{E_{Ca}^{\parallel}}{E_{Ca}^{\perp}}+1<\frac{B_b}{B_a} \quad \text{،} \quad \text{أو} \quad \frac{E_C}{E_{Ca}^{\perp}}<\frac{B_b}{B_a} \qquad (79.2)$$

بنيت آلات أساسها الحقول الشديدة يعكس حركة الشحنات إذا توفر الشرط (79.2). تستعمل لاحتواء البلازما.

المرايا المغناطيسية

المرايا المغناطيسية آلة صممت على أساس الشرط (79.2)، كما يبين الشكل(17)، تنعكس حركة الشحنات فيها كلما وصلت احد الملفين. اختيار التيار I وعدد لفات الملفين كفيلين بأن يحقق الشرط المذكور. الحقل شديد فائق الشدة عند الملفين وضعيف بينهما.

تصور أن شحنة وجدت داخل الجهاز، ستعلق بخط حقل مقتربة من أحد الملفين، حتي إذا وصلت إلى الحد الذي يتحقق فيه الشرط(79) تعكس حركتها. فتعود مبتعدة وتقترب من الملف الثاني. تصور



الشكل 17: يبين مبدأ المرايا المغناطيسية

بلازما وضعت في جهاز المرايا المغناطيسية، ستتحرك شحناتها رائحة وراجعة بين الملفين محافظة على الطاقة الحركية. فالمرايا هي أحد الأجهزة القليلة التي تحتوي البلازما.

تعيين خصائص البلازما خفيفة الكثافة

نبحث هاهنا عن خصائص كهربائية ومغناطيسية لبلازما. بما أنها وسط مكهرب تتحرك فيه شحنات في حقول كهربائية ومغناطيسية، فلابد من أن تتميز بحركية وناقلية وثابت وسط كهربائي وأمواج. تعيين هذه المعاني يتوقف على إطار الحساب الذي سيعالج به حركة شحناتها.

سنقوم بتعيين خصائص البلازما في إطار حركة الجسم المفرد. على العموم يفضل اجراء في ساحة مقلوب الفضاء (ساحة مقلوب البعد)، لهذا السبب نقوم بتحول الحقول والكمونات والسرعات من فضاء المكان والزمن $(\vec{r},t)$، فضاء الهيأة، إلى مقلوبه $(\vec{k},\omega)$ على المنوال التالي. نرمز لأحد الدوال في فضاء المكان والزمان بالدالة $F(\vec{r},t)$ ونرمز لصورتها في مقلوبه بالدالة $F(\vec{k},\omega)$. التحويل المباشر والتحويل المعاكس معرف بالعلاقات:

$$F(\vec{r},t)=\int d\omega\int d^3k\,F(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \text{والعكس} \quad F(\vec{k},\omega)=\int dt\int d^3r\,F(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (80.2)$$

تحقق من صحة العلاقات

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=i\vec{k}\cdot\vec{F},\qquad \vec{\nabla}\times\vec{F}=i\vec{k}\times\vec{F},\quad \frac{\partial F}{\partial t}=-i\omega F \qquad (81.2)$$

إدخال العلاقات(81.2) في معادلات ماكسويل ومعادلة الحركة كلما ظهر ذلك. فمعادلة حركة الشحنة q

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (82.2)$$

تصير في الفضاء المعاكس

$$-im\omega\,\vec{v}=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (83.2)$$

حيث الحقول في العلاقة (83.2) هي $\vec{E}(\vec{k},\omega)$ و $\vec{B}(\vec{k},\omega)$ والسرعة $v(\vec{k},\omega)$. يمكننا توجيه جملة المحور بحيث $\vec{B}=B_z\vec{e}_z=B\vec{e}_z$، وذلك لتبسيط التحليل دون أي إضرار بالمسألة. وتحليل العلاقة (83.2) على جملة المحاور هو

$$\begin{aligned}-im\omega\,v_x&=qE_x+q(\vec{v}\times\vec{B})_x=qE_x+qv_yB\\ -im\omega\,v_y&=qE_y+q(\vec{v}\times\vec{B})_y=qE_y-qv_xB\\ -im\omega v_z&=qE_z+q(\vec{v}\times\vec{B})_z=qE_z\end{aligned} \qquad (84.2)$$

وبعد ترتيبها نحصل على جملة المعادلات

$$\begin{aligned}-i\omega\,v_x-\omega_c v_y&=\frac{q}{m}E_x\\ \omega_c v_x-i\omega\,v_y&=\frac{q}{m}E_y\\ -i\omega\,v_z&=\frac{q}{m}E_z\end{aligned} \qquad (85.2)$$

حيث اتخذنا الرمز $\omega_c \equiv (|q| B/m)$، وتسمى تواتر الدوار. نضع العلاقة (85.2) على صورة مصفوفة، تهيئة لحلها.

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -\omega_c \\ \omega_c & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \qquad (86.2)$$

$$v_z = \frac{iq}{m\omega} E_z$$

وحساب مركبات السرعة بدلالة مركبات الحقل الكهربائي يقود للعلاقات

$$v_x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{q}{m}E_x & -\omega_c \\ \frac{q}{m}E_y & -i\omega \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad v_x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -i\omega & \frac{q}{m}E_x \\ \omega_c & \frac{q}{m}E_y \end{vmatrix} \quad \text{حيث} \quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} -i\omega & -\omega_c \\ \omega_c & -i\omega \end{vmatrix} \qquad (87.2)$$

وحل العلاقات السابقة هو

$$v_x = \frac{(q/m)}{\omega_c^2 - \omega^2}\left(-i\omega E_x + \omega_c E_y\right) \quad \text{و} \quad v_y = \frac{-(q/m)}{\omega_c^2 - \omega^2}\left(\omega_c E_x + i\omega E_y\right) \quad \text{و} \quad v_z = \frac{iq}{m\omega} E_z \qquad (88.2)$$

هكذا تمكنا من حساب مركبات سرعة الشحنة q بدلالة الحقلين الكهربائي والمغناطيسي.

حركيّة البلازما

حركيّة البلازما هي ميزة تتمتع بها. وهي معرفة بكونها معامل تناسب بين سرعة شحنة والحقل الكهربائي

$$\vec{v} \equiv \underline{\underline{\mu}} \cdot \vec{E} \qquad (89.2)$$

الكمية $\underline{\underline{\mu}}$ هي موترة حركيّة البلازما. الموترات (مصفوفات ذات خصائص معينة إزاء التحويلات). وجداها مع شعاع الحقل يسمى جداء موتّر، ومعنى العلاقة (89.2) هو

$$v_\alpha \equiv \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} E_\beta \quad ، \quad \alpha, \beta = x, y, z \qquad (90.2)$$

ومنه

$$\begin{aligned} v_x &\equiv \mu_{xx}E_x + \mu_{xy}E_y + \mu_{xz}E_z \\ v_y &\equiv \mu_{yx}E_x + \mu_{yy}E_y + \mu_{yz}E_z \\ v_z &\equiv \mu_{zx}E_x + \mu_{zy}E_y + \mu_{zz}E_z \end{aligned} \qquad (91.2)$$

وإذا قارنا العلاقات (88.2) بالعلاقة (91.2) يتبين أن

$$\begin{aligned} &\mu_{xx} = \frac{-i\,\omega(q/m)}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad ، \quad \mu_{xy} = \frac{\omega_c (q/m)}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad ، \quad \mu_{xz} = 0 \\ &\mu_{yx} = \frac{-\omega_c (q/m)}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad ، \quad \mu_{yy} = \frac{-i\,\omega(q/m)}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad ، \quad \mu_{yz} = 0 \\ &\mu_{zx} = 0 \quad ، \quad \mu_{zy} = 0 \quad ، \quad \mu_{zz} = \frac{i\,(q/m)}{\omega} \end{aligned} \qquad (92.2)$$

وموترة حركيّة البلازما في حالة الجسم المفرد هي:

$$(\mu)_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} -\frac{i\,(q/m)\,\omega}{\omega_c^2-\omega^2} & \frac{(q/m)\,\omega_c}{\omega_c^2-\omega^2} & 0 \\ -\frac{(q/m)\,\omega_c}{\omega_c^2-\omega^2} & \frac{-i\,(q/m)\,\omega}{\omega_c^2-\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i\,(q/m)}{\omega} \end{pmatrix} \equiv \frac{i\,(q/m)}{\omega}\begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2} & \frac{-i\,\omega_c\omega}{\omega_c^2-\omega^2} & 0 \\ \frac{i\,\omega_c\omega}{\omega_c^2-\omega^2} & \frac{-\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (93.2)$$

تأمل في حدود الموترة (93.2) تجدها تعبر عن خصائص البلازما. فـω هي تواتر حقول البلازما و ω_c هو تواتر الدوار للبلازما. فهي بحق خاصية تتمتع بها البلازما.

ناقلية البلازما

البلازما تتميز ناقلية. وهي تعبر عن كهربة جو البلازما. وهي معرفة بكونها معامل تناسب بين كثافة تيار الشحنات والحقل الكهربائي

$$\vec{J}\equiv\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{E} \quad (94.2)$$

الكمية $\underline{\underline{\sigma}}$ هي ناقلية البلازما وهي عبارة عن موترة(مصفوفة ذات خصائص معينة إزاء التحول) وجداها مع شعاع الحقل يسمى جدا موتّر، ومعنى العلاقة (94.2) يعرف من تحليلها هو

$$\alpha,\beta=x,y,z \quad ، \quad J_\alpha\equiv\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}E_\beta \quad (95.2)$$

$$\begin{aligned} J_x &\equiv\sigma_{xx}E_x+\sigma_{xy}E_y+\sigma_{xz}E_z \\ J_y &\equiv\sigma_{yx}E_x+\sigma_{yy}E_y+\sigma_{yz}E_z \\ J_z &\equiv\sigma_{zx}E_x+\sigma_{zy}E_y+\sigma_{zz}E_z \end{aligned} \quad (96.2)$$

من ناحية أخرى كثافة تيار الشحنات معرف بالعلاقة

$$\vec{J}=\rho\,\vec{v} \quad (97.2)$$

حيث $\vec{v}$ هي سرعة شحنات البلازما و ρ هي كثافة الشحنات الحجمية. معلوم أن العلاقة بين الكثافة الحجمية والكثافة العددية هي $\rho=q\,n$، حيث n هي الكثافة العددية، وهي تعرب عن عدد شحنات البلازما في وحدة الحجم، و q شحنة أيون أو إلكترون. في حال الإلكترونات تصير $(-e)$وفي حالة البروتونات تصير (e) وفي حالة الايونات تصير (Ze). يمكن ربط العلاقة (96.2) بحركية البلازما على الصورة التالية

$$\vec{J}=nq\vec{v}\equiv nq\underline{\underline{\mu}}\cdot\vec{E}=\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{E} \quad (98.2)$$

من ثم نرى أن

$$\underline{\underline{\sigma}}\equiv nq\,\underline{\underline{\mu}} \quad (99.2)$$

وموترة ناقلية البلازما نحصل عليها بتعويض موترة الحركية (93.2) أيضا الناقلية تتعلق بخصائص البلازما فقط، فهي تتعلق بالشحنات التي تكون البلازما وكثافتها العددية وكتل أجسامها وتواتر حقولها وتوتر الدوار ω_C. وهي ميزات البلازما.

$$
(\sigma)_{\alpha\beta} \equiv \frac{inq^2}{m\omega}\begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2} & \frac{-i\,\omega_c\omega}{\omega_c^2-\omega^2} & 0 \\ \frac{i\,\omega_c\omega}{\omega_c^2-\omega^2} & \frac{-\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (100.2)
$$

ثابت الوسط الكهربائي للبلازما

إن ثابت الوسط الكهربائي للبلازما، مثله مثل ناقليتها وحركيّتها، هو ميزة تتمتع بها البلازما، لذلك مطلوب تعينه. وهو معرّف من خلال العلاقات بين حقول البلازما وعلاقة تبددها. ولإبراز ثابت الوسط الكهربائي نكتب معادلات ماكسويل التي تربط بين حقول البلازما. ففي نظام (سم− غرام− ثانية) لقاوس ومكيال كولون، هي

$$
\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \quad ، \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\,\rho \qquad (101.2)
$$

$$
\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{J} \quad ، \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0
$$

مصحوبة بقانون أوم، العلاقة (94.2) ومعادلة الاستمرار. الجمال والفائدة في هذا النظام لا يظهر فيه لا ε_0 ولا μ_0. تحويل معادلات ماكسويل إلى مقلوب الفضاء، واستعمال العلاقتين (81.2)، تغدو معادلات ماكسويل المعادلات

$$
i\vec{k}\times\vec{E}-\frac{1}{c}i\omega\vec{B}=0 \quad و \quad i\vec{k}\cdot\vec{E}=4\pi\,\rho \qquad (102.2)
$$

$$
i\vec{k}\times\vec{B}+\frac{1}{c}i\omega\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{E} \quad و \quad i\vec{k}\cdot\vec{B}=0
$$

نحذف من العلاقات (102.2) إما $\vec{B}$ أو $\vec{E}$، فنحصل

$$
i\vec{k}\times\frac{c}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)+\frac{i\omega}{c}\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{E} \qquad (103.2)
$$

هذه علاقة يحققها الحقلان الكهربائي والمغناطيسي. رتّب ووضّب العلاقة(103.2) يؤدي للعلاقة

$$
\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)=\frac{4\pi\omega^2\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{E}}{c^2 i\omega}-\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{4\pi\underline{\underline{\sigma}}}{i\omega}-\underline{\underline{I}}\right)\cdot\vec{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\underline{\underline{\sigma}}}{i\omega\varepsilon_0}-\underline{\underline{I}}\right)\cdot\vec{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{i\omega\varepsilon_0}-\underline{\underline{I}}\right)\cdot\vec{E}
$$

من ثم

$$
\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{4\pi\underline{\underline{\sigma}}}{i\omega}-\underline{\underline{I}}\right)\cdot\vec{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{i\omega\varepsilon_0}-\underline{\underline{I}}\right)\cdot\vec{E}=-\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\vec{E} \qquad (104.2)
$$

ومعلوم أن $4\pi\varepsilon_0=1$ في نظام الوحدات (سم−غرام− ثانية) لقاوس، وأن

$$
\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\vec{k},\omega\right)\equiv\left(\underline{\underline{I}}-\frac{\underline{\underline{\sigma}}\left(\vec{k},\omega\right)}{i\omega\varepsilon_0}\right) \qquad (105.2)
$$

هو ثابت الوسط الكهربائي للبلازما المنشود. هذا هو تعريف ثابت الوسط الكهربائي. الكمية $\underline{I}$ هي موترة الوحدة

$$I_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{106.2}$$

إدخال الناقلية في عبارة ثابت الوسط الكهربائي، يفضي للعلاقة

$$\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{i\,\varepsilon_0\omega}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)_{\alpha\beta} \tag{107.2}$$

$$\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{i\,\varepsilon_0\omega}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{nq^2}{m\,\varepsilon_0\omega^2}\begin{pmatrix}-\dfrac{\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2}&\dfrac{-i\,\omega_c\omega}{\omega_c^2-\omega^2}&0\\\dfrac{i\,\omega_c\omega}{\omega_c^2-\omega^2}&\dfrac{-\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\omega_P{}^2}{\omega_c^2-\omega^2}&\dfrac{i\,\omega_c\omega_P{}^2}{\omega\left(\omega_c^2-\omega^2\right)}&0\\\dfrac{-i\,\omega_c\omega_P{}^2}{\omega\left(\omega_c^2-\omega^2\right)}&1+\dfrac{\omega_P{}^2}{\omega_c^2-\omega^2}&0\\0&0&1-\dfrac{\omega_P{}^2}{\omega^2}\end{pmatrix} \tag{108.2}$$

حيث $\frac{nq^2}{m\,\varepsilon_0}\equiv\omega_P^2$. ω_P تسمى تواتر البلازما.

هكذا تمكنا من تعريف خصائص البلازما الكهربائية وعيناها في إطار نموذج الجسم المفرد. وهي ثابت الوسط الكهربائي وحسابه لبلازما في إطار نموذج الجسم المفرد. كما قد حسبنا ناقلية وحركية البلازما. لقد بدت هذه المعاني على صور موترات (مصفوفات خاصة). تتعلق بتواتر الحقول ω وتواتر الدوار $\omega_c=\left(qB/m\right)$ (تواتر حركة الشحنات حول الحقل المغناطيسي) وتواتر لبلازما $\omega_P=\sqrt{\left(nq^2/m\varepsilon_0\right)}$ وهي ذبذبات لشحنات البلازما. من المفروض أن تدرس هذه المعاني بدلالة تواتر الحقول ω.

يلاحظ أن نموذج الجسم المفرد يقدم معلومات مهمة على أحوال وسلوك البلازما. بالطبع يبقى ناقص، إذ لا يقول شيئا على الفعل الجماعي للبلازما. سوف نتوقف عن استعمال هذا النموذج لطرق مواضيع أخرى مهمة.

نعود للعلاقة(104.2) ونحلل الشعاع $\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)$ على المنوال

$\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)=\vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right)-k^2\vec{E}\equiv\left(\vec{k}\,\vec{k}-\underline{\underline{I}}k^2\right)\cdot\vec{E}$ ، باعتبار أن $\vec{E}\equiv\underline{\underline{I}}\cdot\vec{E}$

إدخال النتيجة في العلاقة (104.2)، تغدو العلاقة

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\underline{\underline{I}}-\frac{\vec{k}\,\vec{k}}{k^2}\right)\cdot\vec{E}=\left(\underline{\underline{I}}-\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{i\omega\varepsilon_0}\right)\cdot\vec{E} \tag{109.2}$$

وبعد ترتيب العلاقة (109.2) ، يمكننا عرضها على الصورة

$$\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\vec{k},\omega\right)-\frac{k^2c^2}{\omega^2}\underline{\underline{I}}^T\right)\cdot\vec{E}\equiv 0 \qquad (110.2)$$

حيث $\underline{\underline{I}}^T$ هي الموترة العرضية المعرفة بالعلاقة $\underline{\underline{I}}^T\equiv\left(\underline{\underline{I}}-\frac{\vec{k}\,\vec{k}}{k^2}\right)$. العلاقة (110.2) هي علاقة تبدد الأمواج في البلازما. هنا الكمية $\frac{\vec{k}\,\vec{k}}{k^2}$ هي الموترة الطولية

$$I^L_{\alpha\beta}\equiv\frac{\left(\vec{k}\,\vec{k}\right)_{\alpha\beta}}{k^2}=\frac{k_\alpha\,k_\beta}{k^2}=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}k_x\,k_x & k_x\,k_y & k_x\,k_z\\ k_y\,k_x & k_y\,k_y & k_y\,k_z\\ k_z\,k_x & k_z\,k_y & k_z\,k_z\end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \underline{\underline{I}}^L\equiv\frac{\vec{k}\,\vec{k}}{k^2}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\vec{k},\omega\right)\equiv\underline{\underline{I}}-\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\underline{\underline{\sigma}}\left(\vec{k},\omega\right)$ هو ثابت الوسط الكهربائي للبلازما، و $\underline{\underline{I}}^T\equiv\left(\underline{\underline{I}}-\frac{\vec{k}\,\vec{k}}{k^2}\right)$ هي الموترة العرضية، و $\underline{\underline{I}}^L=\frac{\vec{k}\,\vec{k}}{k^2}$ هي الموترة الطولية، و $\underline{\underline{I}}$ الموترة الأحادية. وعليه

$$I^T_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\ ،\ I^L_{\alpha\beta}=\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\ ،\ I_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\ ،\ \varepsilon_{\alpha\beta}\equiv\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\sigma_{\alpha\beta}$$

تمرين: اثبت أن $\underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{I}}^L=\underline{\underline{I}}^L$ ، $\underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{I}}^T=\underline{\underline{I}}^T$ ، $\underline{\underline{I}}^L\cdot\underline{\underline{I}}^T=0$ ، $\underline{\underline{I}}^L+\underline{\underline{I}}^T=\underline{\underline{I}}$.

تأثير $\underline{\underline{I}}^T$ و $\underline{\underline{I}}^L$ على الشعاع $\vec{A}$ هما $\underline{\underline{I}}^T\cdot\vec{A}\equiv A_\perp$ و $\underline{\underline{I}}^L\cdot\vec{A}\equiv A_\parallel$، تبين من أن

$$\left(\underline{\underline{I}}^T\right)_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ،\ \left(\underline{\underline{I}}^L\right)_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ ،\ \left(\underline{\underline{I}}\right)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

العلاقة (110.2) تسمى علاقة التبدد. والموترة

$$\underline{\underline{D}}\left(\vec{k},\omega\right)\equiv\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\vec{k},\omega\right)-\frac{k^2c^2}{\omega^2}\underline{\underline{I}}^T\right) \qquad (111.2)$$

تسمى موترة التبدد. العلاقة (110.2) يحققها الحقلان $\vec{E}$ و $\vec{B}$. وما دام الحقلان غير معدومين، فإن معاملهما $D\left(\vec{k},\omega\right)$ هو المعدوم. وعليه حتى يكون للحقلين وجودا ينبغي أن تتحقق العلاقة

$$\left|D\left(\vec{k},\omega\right)\right|=0 \qquad (112.2)$$

واضح من العلاقة (112.2) أنها تربط بين الناقلية وثابت الوسط الكهربائي.

قبل أن نغادر هذا المكان نذكر بالعلاقة بين ثابت الوسط الكهربائي وقرينة الوسط (أو شفيف الوسط حسب مصطلح أبن الهيثم) وسرعة الطور وسرعة الضوء والعدد الموج وتواتر الحقول. وهي أن

$$\text{سرعة الطور}=v_\varphi=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}=\frac{c}{n} \qquad (113.2)$$

حيث ثابت الوسط الكهربائي الظاهر في العلاقة (113.2) هو نفسه الظاهر في العلاقة (105.2) هو ثابت الوسط

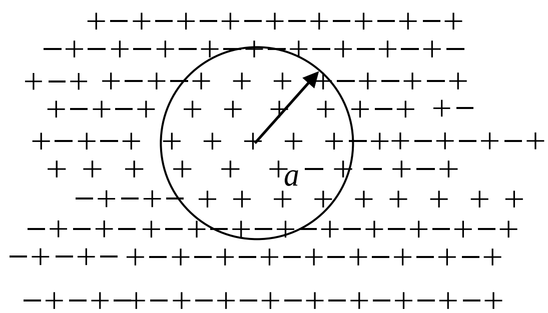
الكهربائي النسبي $(\varepsilon = \epsilon / \epsilon_0)$.

تمرين: نعتبر هذا التمرين للاطلاع على ما يحدث جراء فصل الشحنات بالبلازما. افرض انه قد أخليت كرة نصف قطرها a من البلازما من الكتروناتها وبقيت في الأيونات. عين الحقل الكهربائي بالكرة.

الحل: استنادا إلى نظرية تدفق الحقل الكهربائي ومن اجل $r < a$، فإن تدفق الحقل على سطح الكرة التي نصف قطرها r هو

$$\int_{S(r)} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{q_{s(r)}}{\varepsilon_0}$$

حيث $S(r)$ هو سطح مغلق كروي نصف قطرها r، $q_{S(r)}$ هي الشحنة التي يحيط بها السطح $S(r)$. بما أن الحقل



الشكل 18: يبين كرة في بلازما نزع منها إلكتروناته

يتعلق إلا بنصف القطر r ونصف القطر ثابت، فإن شدت الحقل ثابتة. والحقل يوازي عنصر السطح لتناظر التوزيع، وعليه

$$\int_{S(r)} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \left(4\pi r^2\right) E(r) = \frac{q_{s(r)}}{\varepsilon_0}$$

والشحنة التي يحيط بها السطح، الخطوات التالية تشرح نفسها، هي

$$q_{S(r)} = \rho^+ V(r) = n^+ q_e \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)$$

ونعلم أن

$$q_a = q_{S(a)} = \rho^+ V(a) = n^+ q_e \left(\frac{4\pi}{3} a^3\right)$$

حيث q_e هي الشحنة الأساسية، النسبة بينهما هي

$$q_{S(r)} = q_a \frac{r^3}{a^3}$$

من ثم الحقل الكهربائي عند r داخل الكرة هو

$$r \le a \quad ، \quad E(r) = \frac{n^+ q_e}{3\varepsilon_0} r = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0} r \tag{113.2}$$

يمكننا أن نستنتج أن الحقل الكهربائي الناتج عن فصل الشحنات يتناسب مع البعد وكثافة الشحنات. من أجل بلازما

عالية الكثافة $n^{+}=10^{28}$إلكترونا/م3، وشدة الحقل على بعد واحد سنتيمتر ($r=1$سم) من مركز الكرة هو

$$E(1cm)=\frac{910^{9}\times 4\pi\times 10^{-2}\times 10^{28}\times 1.610^{-19}}{3}=6.0310^{17}\ Volts/m$$

يعد هذا الحقل شديدا فائق الشدة. ويعد هذا نموذجا لفصل الشحنات داخل البلازما، فإذا حدث، سيكون رد فعلها عنيفا إزاء الفصل. لذلك يترتب عليه رفضا عنيفا كتذبذبها...

ملحق حول جداءات الموترات

نعرض في هذا الملحق جداءات الموترات تهيئة لدراسة الأمواج في البلازما وأشياء أخرى. نعتبر الموترتين $\underline{\underline{U}}$و $\underline{\underline{V}}$ والشعاع $\vec{A}$:

1. جداء النقطة للموترة $\underline{\underline{U}}$ بالشعاع $\vec{A}$ هو شعاع $\underline{\underline{U}}\cdot\vec{A}$ مركبته α تعطى بالعلاقة

$$\left(\underline{\underline{U}}\cdot\vec{A}\right)_{\alpha}\equiv\sum_{\beta}U_{\alpha\beta}A_{\beta} \qquad \text{I}$$

أيضا، الجداء $\vec{A}\cdot\underline{\underline{U}}$ هو شعاع تحسب مركبته α بالعلاقة

$$\left(\vec{A}\cdot\underline{\underline{U}}\right)_{\alpha}\equiv\sum_{\beta}A_{\beta}U_{\beta\alpha} \qquad \text{II}$$

على العموم الشعاعان $\underline{\underline{U}}\cdot\vec{A}$ و $\vec{A}\cdot\underline{\underline{U}}$ يختلفان.

2. جداء النقطة للموترتين $\underline{\underline{U}}$و $\underline{\underline{V}}$ هو الموترة $\underline{\underline{U}}\cdot\underline{\underline{V}}$ عنصر مصفوفتها $\left(\underline{\underline{U}}\cdot\underline{\underline{V}}\right)_{\alpha\beta}$ يحسب بالعلاقة

$$\left(\underline{\underline{U}}\cdot\underline{\underline{V}}\right)_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma}U_{\alpha\gamma}V_{\gamma\beta} \qquad \text{III}$$

3. جداء النقطتين أو السلمي للموترتين $\underline{\underline{U}}$و $\underline{\underline{V}}$ هو العدد السلمي $\underline{\underline{U}}:\underline{\underline{V}}$ المعرف بالعلاقة

$$\underline{\underline{U}}:\underline{\underline{V}}=\sum_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}V_{\beta\alpha} \qquad \text{VI}$$

نعتبر فيما يلي تطبيقات لهذه العمليات على الموترتين $\underline{\underline{I}}^{T}$و $\underline{\underline{I}}^{L}$.

جداء النقطة للموترة العرضية مع نفسها:

$$\left(\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{T}\right)_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma}\left(I^{T}\right)_{\alpha\gamma}\left(I^{T}\right)_{\gamma\beta}=\sum_{\gamma}\left(\delta_{\alpha\gamma}-\frac{k_{\alpha}k_{\gamma}}{k^{2}}\right)\left(\delta_{\gamma\beta}-\frac{k_{\gamma}k_{\beta}}{k^{2}}\right)$$

$$\left(\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{T}\right)_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\beta}-\delta_{\alpha\gamma}\frac{k_{\gamma}k_{\beta}}{k^{2}}-\frac{k_{\alpha}k_{\gamma}}{k^{2}}\delta_{\gamma\beta}+\frac{k_{\alpha}k_{\gamma}}{k^{2}}\frac{k_{\gamma}k_{\beta}}{k^{2}}$$

$$\left(\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{T}\right)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-2\frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^{2}}+\frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^{2}}=\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^{2}}=I^{T}{}_{\alpha\beta}$$

من ثم $\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{T}=\underline{\underline{I}}^{T}$

– $\left(\underline{\underline{I}}^{L}\cdot\underline{\underline{I}}^{L}\right)_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma}I^{L}_{\alpha\gamma}I^{L}_{\gamma\beta}=\sum_{\gamma}\frac{k_{\alpha}k_{\gamma}}{k^{2}}\frac{k_{\gamma}k_{\beta}}{k^{2}}=\frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^{2}}=I^{L}_{\alpha\beta}$

من ثم فإن $\underline{\underline{I}}^{L}\cdot\underline{\underline{I}}^{L}=\underline{\underline{I}}^{L}$

– جداء النقطة للمتوترتين الطولية والعرضية:

$$\left(\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{L}\right)_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma}I^{T}_{\alpha\gamma}I^{L}_{\gamma\beta}=\sum_{\gamma}\left(\delta_{\alpha\gamma}-\frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}\right)\frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}=\sum_{\gamma}\left(\delta_{\alpha\gamma}\frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}-\frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}\frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}\right)=\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}=0$$

جداء النقطتين للموترة العرضية مع نفسها

أي ، $\underline{\underline{I}}^{T}:\underline{\underline{I}}^{T}=\sum_{\alpha\beta}\left(I^{T}\right)_{\alpha\beta}\left(I^{T}\right)_{\beta\alpha}=\sum_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\left(\delta_{\beta\alpha}-\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}\right)$

$$\underline{\underline{I}}^{T}:\underline{\underline{I}}^{T}=\sum_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha}-2\delta_{\alpha\beta}\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}+\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}\right)=3-2+1=2$$

وعليه $\underline{\underline{I}}^{T}:\underline{\underline{I}}^{T}=2$

وجداء النقطتين للموترة الطولية مع نفسها

$$\underline{\underline{I}}^{L}:\underline{\underline{I}}^{L}=\sum_{\alpha\beta}I^{L}_{\alpha\beta}I^{L}_{\beta\alpha}=\sum_{\alpha\beta}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}=1$$

وجداء النقطتين للموترة العرضية بالموترة الطولية

$$\underline{\underline{I}}^{T}:\underline{\underline{I}}^{L}=\sum_{\alpha\beta}\left(I^{T}\right)_{\alpha\beta}\left(I^{L}\right)_{\beta\alpha}=\sum_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}=\sum_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}-\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)$$

$$=\sum_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}\right)=1-1=0$$

نجمع خصائص العمليات على الموترتين العرضية والطولية:

أ. $\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{T}=\underline{\underline{I}}^{T}$ ، $\underline{\underline{I}}^{L}\cdot\underline{\underline{I}}^{L}=\underline{\underline{I}}^{L}$ ، $\underline{\underline{I}}^{T}\cdot\underline{\underline{I}}^{L}=0$

ب. $\underline{\underline{I}}^{T}:\underline{\underline{I}}^{T}=2$ ، $\underline{\underline{I}}^{L}:\underline{\underline{I}}^{L}=1$ ، $\underline{\underline{I}}^{T}:\underline{\underline{I}}^{L}=0$