فصل 1

مدخل للبلازما

مقدمة

تنبه الإنسان، بداية القرن العشرين، وبالتحديد عام 1920، إلى وجود ظاهرة فيزيائية جديدة، سماها بلازما. شبهها بغاز مشحون. وبعد مرور خمسون عاما تقريبا انطلقت فيها أبحاثا حثيثة وانشئوا لها مخابر، فاطلعوا على نواحيها. صنفت البلازما بأنها حالة رابعة للمادة تختلف عن حالاتها الصلبة والسائلة والغازية، لأسباب سنقف عليها في هذا الفصل.

من المفيد الإجابة عن السؤال التالي أولا.

ما البلازما؟

الإجابة: "البلازما كلمة إغريقية أطلقوها على "غاز مشحون. يعني هي غاز من أيونات(ذرات مطايا لشحنات موجبة) ثقيلة، وغاز من إلكترونات(مطايا لشحنات سالبة) خفيفة، وغاز من ذرات معتدلة(ذرات لم تتأين بعد) ثقيلة. تتحرك عناصر هذه الغازات بلا قيود وتتصادم، فحركتها تشبه حركة أجسام الغاز. لكن إذا كانت أجسام الغاز تتحرك دون تأثير قوى كهرومغناطيسية بينها، فلبلازما تختلف، أجسامها تتدافع وتتجاذب بحقولها، وبالتالي بها كثافة شحنات $\rho(\vec{r},t)$ وكثافة تيار $\vec{j}(\vec{r},t)$ الأمر الذي يترتب عليه أمواج كهرومغناطيسية وإشعاع كهرومغناطيسي وحركات غريبة ... هذه الحالة للمادة جعلتها تختلف عن حالاتها الثلاثة الأخرى.

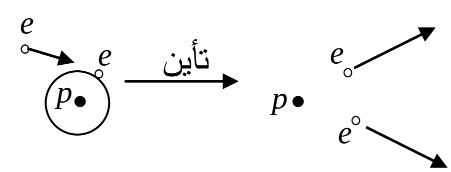
تواجد البلازما

يتشكل الكون من بلازمات طبيعية عديدة، نذكر منها البلازمات الشمسية المختلفة، وما بين الكواكب، وباطن الكواكب، وبلازمات أرضية مختلفة، وبلازما الناقل، والبرق والفجر...، وهناك بلازمات صناعية، وبلازما مخابر.

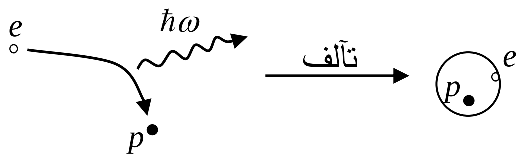
1.1 صناعة البلازما بالتصادم

هناك أسباب كثيرة تجعل الذرة أو الجزيء يفقد إلكترون أو إلكترونات، فالتصادم والتسخين والصواعق الكهربائية والتفريغ الكهربائي... أسباب تأين الذرات. فمثلا لو يصدم إلكترون عنيفا ذرة لطار أحد إلكتروناتها، كما يبين الشكل (1)... فيقال أن الذرة تأنت بالتصادم. ولو تأين عدد هائل من الذرات في وحدة الحجم لصارت المادة مشحونة. يصحب هذه العملية نشوء حقول كهربائية ومغناطيسية وكثافة شحنات وكثافة تيار. وإذا استقرت المادة على هذه الحالة سميت بلازما.

يصحب عملية تأين عملية مضادة (عملية التآلف)، فإذا شعّ إلكترون بعضا من طاقته، $\hbar\omega$ مثلا، وصارت طاقته موافقة لأحد سويات ذرة لأسره أيون، فيتحول إلى ذرة معتدلة، كما يوضح الشكل (2).



الشكل1: يبين ذرة تأينت بالتصادم



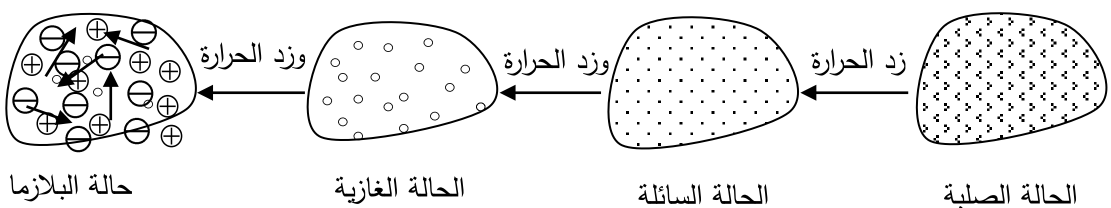
الشكل2: يبين عملية ائتلاف

صناعة البلازما بالتسخين

تَفعَل الحرارة فعل التصادم، لو سخنت مادة صلبة بما فيه الكفاية لتحولت إلى سائل، ولو زاد تسخينها بما فيه الكفاية لتحول إلى غاز، ولو زاد التسخينه حتي تصير طاقة حركة الإلكترونات الحرارية تضاهي طاقة كمونها بالنسبة للنواة لفقدت الذرات جل إلكتروناتها، أما لو بلغت $13.6\ eV$ لتعرت كافة النوى ويصير الغاز في حالت تأين تام. يتميز الوسط المشحون بشحنات متحركة بكثافة شحنات

(1.1) $\rho(\vec{r},t)=q_i n_i(\vec{r},t)+q_e n_e(\vec{r},t)$ وكثافة تيار $\vec{J}(\vec{r},t)=q_i n_i(\vec{r},t)\vec{v}_i+q_e n_e(\vec{r},t)\vec{v}_e$

فتنشب به حقول كهربائية ومغناطيسية، كما يوضح الشكل(3). فإذا استقرت الجملة على هذا الحال سميت حالتها بلازما.



الشكل3: يبين المراحل التي تمر بها المادة قبل أن تتشكل البلازما

التعريف الفيزيائي للبلازما

ليس كل غاز مشحون يشكل بلازما. بل يصبح بلازما لو حقق المقتضيات التالية:

1. متعادل كهربائيا
2. مستقرة
3. كثافته العددية n_e هائلة (عدد الإلكترونات في وحدة الحجم)
4. تتحرك أجسامه في حقول بعضها البعض بلا قيد
5. يبدي الفعل الجماعي.

فإذا اجتمعت هذه الصفات في جملة من الشحنات قيل "حالتها بلازما".

تصور حالة بلازما

من يطمع أن يعرف حالة بلازما مكونة من N جسم، فعليه أن يعين موضع وسرعة كل جسم منها، يعني يعين N^6 متغيرا في اللحظة t. لبلوغ ذلك فعليه أن ينطلق من معادلات تحريك الشحنات

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = q_\alpha \vec{E}(r,t) + q_\alpha \left(\vec{v}_\alpha \times \vec{B}(\vec{r},t)\right) - \frac{1}{n_\alpha}\vec{\nabla} p_\alpha \quad ، \quad \alpha = 1، 2، \ldots، N \tag{2.1}$$

وحتى يحل المعادلات(2.1)، ينبغي عليه تعيين الحقلين $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ من معادلات تحريكهما(معادلات) ماكسويل

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}(\vec{r},t) \tag{4.1}$$

وحتى يعين الحقلين من(3.1) و(4.1) ينبغي عليه أن يعين المنبعين $\rho(\vec{r},t)$و $\vec{J}(\vec{r},t)$ من العلاقتين(1.1)، في اللحظة t. لكن تعيين المنبعين يحتاج إلى السرعات والمواضع ... كما اكتشفت طريق لا نهاية له! فهذا من ضرب الخيال! وخارج عن إمكانيات بشر حتى لو زود بأحدث الوسائل والإمكانيات. وللعلم أن عدد أجسام بلازما عادية في وحدة الحجم يقدر بـ $\frac{N}{V} = 10^{14}$ إلكترونا في سم$^{-3}$، ومثله من الأيونات.

وهب أن N^6 متغير لحظي عشوائي قد تعين، فهل يستطيع أحد قياسها ومقارنتها مع نتائج الحساب؟ أبدا أبدا، فما الفائدة من تعيينها إذا؟ لهذا ينبغي البحث عن سبل أخرى لتعيين حالة البلازما.

من جهة أخرى، لو سألنا أنفسنا، ما الذي نرغب في معرفته عن البلازما؟ لكان الجواب نرغب في معرفة كثافتيها العدديتين(n_eو n_i) وضغطيها (p_eو p_i) ودرجتي حرارتها (T_eو T_i) ووسيط الترابط Γ_C وبعدي ديباي ($\lambda_{De},\lambda_{Di}$) وتواتريها($\omega_e$ و ω_i) وهلم جرا. تسمى هذه المقادير وسائط البلازما. وهي متغيرات عينية بطيئة التغير زمنيا ومتيسرة القياس. فمن السهل قياس درجة حرارة البلازما وضغطها وكثافتها... ومن جهة أخرى حسابها من خلال حساب القيم المتوسطة للكائنات الفيزيائية اللحظية العشوائية. ثم مقارنة النتيجتين.

لكن أي مقاربة تمكننا من حساب القيم المتوسطة؟

2.1 **مقاربة وصف البلازما**

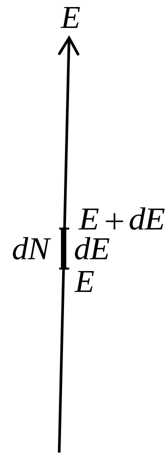
لكل ظاهرة فيزيائية أدواة تصفها ومعادلات تديرها. فما هي أدواة البلازما والمعادلات التي تديرها؟ نذكر بأن البلازما مسألة كثيرة الأجسام. يدير هذا الصنف من المسائل الفيزيائية علم الإحصاء والاحتمال.

تمهيد لمفهوم الإحصاء

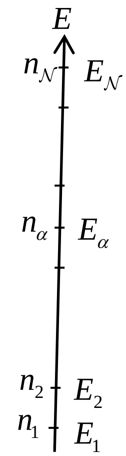
اعتبر مسألة كثيرة الأجسام، وبالتحديد غاز، ونطلب معرفة طاقته. فأي طاقة نطلبها؟ هل طاقة كل جزيء أو ذرة منه! هل طاقة مجموعة منه! هل طاقة كل أجسام الغاز! هل طاقة كل الغاز ككتلة!!... قرر الناس أن يتكلموا عن "متوسط الطاقة"! فما هو متوسط طاقة جملة أجسام تشكل غازا؟

أ. **متوسط طاقة أجسام غاز طاقته منفصلة**

افترض أن غازا مكونا من N جزيء، وبحكم عظم العدد لا نستثني أن عددا n_1 يتفق في الطاقة E_1 ، و عددا n_2 يتفق في الطاقة E_2 ، ...، عددا n_α يتفق في الطاقة E_α ، ...، عددا $n_{\mathcal{N}}$ يتفق في الطاقة $E_{\mathcal{N}}$. حيث $\mathcal{N}$ عدد الطاقات المتاحة لأجسام الغازي، كما يبين الشكل(4). العدد n_α يسمى دالة التوزيع، فالطاقة الكلية للغاز تعطى بالعلاقة



الشكل5: التوزيع المتصل



الشكل4: التوزيع المنفصل

$$E = n_1E_1 + n_2E_2 + ... + n_\alpha E_\alpha + ... + n_{\mathcal{N}} E_{\mathcal{N}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\mathcal{N}} n_\alpha E_\alpha \quad (4.1)$$ ، حيث

$$n_1 + n_2 + ... + n_\alpha + ... + n_{\mathcal{N}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\mathcal{N}} n_\alpha = N \quad (5.1)$$

ومتوسط طاقة جزيئات الغاز طاقته منفصلة تعطى بالعلاقة

$$\langle E_k \rangle = \frac{E}{N} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\mathcal{N}} n_\alpha E_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\mathcal{N}} n_\alpha} \quad (6.1)$$

تعبر العلاقة (6.1) عن القيمة المتوسطة لطاقة جزيئات الغاز. والمقصود بها" أرجح طاقة يتحرك بها جزيء واحد من الغاز" . صحيح أن هذا الجزيء يتصادم مع الجزيئات الأخرى فتتغير طاقته من الصفر إلى كل الطاقات الأخرى، لكن القيمة المتوسطة لطاقة الغاز هي أرجح طاقة يتحرك بها جزيء منه.

ب. متوسط طاقة أجسام غاز طاقته متصلة

وافترض أن غازا مكونا من N جزيء، طاقاتها متصلة (مستمرة)، فمجال الطاقة dE يتوقع أن يشغله عددا $dN(E)$ جزيء طاقتها E بين E و $E+dE$ ، حيث

$$N = \int dN(E) \quad (7.1)$$

يمكننا عرض $dN(E)$ على الصورة

$$dN(E)=\frac{dN(E)}{dE}dE \qquad (8.1)$$

ونعتمد الرمز $dN(E)/dE=f(E)$ ، وعليه العلاقة(8.1) تغدو العلاقة

$$dN(E)=f(E)dE \qquad (9.1)$$

تقرءا العلاقة(9.1) على النحو: $dN(E)$ أو $f(E)dE$ هو عدد الجزيئات التي طاقاتها E في المجال dE. أو هو عدد الجزيئات التي طاقاتها E المجال$[E+dE\ ,\ E]$ كما يوضح الشكل(5). القيمة المتوسطة لطاقة جزيئات الغاز هي

$$\langle E\rangle=\frac{\int dE\ f(E)E}{N}=\frac{\int dE\ f(E)E}{\int dE\ f(E)} \qquad (10.1)$$

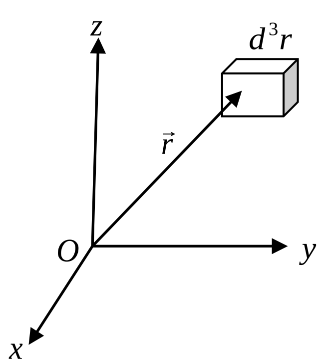
لاحظ تشابه العلاقتين(6.1) و(10.1)، فدور n_α في العلاقة (6.1) يماثل دور $f(E)$ في العلاقة (10.1). سنبين للتو أن

$$dE\ f(E)=dv\ F(v)$$

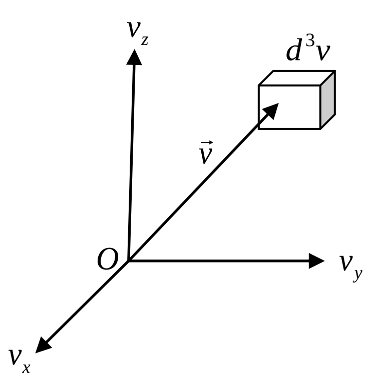
نستخلص مما تقدم أن وسائط البلازما متغيرات عينية، بطيئة التغير، تحسب من خلال القيم المتوسطة لمتغيراتها غير العينية، وتقاس في المخابر. إن حساب القيم المتوسطة يتكفل به علم الإحصاء.

3.1 **ميكانيكا الإحصاء**********

ميكانيكا الاحصاء هي الاطار النظري الذي من خلاله نطلع على خواص الجمل العينية. تتكون الجمل العينية من عدد هائل من الذرات أو الجزيئات أو الإلكترونات أو الأيونات أو البروتونات أو النيوترونات أو الكواركات ... أو من مزيج منها. تربط ميكانيكا الإحصاء بين الخواص العينية للجمل (المدركة بالقياس) بخواص مكوناتها غير العينية (العشوائية واللحظية والخارجة عن نطاق القياس). يتم ذلك من خلال **دالة توزيع أجسام الجملة** $f(\vec{r}_\alpha,\vec{v}_\alpha,t)$ ، بحسب مواضعها $\vec{r}_\alpha$ والسرعات $\vec{v}_\alpha$ في اللحظة t والتصادم بينها والقوى الكهرومغناطيسية الداخلية والخارجية. تعرف الدالة باسم كثافة الاحتمال (*probability density*).



الشكل6: يبين فضاء الهيأة



الشكل7: يبين فضاء السرعة

تجدر الإشارة إلى أن البلازما هي جملة مكونة من فئات: فئة الإلكترونات e (خفيفة)، وفئة الأيونات i (ثقيلة)، وفئة المعتدلة. وعليه نشير إلى ذلك في دالة التوزيع بـ A، فنكتب $f^A(\vec{r},\vec{v},t)$، وهي دالة توزيع الفئة A. وتعريفها متضمن في العلاقة

$$f^A(\vec{r},\vec{v},t)\,d^3r\,d^3v = \Delta N^A(\vec{r},\vec{v},t) \tag{8.1}$$

هنا ΔN^A هو عدد أجسام الفئة A ذات $\vec{r}$ في d^3r وذات $\vec{v}$ في d^3v في اللحظة t، كما يوضح الشكلين(6 و7). الفضاء الذي إحداثيات نقطة منه $(\vec{r},\vec{v})$ يسمى فضاء الطور. تحقق دالة توزيع أجسام الفئة $f^A(\vec{r},\vec{v},t)$ معادلة بولزمان، وهي معدلة موازنة عدد الأجسام في حجم

$$\frac{\partial f^A}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f^A + \frac{q^A}{m^A}\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\frac{\partial f^A}{\partial \vec{v}} = \left.\frac{\delta f^A}{\delta t}\right)_{collision} \tag{9.1}$$

الحد الثاني يشير إلى تدفق الأجسام عبر سطح حجم، والحد الثالث يتعلق بالقوى الكهرومغناطيسية، والحد الأيمن يتعلق بالتصادم. الحقول الكهرومغناطيسية في العلاقة (9.1) تحقق معادلات ماكسويل

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \mu_0\vec{J}(\vec{r},t) \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

صيغ المعادلات مكتوبة في نظام (cgs)، تعتمد الحقول على المنبعين: كثافة الشحنات $\rho(\vec{r},t)$ وكثافة التيار $\vec{J}(\vec{r},t)$. يلازم معادلات ماكسويل قانون أوم وقانون حفظ الشحنات، وهما على الترتيب

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \qquad \text{و} \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}$$

تأجل مناقشة حلول المعادلة (9.1) إلى وقت الحاجة.

صفات دالة التوزيع

1. إذا كانت $f_\alpha^A(\vec{r},\vec{v},t)$ تتعلق بالموضع $\vec{r}$، يقال توزيع الأجسام غير منتظم في الفضاء، وعليه $f_\alpha^A(\vec{r},\vec{v},t)$
2. وإذا كانت $f_\alpha^A(\vec{r},\vec{v},t)$ لا تتعلق بالموضع $\vec{r}$، يقال توزيع الأجسام منتظم في الفضاء، وعليه $f_\alpha^A(\vec{v},t)$
3. وإذا كانت $f_\alpha^A(\vec{r},\vec{v},t)$ تتعلق باتجاه $\vec{v}$، يقال توزيع الأجسام غير متماثل المناحي في الفضاء.
4. وإذا كانت $f_\alpha^A(\vec{r},\vec{v},t)$ لا تتعلق باتجاه $\vec{v}$، يقال توزيع الأجسام متماثلة المناحي في الفضاء.
5. وإذا كانت البلازما في حالة استقرار حراري، تتميز بتوزيع منتظم ومتماثل المناح ومستقل عن الزمن والموضع، صيغة دالة التوزيع هي

$$f^A(\vec{r},\vec{v},t) = f^A(\vec{v}) = n^A\left(\frac{m^A}{2\pi k_B T^A}\right)^{3/2} e^{-\frac{m^A v^2}{2k_B T^A}} \tag{10.1}$$

6. وبلازما في حالة استقرار حراري، وغير منتظمة، ومتماثلة المناح، ومستقلة عن الزمن، يصفها التوزيع

$$f^A(\vec{r},\vec{v}) = f^A(\vec{v})n^A(\vec{r}) = \left(\frac{m^A}{2\pi k_B T^A}\right)^{3/2} e^{-\frac{m^A v^2}{2k_B T^A}} n^A e^{-\frac{q^A\varphi(\vec{r})}{k_B T^A}} \tag{11.1}$$

حيث $f^A(\vec{v}) = \left(\frac{m^A}{2\pi k_B T^A}\right)^{3/2} e^{-\frac{m^A v^2}{2k_B T^A}}$ و $n^A(\vec{r}) = n^A e^{-\frac{q^A\varphi(\vec{r})}{k_B T^A}}$

هنا $\varphi(\vec{r})$ هو الكمون الذي تقع فيه الشحنة q^A و $q^A\varphi(\vec{r})$ يمثل طاقة كمونها.

4.1 القيمة المتوسطة للمقدار الفيزيائي Q_α^A

الغاية من هذه اللمحة هي أسلوب الانتقال من المتغيرات اللحظية العشوائية، إلى المتغيرات البطيئة العينية.

ليكن Q_α^A مقدار فيزيائي غير عيني(لحظي)، فإذا كان متغيرا منفصلا، فيتم الانتقال إلى المتغيرات العينية من خلال قيمته المتوسطة المعرفة بالعلاقة

$$\left\langle Q^A \right\rangle = q^A(t) = \frac{1}{N^A}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=N^A} Q_\alpha^A \tag{12.1}$$

فمثلا القيمة المتوسطة لطاقة حركة إلكترونات البلازما $A=e$ هي

$$\left\langle E_C^e \right\rangle = \frac{1}{N^e}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=N^e} \frac{1}{2} m_\alpha^e v_\alpha^{e2} \tag{13.1}$$

أما إذا كان متغيرا متصلا، $Q^A(\vec{r},\vec{v},t)$، فقيمته المتوسطة تعطى بالعلاقة

$$\left\langle Q^A \right\rangle_{f^A} = q^A(\vec{r},t) \equiv \frac{1}{n^A(\vec{r},t)}\int d^3v\, Q^A(\vec{r},\vec{v},t)\, f^A(\vec{r},\vec{v},t) \tag{14.1}$$

على أن

$$n^A(\vec{r},t) \equiv \int d^3v\, f^A(\vec{r},\vec{v},t) \tag{15.1}$$

حيث $f^A(\vec{r},\vec{v},t)$ هي دالة التوزيع. تقرأ العلاقة (14.1) على النحو" القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي الآني المتصل على دالة التوزيع $f^A(\vec{r},\vec{v},t)$ "

اعتاد الناس تبسيط العلاقة (14.1)، وذلك باعتبار ما يلي

$$f^A(\vec{r},\vec{v},t) = n^A(\vec{r},t)\mathcal{F}^A(\vec{v},t)$$

فتصير العلاقة (15.1) العلاقة

$$\int d^3v\, \mathcal{F}^A(\vec{r},\vec{v},t) = 1 \quad \text{و} \quad \left\langle Q^A \right\rangle_{f^A} = q^A(\vec{r},t) \equiv \int d^3v\, Q^A(\vec{r},\vec{v},t)\mathcal{F}^A(\vec{v},t)$$

وعلى سبيل المثال، لا الحصر

*متوسط سرعات أجسام البلازما الفئة A هو $\left\langle \vec{v}^A \right\rangle_{\mathcal{F}^A} = \vec{v}^A(\vec{r},t) \equiv \int d^3v\,\vec{v}\,\mathcal{F}^A(\vec{r},\vec{v},t)$

*متوسط أطوال سرعات أجسام البلازما الفئة A هو $\left\langle v^A \right\rangle_{\mathcal{F}^A} = v^A(\vec{r},t) \equiv \int d^3v\, v\,\mathcal{F}^A(\vec{r},\vec{v},t)$

*متوسط الدفعات الخطي لأجسام البلازما الفئة A هو $\left\langle \vec{p}^A \right\rangle_{\mathcal{F}^A} = p^A(\vec{r},t) \equiv \int d^3v\left(m^A\vec{v}\right)\mathcal{F}^A(\vec{r},\vec{v},t)$

*متوسط الطاقات الحركية لأجسام البلازما الفئة A هو $\left\langle E_C^A \right\rangle_{\mathcal{F}^A} = E_C^A(\vec{r},t) \equiv \int d^3v \left(\frac{1}{2}m^A v^2\right)\mathcal{F}^A(\vec{r},\vec{v},t)$

وإذا ضربت العلاقة (15.1) في الكتلة الأساسية أو الشحنة الأساسية صارت

*الكثافة الكتلية للبلازما الفئة A هي $\rho_m(\vec{r},t) = m^A n^A(\vec{r},t) = m^A \int d^3v\, f^A(\vec{r},\vec{v},t)$

*كثافة الشحنة الكهربائية للبلازما الفئة A هي $\rho_q(\vec{r},t) = q^A n^A(\vec{r},t) = q^A \int d^3v\, f^A(\vec{r},\vec{v},t)$

*كثافة التيار الكهربائي في البلازما الفئة A هي $\vec{J}(\vec{r},t) = q^A n^A(\vec{r},t)\langle\vec{v}\rangle_{f^A} = q^A \int d^3v\vec{v}\, f^A(\vec{r},\vec{v},t)$

مثال: يكثر العمل بنظم دالة التوزيع f^A إلى الواحد، لذلك نعرضها على الوجه $f^A(\vec{v}) = n^A \mathcal{F}^A(\vec{v})$.

1. تبين من أن $\mathcal{F}^A(\vec{v}) = \left(\frac{m^A}{2\pi k_B T^A}\right)^{3/2} e^{-\frac{m^A v^2}{2k_B T^A}}$ و $\int d^3\vec{v}\, \mathcal{F}^A(\vec{v}) = 1$، كما يمكن فصلها على النحو

$\mathcal{F}^A(\vec{v}) = \mathcal{F}^A(v_x)\mathcal{F}^A(v_y)\mathcal{F}^A(v_z)$، حيث $\mathcal{F}^A(u) = \left(\frac{m^A}{2\pi k_B T^A}\right)^{1/2} e^{-\frac{m^A u^2}{2k_B T^A}}$، u أحد مركبات السرع.

بناء عليه تبين من صحة التحليل، وأثبت أن كل تكامل يساوي واحد على حِدَ، وبتالي النظم إلى واحد صحيح

$$\int d^3v\,\mathcal{F}^A(\vec{v}) = 1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \mathcal{F}^A(v_x)\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \mathcal{F}^A(v_y)\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \mathcal{F}^A(v_z)\right)$$

استعن بالتكامل $2\int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x^2} \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\alpha^{\frac{(n+1)}{2}}}$ من أجل n زوجي

اعلم أن الدالة Γ تتمتع بالخاصيتين $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. ارسم ثلاث منحنات للدالة $\mathcal{F}^A(u)$، الظاهرة في السؤال(1)، حيث u أحد مركبات السرع ، وذلك من أجل درجات حرارة مختلفة اختلاف بين، $T_3 > T_2 > T_1$. لاحظ أن سنام التوزيع شديد عند $u = 0$. أثبت أن عرض التوزيع عند منتصف السنام يعطي بالعلاقة

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{2k_B T^A}{m^A}\ln 2}$$

يلاحظ أن عرض التوزيع يتناسب مع جذر درجة حرارة الجملة وعكسا مع جذر كتلة جسم من أجسامها. والعكس سنامها.

قم بتعليق مفصل حول سلوك توزيع فئة الإلكترونات، سريعة مقارنة مع الأيونات، وسلوك توزيع فئة الأيونات.

3. البحث عن توزيع اطوال سرعات الأجسام v، $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ (ليس u أعلاه). للحصول على ذلك نستخدم الإحداثيات الكروية

$$v_x = v\sin\theta\cos\phi \quad \text{و} \quad v_y = v\sin\theta\sin\phi \quad \text{و} \quad v_x = v\cos\theta$$

أثبت أن عنصر الحجم في فضاء السرعة $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ هو $d^3v = dv_x dv_x dv_x = v^2 dv \sin\theta d\theta d\phi$ وبالتالي

$$\mathcal{F}\left(\vec{v}\right)d^3v=\mathcal{F}\left(v,\theta,\phi\right)v^2dv\sin\theta d\theta d\phi=\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2k_BT}\ v^2dv\ d\theta\sin\theta\ d\phi$$

حيث $2\pi\geq\phi\geq0$ و $\pi\geq\theta\geq0$ و $\infty\geq v\geq0$

توزيع الطوال سرعات الأجسام يتحصل عليه بتكامل العلاقة السابقة على الزوايا، فالنتيجة هي

$$F\left(v\right)dv=dv\,4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2k_BT}$$

ارسم ثلاث منحنات لتوزيع اطوال السرع من أجل درجات حرارة مختلفة $T_3>T_2>T_1$ اختلافا بينا حتي يظهر على عرضا وسنامها.

4. أ. السرعة الأكثر احتمالا: السرعة الأكثر احتمالا $\hat{v}$ هي السرعة الأكثر رجوحا لأجسام البلازما. وهي السرعة عند سنامها

$$\frac{dF\left(v\right)}{dv}=0 \quad \text{عندها} \quad v=\hat{v}$$

فأثبت أن مقدارها هو

$$\hat{v}=\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

ب. متوسط اطوال السرعات: فهو الذي يعطى بالعلاقة

$$\left\langle v\right\rangle=\int_0^\infty dv\,v\,F\left(v\right)$$

فأثبت أن مقداره هو

$$\left\langle v\right\rangle=\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

ج. السرعة الحرارية v_{th}، فهي جذر متوسط مربع السرعة (rms): هذه السرعة معرفة بالعلاقة

$$\sqrt{\left\langle v^2\right\rangle}=\left(\int_0^\infty dv\,v^2\,F\left(v\right)\right)^{1/2}$$

فأثبت أن مقدارها هو

$$v_{th}=\sqrt{\left\langle v^2\right\rangle}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

لاحظ العلاقات

$$\left\langle E\right\rangle=\frac{1}{2}m\left\langle v^2\right\rangle=\frac{3}{2}k_BT\neq\frac{1}{2}m\left\langle v\right\rangle^2$$

اظهر السرعات الثلاثة على منحنى التوزيع.

تأكد من صحة التطبيقات العددية المبينة في الجدول

الفئة	m وحدة الكتل الذرية	$\langle v\rangle$ م ثا$^{-1}$	$v_{th}=\sqrt{\langle v^2\rangle}$ م ثا$^{-1}$	$\hat{v}$ م ثا$^{-1}$
N_2	28	474	515	420
H_2	2	1780	1932	1578
Hg	201	178	193	158

ناقش نتائج المثال.

مثال: حول دالة توزيع الطاقة لبولزمان

1. اعتمد على العلاقة

$$F^A(v)dv = g^A(E)dE$$

ومنها استنتج أن $g^A(E)$ تعطى بالعلاقة

$$g^A(E)dE = \frac{2\pi n^A}{\left(\pi k_B T^A\right)^{3/2}} dE\sqrt{E}e^{-E/k_BT^A}$$

قراءتها " عدد اجسام الفئة A ذات طاقات ضمن المجال dE في اللحظة t "

2. ارسم منحنيين لكثافة احتمال توزيع الطاقات $g^A(E)$ من أجل $T=300K$ و $T=1000K$. وكذا لكثافة احتمال توزيع السرع $F^A(v)$. اظهر على منحنى $g^A(E)$ المقدار

$$dE\, g^A(E)$$

واعطي معناه.

3. عين متوسط الطاقة الحركية، ومتوسط طول السرعة ومتوسط مربع طول السرعة.

محددات البلازما(وسائط البلازما)

محددات البلازما هي وسائطها، وهي أدواة متعلقة بكثافتها وبدرجة حرارتها وطاقتها...، أو بعضها. تتسم بالتغير البطيء في الزمان والمكان. نذكر منها الشائعات:

1. وسيط الترابط Γ_C
2. تواتر البلازما ω_p
3. بعد ديباي λ_D
4. عدد الأجسام في كرة ديباي N_D
5. أقل الأبعاد d_0

5.1 وسيط الترابط

من أبرز وسائط البلازما وسيط ترابطها. فتعريفه هو " نسبة متوسط طاقة الكمون بين جسمين إلى متوسط طاقة حركة أجسامها".

$$\Gamma_C = \frac{\langle E_P \rangle}{\langle E_k \rangle} \tag{16.1}$$

تعبر $\langle E_P \rangle$ عن مدى ترابط أجسام البلازما، وتعبر $\langle E_k \rangle$ عن مدى حرية حركة أجسامها. وبالتالي يقيس Γ_C مدى ترابط الأجسام بالنسبة لحركتها. فإذا كان $\Gamma_C < 1$ فترابطها ضعيف وحركتها عالية، والعكس إذا كان $\Gamma_C > 1$ فترابطها شديد وحركتها ضعيفة. تشبيها بالغاز المثالي. فسميت البلازما التي يحقق معامل ترابطها العلاقة $\Gamma_C < 1$ مثالية لأن حركتها اشد من ترابطها، فتبدو وكأن أجسامها طليقة، وعلى الخصوص لو كان $\Gamma_C << 1$. لقد تبين أن كافة البلازمات الطبيعية مثالية. انظر كيف حدد الوسيط Γ_C حالة البلازما.

إن متوسط طاقات كمون أجسام البلازما هو

$$\langle E_P \rangle = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{e^2 n_e^{1/3}}{4\pi\varepsilon_0} \tag{17.1}$$

حيث a هو متوسط البعد بين جسمين متجاورين، وهو على صلة بكثافتها العددية عبر العلاقة $a = n^{-1/3}$، انظر المثال. ومتوسط الطاقة الحركية لأجسام البلازما هي $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$، وبالتالي

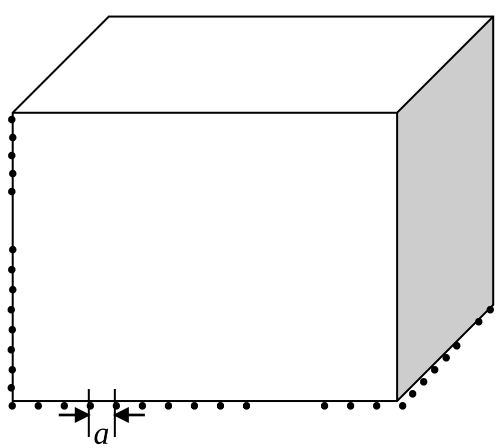
$$\Gamma_C = \frac{\langle E_P \rangle}{\langle E_k \rangle} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (n)^{1/3}}{4\pi\varepsilon_0 k_B T} \tag{18.1}$$

مثال: قدر العلاقة بين متوسط البعد a بين ذرتين من مادة وكثافتها العددية n.

الحل: اعتبر قطعة من مادة على شكل علبة متوازية المستطيلات، كما يوضح الشكل(8)، أضلاعها L_x، L_y، L_z.

فطول الضلع L_x بدلالة a هو $L_x = N_x a$، حيث N_x هو عدد الذرات التي يتحملها الضلع ناقصا احد ذرتي الركنين، كي لا تحسب مرتين. بالمثل $L_y = N_y a$ و $L_z = N_z a$. فحجم العلبة يعطى هو

$$V = L_x L_y L_z = N_x N_y N_z a^3$$



الشكل8: يبين علبة من مادة، فكل ضلع يتناسب مع عدد الأجسام به ومتوسط البعد بين جسمين

لكن $N = N_x N_y N_z$ هو عدد الذرات في العلبة. وبالتالي

$$V = L_x L_y L_z = N_x N_y N_z a^3 = Na^3$$

تعرف الكثافة العددية للمادة بالعلاقة $n = \frac{N}{V}$، وإدخالها في العلاقة السابق يفضي للنتيجة المنشودة

$$1 = \frac{N}{V} a^3 = na^3 \quad \text{ومنه} \quad a = n^{-1/3} \tag{19.1}$$

عرض ثوابت كونية معمول بها

* مقدار ثابت بلانك $\hbar$: $\hbar = 1.05410^{-34}\ J\,s = 6.56\ 10^{-16}\ eV\,s$

* مقدار ثابت بولزمان k_B: $k_B = 1.3810^{-23}\ J\,K^{-1} = 8.63\ 10^{-5}\ eV\,K^{-1}$

* مقدار الثابت $\hbar c$: $\hbar c = 3.16210^{-26}\ Jm = 1.98\ 10^{-7}\ eV\,m$

* مقدار ثابت الهيكل الجيد(*Fine Structure*): $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.24}$

*صيغ الطاقة الحرارية $k_B T$:

$$k_B T = k_B\left(J\,K^{-1}\right)T\left(K\right) = k_B\left(eV\,K^{-1}\right)T\left(K\right) \tag{20.1}$$

الصيغة (20.1) هي درجة حرارة الجملة بوحدة(eV).

الجدول التالي يعرض بلازمات طبيعية وكثافاتها العددية ودرجات حرارتها، وذلك لإلكتروناتها

	plasma	n_e (per cu m)	T_e (K)
Sun	centre	10^{31}	1.5×10^7
	photosphere	10^{20}	5,800
	chromosphere	10^{17}–10^{20}	5×10^5
	corona	10^{13}	1.5×10^6
	solar wind (near Earth)	5×10^6	4×10^5
Interstellar space	H II regions	10^6	10^4
	H I regions	10^2	100–125
	Intergalactic space	1	3?
Earth	outer magnetosphere	10^6–10^7	10^4
	plasmasphere	10^9–10^{10}	10^4
	ionosphere	10^{11}–10^{12}	250–3,000
Metals		10^{28}	10^4

على سبيل المثال درجة حرارة البلازما كرونا في الجدول ($T = 1.510^6\ K$) بوحدة (eV) هي

$$T(eV) = k_B\left(eV/K\right)T\left(K\right) = 8.625\ 10^{-5} \times 1.510^6 = 129.375\ eV$$

ودرجة الحرارة اللازمة لتحرير إلكترون من ذرة الهدروجين، طاقة قيده $13.6(eV)$، بوحدة الكلفن هي

$$T(K)=(k_BT)(eV)\frac{e}{k_B}=13.6\times\frac{1.610^{-19}}{1.3810^{-23}}=1.58\,10^5K$$

مثال: عين وسيط الترابط لبلازما (كرونا)، معتمدا على معطيات الجدول السابق

الحل: اعتمادا على معطيات الجدول الخاصة بالكرونا، $n_e=10^{13}$ م$^{-3}$ و $T_e=1.5\,10^6$ كلفن. فوسيط ترابطها هو

$$\Gamma_C=\frac{\langle E_P\rangle}{\langle E_k\rangle}=\frac{2}{3}\frac{e^2(n)^{1/3}}{4\pi\varepsilon_0\times kT}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\frac{\hbar c(eV\,m)(n)^{1/3}}{k_BT(eV)}=1.66\,10^{-7}<<1$$

واضح أنه صغير مفرط في الصغر أمام الوحدة، فبلازما الكرونا مثالية، وتعد أجسامها طليقة.

تمرين: اعتبر البلازما الشمسية الخارجية $n_e=10^{15}$م$^{-3}$ ، ودرجة حرارتها $T_e=5\,10^5\rightarrow 43.125eV$. فعين البعد λ_D لهذه البلازما، وأثبت أن وسيط ترابطها يساوي $2.23\,10^{-6}$، ما رأيك في مثاليتها، علل.

تمرين: اعتبر بلازما الاندماج $n_e=10^{20}$م$^{-3}$، ودرجة حرارتها $10\,keV$. اثبت أن درجة حرارتها بوحدة الكلفن هي $T_e=1.23\,10^8$، وعين البعد λ_D لهذه البلازما، تبين من أن وسيط ترابطها يساوي $2.08\,10^{-6}$، أعطي رأيك في مدى ترابطها، علل.

6.1 تعقيب على غاز فيرم

تعريف غاز فيرمي " أجسامه ذات لف نصف عدد صحيح وتحتل كافة الحالات الكمية الدنيا لطيفه". وطاقة أعلى حالة كمية تسمى طاقة فرمي. أجسام الغاز الذي هذه صفاتها تسمى فرميونات، على سبيل المثال الإلكترون والبروتون والنيوترون والكوارك و... هي فرميونات. غاية هذه الفقرة هو التعرف على سلوكها وتعيين طاقة فرمي.

أعتبر غازا من الفرميونات في علبة مكعبة، احد أضلاعها L . ينطبق عليها نظري حركة جسم في علبة. بناء عليه نذكر بأن عدد الحالات الكمية ذات العدد الموج $\vec{k}$ في d^3k هو

$$dN_k=dn_xdn_ydn_w=d^3n\equiv\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3dk_xdk_ydk_z=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3d^3k=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3k^2dk\;d\Omega_k \qquad (21.1)$$

وطاقة حركة جسم في العلبة دفعه $\hbar\vec{k}$ هي

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \qquad (22.1)$$

حيث m هي كتلة فرميون. فعبارة k بدلالة طاقة الحركة هي

$$k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \quad \text{وتفاضله يساوي} \quad dk=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{dE}{2\sqrt{E}}$$

وتعويض ذلك في العلاقة (21.1) يفضي لعدد الحالات الحمية ذات طاقة E في dE هي

$$dN_E=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{2\hbar^3}dE\;d\Omega_k \qquad (23.1)$$

وعدد الحالات الكمية التي طاقتها بين 0 و E هي

$$N=\int_0^N dN_E=4\pi\int_0^E dE\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{2\hbar^3}=4\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{(2m)^{3/2}}{2\hbar^3}\int_0^E dE\sqrt{E}$$

حيث E هي طاقة أعلا حالة يحتلها الغاز في العلبة. والنتيجة هي

$$N=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}E^{3/2} \qquad (24.1)$$

إن طاقة أعلى حالة كمية يحتلها الغاز سميت طاقة فيرمي، واتخذوا لها الرمز E_f، وهي تساوي E هنا. العلاقة السابقة هي بين عدد الحالات الكمية التي يحتلها الغاز وطاقة فيرمي.

من ناحية أخرى تخضع الفرميونات لمبدا التفرد لباولي، القائل "لا يحتل فرميونان حالة كمية واحدة في وقت واحد أبدا". بناء عليه يمكن أن يحتل كل حالة كمية فرميونين فقط، أحداهما يلف إلى أعلى والثاني يلف إلى أسفل. بناء عليه عدد الفرميونات التي يستوعبها الطيف هي $2N$، فتغدو العلاقة السابقة العلاقة بين عدد أجسام الغاز وطاقة فيرمي

$$2N=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}E_f^{3/2} \qquad (25.1)$$

والتي نعرضها على الصورة

$$n=\frac{2N}{L^3}=\frac{1}{3\pi^2}\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}E_f^{3/2} \qquad (26.1)$$

حيث $\frac{2N}{L^3}$ يمثل الكثافة العددية للغاز. فطاقة فيرمي بدلالة الكثافة العددية للغاز هي

$$E_f=\frac{\hbar^2\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}{2m}=\frac{\hbar^2k_f^2}{2m} \text{ ، حيث } k_f=\left(3\pi^2 n\right)^{1/3} \qquad (27.1)$$

حيث k_f هو أعلى عدد موجي لفرميون يحتل أعلى حالة كمية. الملفت للإنتباه هنا هو بمجرد معرفة الكثافة العددية لغاز من الفرميونات وكتلة أحد أجسامه تتعين طاقة أعلى حالة كمية يحتلها ذلك الغاز.

مثال: عين طاقة فيرمي لإلكترونات النقل في النحاس، علما أن كثافتها العددية به هي $8.47\ 10^{28}$ إلكترونا في المتر المربع. اعلم أن $m_ec^2=511keV$.

الحل: التعويض في k_f يفضي للنتيجة

$$k_f=\left(3\pi^2\times 84.7\right)^{1/3}10^9=13.59 10^9\,m^{-1}$$

وإدخال الناتج في عبارة الطاقة يفضي للنتيجة

$$E_f=\frac{\hbar^2k_f^2}{2m}=\frac{(\hbar c)^2k_f^2}{2mc^2}=\frac{\left(1.98 10^{-7}eVm\right)^2\times 184.59 10^{18}m^{-2}}{2\times 511\ 10^3 eV}=7.08\,eV$$

هذه هي طاقة حركة الإلكترون الذي يشغل أعلى حالة كمية لغاز الإلكترونات في النحاس.

تمرين: اثبت أن طاقة فرمي لإلكترونات النقل في الألمنيوم والفضة والذهب، على الترتيب، هي $11.7\,eV$ و $5.5\,eV$ و $5.53\,eV$. علما أن كثافاتها العددية ، على الترتيب، هي $1.81\;10^{29}$ و $5.86\;10^{28}$ و $5.90\;10^{28}$ إلكترونا في المتر المربع.

يستعمل نظري فيرمي في مجالات واسعة وعلى الخصوص في دراسة الجسم الصلد وغاز النيوترونات والبروتونات و...

7.1 ظاهرة الحجب (*Shielding Phenomena*)

نواصل البحث عن وسائط البلازما. من أهم ميزات البلازما ميولها نحو الاعتدال الكهربائي، يترجم هذا السلوك بوسيط سنعينه.

للوقوف على ذلك، نقتفي اثر سلوك شحنة من شحنات البلازما، ولنسميها شحنة اختبار q_T. تجلب q_T بحقلها الشحنات المخالفة لها، وتدفع الشحنات المماثلة لها. فيتشكل حولها جو اغلبه من الشحنات المخالفة. بلفظ آخر كل شحنة تحدث اضطراب في توزيع الشحنات حولها، فيصير غالبه من الشحنات المخالفة. فيولد التوزيع حقلا مضادا لحقل q_T، الأمر الذي يضعف حقلها، بل يصير تافها عند بعد λ_D من q_T.

فيقال أن الشحنات المخالفة حجبت حقل q_T على الشحنات التي أبعد من λ_D. هذا السلوك لشحنة الاختبار ألغى حقلها من كل الفضاء، ما عدا فضاء الكرة التي مركزها q_T ونصف قطرها λ_D. وهذا دأب كل شحنة من شحنات البلازما. فهذا هو المقصود بأن البلازما ميالة للاعتدال ذاتيا. فتبدو البلازما لناظر لا حقول لها، يعني معتدلة كهربائية.

يقود التحليل السابق إلى النتيجة الجوهرية التالية، أن تأثير الشحنات على بعضها البعض في البلازما هي المحصورة في الكرة التي نصف قطرها λ_D فحسب. فهناك تتصادم الشحنات وتتبادل الطاقات تشع الإشعاع الكهرومغناطيسي وما إلى ذلك. ما يحدث في هذه الكرة من أفعال سمي الفعل الجماعي في البلازما.

الجدير بالملاحظة أن ظاهرة الحجب لا تعود إلى حقول الشحنة q_T لوحدها، بل تشارك فيها الحركة الحرارية لشحناها. فكل شحنة تتحرك بطاقة حركة قدرها $E_{Cth}=\frac{3}{2}k_BT$، بسبب درجة الحرارة T. فيقترب عدد من الشحنات من q_T، فيحدث تصادم بينهما، في الكرة التي نصف قطرها λ_D، ثم يخرج بعضها. هذه العملة تعود لدرجة الحرارة تساهم توزيع الشحنات حول q_T، فتساهم في ظاهرة الحجب.

8.1 تعيين بعد الحجب λ_D

كل شحنة q تتلقى قوة من الشحنة q_T قدرها $q\,\vec{E}(\vec{r})$ وطاقة قدرها $q\varphi(\vec{r})$، حيث $\vec{E}(\vec{r})$ و $\varphi(\vec{r})$ حقلها وكمونها عند $\vec{r}$. تحقق الحقول معادلات ماكسويل. وعلى الخصوص المعادلة

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \text{حيث} \qquad \rho(\vec{r})=q_in_i(\vec{r})+q_en_e(\vec{r}) \tag{28.1}$$

إن توزيع شحنات البلازما حول q_T عند التوازن يتحكم فيه معامل ماكسويل- بولزمان $e^{-q\varphi/k_BT}$. لهذا

كثافة اللأيونا والإلكترونات يصيران

$$\rho_e(\vec{r}) = q_e n_e e^{-\frac{q_e\varphi}{k_B T_e}} = -e n_e e^{\frac{e\varphi}{k_B T_e}} \quad \text{و} \quad \rho_i(\vec{r}) = q_i n_i e^{-\frac{q_i\varphi}{k_B T_i}} \tag{29.1}$$

حيث $n_i = n_i(0)$ و $n_e = n_e(0)$، على الترتيب، هما الكثافة الابتدائية المنتظمة للأيونات والكثافة الابتدائية المنتظمة للإلكترونات. ادخال ذلك في عبارة الكثافة يفضي للعلاقة

$$\rho(\vec{r}) = q_i n_i e^{-q_i\varphi(\vec{r})/k_B T_i} + q_e n_e e^{-q_e\varphi(\vec{r})/k_B T_e} \tag{30.1}$$

وباعتبار العلاقة بين الحقل الكهربائي والكمون، $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$، إدخال ذلك في العلاقة (28.1)، يفضي للعلاقة

$$-\nabla^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_i n_i e^{-q_i\varphi(\vec{r})/k_B T_i} + q_e n_e e^{-q_e\varphi(\vec{r})/k_B T_e}\right) \tag{31.1}$$

هذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية غير خطية، فلا حل معروف لها. لكن يمكن جعلها خطية إذا اعتبرنا أن طاقة الكمون $q\varphi$ ضعيفة أمام الطاقة الحركية الحرارية لأجسام $k_B T$ (الحركة تسود على الترابط) في بلازما مثالية. عندئذ ننشر الأس نشر تايلر

$$-\nabla^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_i n_i\left(1 - \frac{q_i\varphi(\vec{r})}{k_B T_i}\ldots\right) + q_e n_e\left(1 - \frac{q_e\varphi(\vec{r})}{k_B T_e}\right)\ldots\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_i n_i + q_e n_e - \frac{n_i q_i^2\varphi(\vec{r})}{k_B T_i} - \frac{n_e e^2\varphi(\vec{r})}{k_B T_e}\ldots\right)$$

معلوم أن البلازما معتدلة كهربائيا، يستلزم ذلك $q_i n_i + q_e n_e = 0$. من ثم العلاقة

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{n_i q_i^2}{k_B T_i} + \frac{n_e q_e{}^2}{k_B T_e}\right)\varphi(\vec{r}) \tag{32.1}$$

نعرض العلاقة (32.1) على الصورة

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{n_e e q_i}{k_B T_i} + \frac{n_e e^2}{k_B T_e}\right) \equiv \frac{1}{\lambda_D^2} \quad \text{حيث وضعنا} \quad ، \quad \nabla^2\varphi = \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi(\vec{r}) \tag{33.1}$$

وعبارة ∇^2 المستقلة عن الزوايا هي

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$$

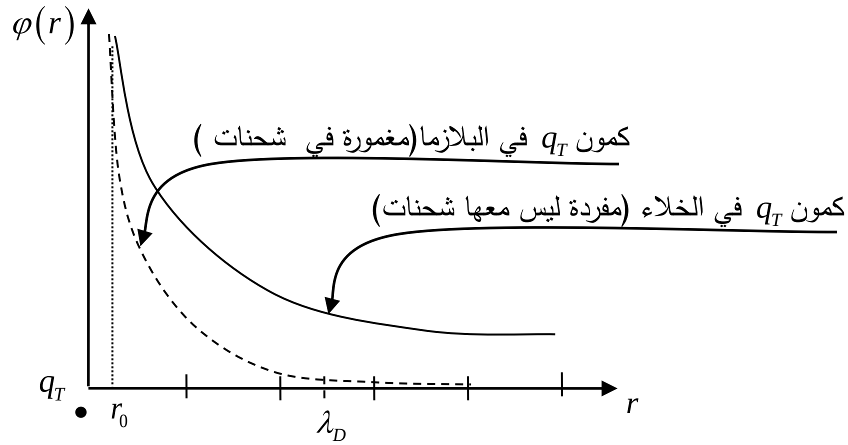
فحل للمعادلة (33.1) هو من الشكل

$$\varphi(r) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/a} \quad ، \quad \text{حيث } a \text{ ثابت مطلوب تعيينه} \tag{34.1}$$

لاحظ أن $\frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}$ هو كمون الشحنة q_T في الخلاء. وأن $\varphi(r) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/a}$ هو كمون الشحنة ذاتها وهي محاطة بالشحنات المخالفة (محجوبة) فالاختلاف في المعامل $e^{-r/a}$. فإدخال الكمون(34.1) في المعادلة (33.1) يفضي للشرط

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\lambda_D^2}$$

يتضح أن حل المعادلة (32.1) هو(34.1) على أن يكون $a = \lambda_D$. يبين الشكل(9) منحنى كمون الشحنة q_T.



الشكل9: يبين منحنيي كمون q_T ، المنقط هو كمون شحنة نقطية في الخلاء (لا تؤثر يظهر).
والمتواصل هو كمونها لما تكون مغمورة في خليط من الشحنات، فهناك تأثير وبالتالي تصادم و...

$$\varphi(r)=\frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/\lambda_D} \qquad (35.1)$$

يلاحظ وجود ثلاث مجالات متميزة لكمون شحنة الاختبار q_T في البلازما

أ. في المجال $r_0>r$ كمون وحقل الشحنة q_T وما يترتب عليهما غامض وغير معروف.

ب. المجال $\lambda_D \ge r \ge r_0$ ففي الناحية $\lambda_D >> r > r_0$ كمون الشحنة q_T يغدو كمون شحنة نقطية في الخلاء

$$\varphi(r)=\frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/\lambda_D}\cong\frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (36.1)$$

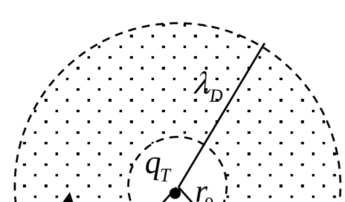
واضح أن كمونها لا يتعلق بدرجة الحرارة. مما يعني أن أثر الحركة الحرارية على كمونها هناك ضعيف. وفي بقية المجال كمونها هو

$$\varphi(r)=\frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/\lambda_D} \qquad (37.1)$$

وفي المنطقة المحاذية لـ λ_D ؛ $r \cong \lambda_D$ ، ينهار كمونها ويصير تافها $\varphi(r\approx\lambda_D)\cong 0$.

تتميز المنطقة $\lambda_D \ge r \ge r_0$ بوجود خليط من الشحنات المختلفة، أغالبها من الشحنات المخالفة لشحنة q_T . وبالتالي ستكون بها أحداث كثيرة نتيجة للتأثير مثل التصادم والإشعاع وانتشار الأمواج الكهرومغناطيسية وتبادل الكائنات الفيزيائية و...، فهي منطقة الحوادث في البلازما، وتسمى منطقة الفعل الجماعي.

ج) في المجال $r>\lambda_D$ ، شحنات البلازما محجوبة عن كمون وحقل الشحن q_T . لذلك لا تأثير فيها، وبالتالي لا أحداث فيها، كما يبين الشكل(10). البعد λ_D هو وسيط يميز البلازما يتعلق بدرجة حرارتها



الشكل10: يبين مختلف المناطق المتميزة

وكثافتها، ولا يتعلق بالكتل. وهو يخبر على أي بعد يحجب حقل شحنة. لذلك سمي بعد الحجب، وسمي نصف قطر كرة ديباي. وهو يعد البعد المميز للبلازما على سلم الأبعاد. يمكننا عرض عبارة بعد ديباي في العلاقة(33.1) على الصورة

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{n_e e q_i}{k_B T_i}+\frac{n_e e^2}{k_B T_e}\right)\equiv\frac{1}{\lambda_D^2} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{\lambda_{Di}^2}+\frac{1}{\lambda_{De}^2}\equiv\frac{1}{\lambda_D^2} \qquad (38.1)$$

حيث

$$\lambda_{Di}\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_i}{n_e e q_i}} \quad \text{و} \quad \lambda_{De}\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \qquad (39.1)$$

إذا كانت البلازما في حالة تأين تام، فإن $q_i = Ze$ ، عندئذ

$$\frac{n_e e^2}{k_B\varepsilon_0}\left(\frac{Z}{T_i}+\frac{1}{T_e}\right)\equiv\frac{1}{\lambda_D^2} \quad \text{و} \quad \lambda_{Di}\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_i}{Z n_e e^2}} \quad \text{و} \quad \lambda_{De}\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \qquad (40.1)$$

وإذا أهملت حركة الأيونات مقارنة بحركة الإلكترونات لعطالتها، وهو تقريب مشروع ومعمول به يصير بعد ديباي

$$\lambda_{De}=\lambda_e\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \qquad (41.1)$$

تمرين: اعتبر بلازما كرونا (بلازما شمسية) وهي متوسطة الكثافة، $n_e = 10^{13}$م$^{-3}$ ودرجة حرارتها $T_e = 1.5\ 10^{6}$ كلفن، عين بعد حجب البلازما

الحل: عبارة بعد ديباي للإلكترونات العامة تعطى بالعلاقة(41.1). والتعويض عن المعطيات يفضي للنتيجة

$$\lambda_{De}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}=\sqrt{\frac{k_B T_e}{n_e\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)4\pi\hbar c}}=2.67\ 10^{-2}\,m$$ ، من ثم

من ثم

$$\lambda_{De}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}=2.6710^{-2}\,m$$

9.1 وسيط عدد الأجسام في كرة ديباي

إن عدد الإلكترونان التي تبوأت كرة ديباي هو

$$N_D = \frac{4\pi}{3}\lambda_{De}^3 n_e \tag{42.1}$$

فعدد الإلكترونات، وما يماثله من الأيونات، في كرة ديباي لبلازما كورونا، انظر الجدول والمثال السابق، هو

$$N_D = \frac{4\pi}{3}\lambda_D^3 n_e = \frac{4\pi}{3}\left(2.6710^{-2}\right)^3 10^{13} = 7.97\ 10^8 elec$$

فهو عدد هائل. هذا يتماش مع وجوب صغر وسيط الترابط وتعريف البلازما، إذ حتى تسمى البلازما بلازما لا بد من أن يكون فيها الفعل الجماعي، أي يكون فيها عدد كبير من الأجسام في كرة ديباي تؤثر على بعضها البعض.

فعدد الأجسام في كرة ديباي يتزايد مع زيادة درجة الحرارة، لقهر قوى كولوم الطويلة المد، ويتناقص مع تزايد الكثافة العددية. عدد الأجسام في كرة ديباي (وسيط) هو من أهم وسائط البلازما، فإذا كان عدد الأجسام في كرة ديباي عاليا، $N_D >> 1$، الفعل الجماعي يهيمن على سلوك أجسامها، لأن كل شحنة منها يصل تأثيرها إلى عدد كبير من الشحنات. وعليه

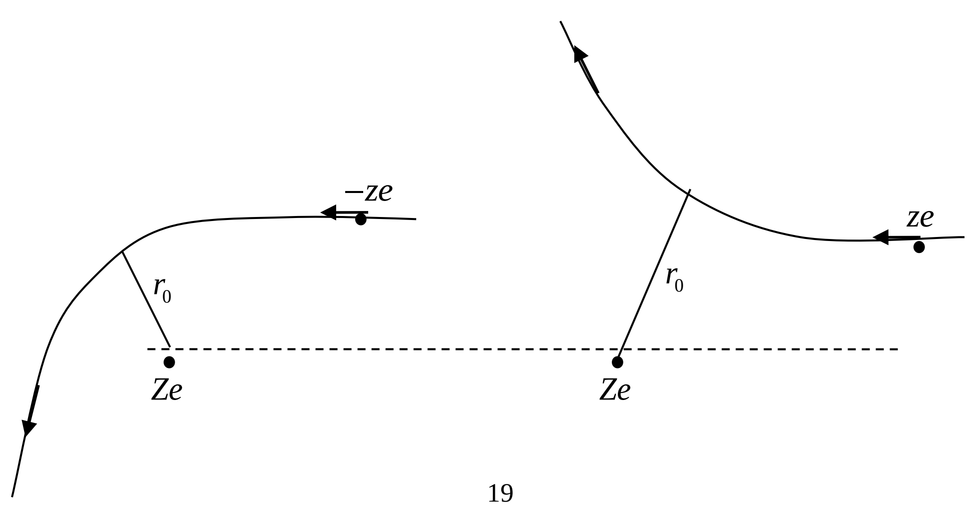
$$N_D = \frac{4\pi}{3}\lambda_{De}^3\, n_e >> 1 \tag{43.1}$$

وهو "الشرط اللازم حتى تشكل جملة أجسام مشحونة بلازما"

10.1 وسيط اقل الأبعاد

إن الشحنات في كرة ديباي (البلازما) متحركة فتقترب من بعضها البعض ثم تبتعد أكانت سالبة مع سالبة أم موجبة مع موجبة أم مختلفين في الإشارة، كما يبين الشكلان (11 و 12). فما مدا اقترابها من بعضها؟ فأقل الأبعاد هو وسيط يقيس هذا المد فيميز البلازما.

البعد r_0 في الشكل (11) هو أقل بعد في مسائل تصادم شحنتين متشابهتين. أيضا البعد r_0 في الشكل (12) هو أقل بعد في مسائل تصادم شحنتين مختلفتين.

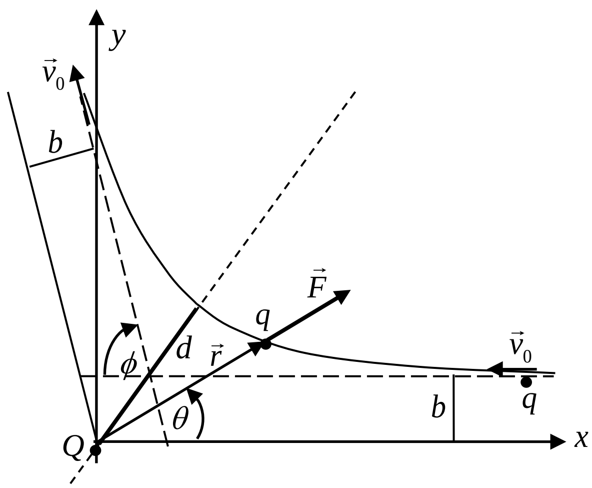


الشكل11: يبين تصادم شحنتين متماثلتين من بلازما واقل الأبعاد بينهما

الشكل12: يبين تصادم شحنتين مختلفتين من بلازما واقل الأبعاد بينهما

تعيين أقل بعد بين جسمين متصادمين

نعين أقل بعد بين جسمين متصادمين من خلال التمرين التالي. يبين الشكل(13) شحنتين متماثلتين(Q ، q) يتصادمان. قذفت الشحنة q بطاقة حركة قدرها E من البعد المتفاوت صوب الشحنة Q، فاقتربت منها ويتدافعان بالقوة الكهربائية، ومازال تقترب من بعضهما حتى نفذت طاقة الحركة. عندئذ تنحرف



الشكل13: يبين ماهية تصادم جسمين متدافعتين. فانحرفت القذيفة بالزاوية ϕ

القذيفة، ثم تأخذ تبتعد حتى تصير في البعد المتفاوت مرة أخرى، متحركة بنفس طاقة الحركة E التي زودت بها في البداية. باعتبار أن القذيفة حادت عن مسارها الأصلي بالزاوية ϕ، عين العلاقة بينها وبين بعد التسديد b والطاقة E.

الحل: إن القوة الكهربائية بين الشحنتين q و Q في كل لحظة هي

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (44.1)$$

وذلك باعتبار أن مبدأ الإحداثيات ينطبق على Q، وحسب القانون الأساسي معادلة حركة الشحنة q هي

$$\mu\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = \frac{qQ}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (45.1)$$

حيث μ الكتلة المختزلة. وإسقاطها على المحورين x و y يفض للعلاقتين

$$\begin{aligned} \mu\frac{dv_x}{dt} &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\cos\theta}{r^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \\ \mu\frac{dv_y}{dt} &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\sin\theta}{r^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^2} \end{aligned} \qquad (46.1)$$

يضاف إلى ذلك، حفظ الدفع الزاوي للشحنة q بالنسبة للشحنة Q، ثابت حركة لطبيعة القوة. فحفظه لحركة الشحنة q في حقل Q يفضي إلى العلاقة

$$\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mu v_0 b \tag{47.1}$$

لقد استخدمنا عبارة طول الدفع الزاوي لحركة مستوية، $L = \mu r^2 d\theta / dt$ المألوفة. من ثم فإن

$$\frac{1}{r^2} \equiv \frac{1}{bv_0} \frac{d\theta}{dt} \tag{48.1}$$

وإدخال ذلك في العلاقتين (46.1)، ينتج

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b\mu v_0} \cos\theta d\theta \equiv \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b\mu v_0} d\left(\sin\theta\right) \\ dv_y &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b\mu v_0} \sin\theta d\theta \equiv -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b\mu v_0} d\left(\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{49.1}$$

تكامل المعادلتين(49.1) يفضي إلى نفس النتيجة. لذلك نكتفي بتكامل المعادلة الأولى، تحقق باستعمال الثانية.

يلاحظ أنه عندما تتغير θ من $0 \leftarrow \pi - \phi$ تتغير v_x من $-v_0$ إلى $-v_0 \cos\phi$، ومنه التكامل

$$\int_{-v_0}^{-v_0\cos\phi} dv_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \mu b v_0} \int_0^{\pi-\phi} d\left(\sin\theta\right)$$

من ثم

$$v_0 - v_0\cos\phi = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \mu b v_0} \sin\left(\pi - \phi\right) = \frac{qQ \sin\phi}{4\pi\varepsilon_0 \mu b v_0}$$

ومنه العلاقة

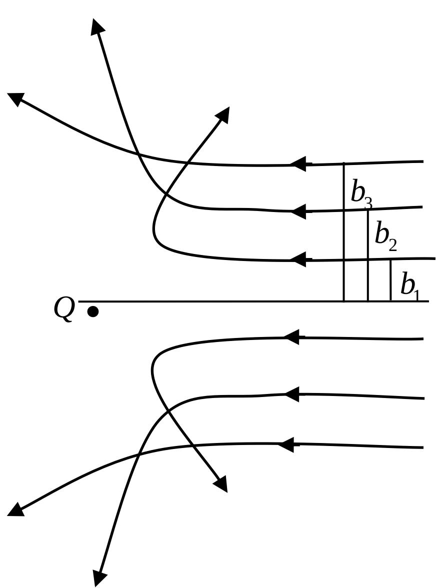
$$1 - \cos\phi = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b \mu v_0^2} \sin\phi$$

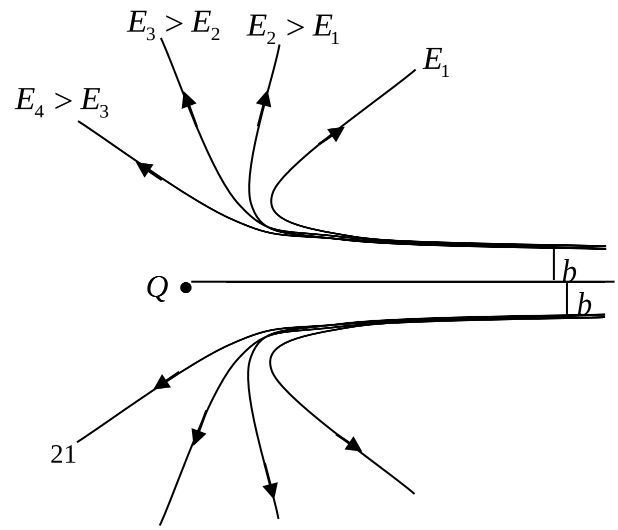
واستخدم نصف الزاوية، يجعل العلاقة بين ϕ و b و v_0 المنشودة، العلاقة

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b \mu v_0^2} \tag{50.1}$$

والزاوية بدلالة الطاقة هي

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 b E} \quad \text{،} \quad \text{حيث} \quad E \equiv \frac{1}{2}\mu v_0^2 \tag{51.1}$$



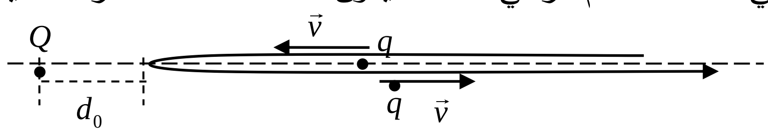


الشكل14: يبين زوايا انحراف القذيفة، تزيد كلما قلت طاقتها.

الشكل15: يبين زوايا انحراف القذيفة، تزيد كلما قلت بعد تسديدها.

الجدير بالملاحظة هو كيفية تغير زاوية الانحراف ϕ بدلالة طاقة القذيفة E وبعد التسديد b، يبين الشكل(14) تغير الزاوية ϕ بدلالة الطاقة E، فيزيد الانحراف القذيفة كلما نقصت طاقتها. ويبين الشكل(15) تغير الزاوية ϕ بدلالة بعد التسديد b، فيزيد انحراف القذيفة كلما صغر بعد تسديدها.

حالة خاصة: إن أقل الأبعاد في حالة التصادم الرأسي، $b=0$، يكون عندما تنفذ طاقة حركة القذيفة. فتتحول



الشكل 16: يبين ماهية التصادم الرأسي، $b=0$، للشحنتين q و Q، ويبين أقل بعد d_0 بينهما

كلها إلى طاقة كامنة، كما في الشكل (16). وعرض زاوية الانحراف بدلالة بعد التسديد b واقل الأبعاد d_0

$$E=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d_0} \quad \text{،} \quad \text{وبالتالي} \quad d_0=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 E} \tag{52.1}$$

وضم العلاقتين(50.1) و(51.1)، يفضي للعلاقة

$$\tan\frac{\phi}{2}=\frac{d_0}{2b} \tag{53.1}$$

الجدير بالذكر أن معرفة بعد تسديد القذيفة b غير متيسر لا بالقياس ولا بوسائل أخرى بينما قياس زاوية الانحراف وطاقة القذيفة متيسر. لذلك سنستبدله بمعان فيزيائية قابلة للقياس مباشرة مثل مقطع التصادم والمسير الحر وزمن تصادم القذيفة.

البحث عن أقل الأبعاد مهما كانت كيفية التصادم. لهذا الغرض نستعمل حفظ الطاقة الكلية والدفع الزاوي لجملة الجسمين المتصادمين. فقانون حفظ الطاقة الكلية أثناء التصادم يقضي

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{54.1}$$

حيث v سرعة القذيفة في اللحظة t، و V هي سرعة الهدف. وباظهار مركز كتل الجملة في العلاقة (48.1)، نجد

$$\frac{1}{2}(m+M)V_{C0}^2+\frac{1}{2}\mu v_0^2=\frac{1}{2}(m+M)V_C^2+\frac{1}{2}\mu v^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{55.1}$$

حيث $\vec{v}$ هي السرعة النسبية و m و $\vec{v}_0$ كتلة وسرعة الشحنة q. يعبر الطرف الأيسر عن طاقة الشحنة q في البعد المتفاوت من الشحنة Q وطاقة حركة مركز الكتل قبل التصادم، لهذا $\varphi(r\to\infty)=0$. وطاقة حركة مركز الكتل لا تتبدل أثناء التصادم ، وعليه

$$E=\frac{1}{2}\mu v_{r0}^2=\frac{1}{2}\mu v^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{56.1}$$

حيث E هي طاقة القذيفة عندما كانت في البعد المتفاوت، $E=\mu v_0^2/2$ ، نذكر بالعلاقة

$$\frac{1}{2}\mu v^2\equiv\frac{L^2}{2\mu r^2}+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \tag{57.1}$$

حيث $\vec{L}$ هو الدفع الزاوي المداري النسبي للشحنة q ، ومقداره أثناء التصادم هو $L=\mu v_0 b$. ندخل ذلك في العلاقة (56.1)، فنحصل على العلاقة

$$E=\frac{1}{2}\mu v_0^2=\frac{L^2}{2\mu r^2}+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=E\frac{b^2}{r^2}+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{58.1}$$

وبإبراز تعلق الموضع بالزاوية θ ؛ $r=r(\theta)$ في العلاقة (52.1) ، تصير

$$E=E\frac{b^2}{r^2}+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{59.1}$$

إن أقل الأبعاد بين الشحنتين يكون عندما يكون $dr/d\theta=0$. نرمز لأقل الأبعاد بالرمز d ، كما يظهر في الشكل(9). وعليه معادلة حفظ الطاقة تصير معادلة لأقل الأبعاد

$$E=E\frac{b^2}{d^2}+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{60.1}$$

واعتبار العلاقة (52.1) في العلاقة (60.1)، يفضي للنتيجة

$$E=E\frac{b^2}{d^2}+\frac{Ed_0}{d}$$

حيث رمزنا لـ d_0 للأقل بعد الموافق للتصادم الرأسي. من ثمّ معادلة أقل الأبعاد تصير

$$d^2-d_0d-b^2=0 \qquad \text{أو} \qquad d^2=b^2+d_0d$$

وحلها

$$d=\frac{1}{2}\left(d_0+\sqrt{d_0^2+4b^2}\right)=\frac{d_0}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{2b}{d_0}\right)^2}\right) \tag{61.1}$$

هذا بدلالة d_0 و b. وبدلالة زاوية الانحراف و d_0 ، هو

$$d=\frac{d_0}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(\varphi/2)}}\right) \quad \text{،} \quad \text{من ثمّ} \quad d=\frac{d_0}{2}\left(1+\frac{1}{\sin(\varphi/2)}\right)$$

وعليه

$$d=\frac{d_0}{2}\left(1+\frac{1}{\sin(\varphi/2)}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sin(\varphi/2)}\right)2\frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}=b\frac{\sin(\varphi/2)+1}{\cos(\varphi/2)} \tag{62.1}$$

$$d=b\frac{\sin(\varphi/2)+1}{\cos(\varphi/2)} \tag{63.1}$$

واضح من هذه العلاقة أن أقل الأبعاد دالة لزاوية الانحراف، وبعد التسديد. وعلى الخصوص أقل الأبعاد الموافق لانحراف $\phi = \frac{\pi}{2}$ هو

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{d_0}{2}\left(1+\sqrt{2}\right) = b\left(1+\sqrt{2}\right) = 2.4b$$

بعد لندو ($Landau\ Length$) **وسيط**

اعتمد الناس وسيطا آخر يميز البلازما. وهو اقل الأبعاد الظاهر في العلاقة (52.1) عندما تكون طاقة القذيفة تساوي الطاقة الحرارية $E = k_B T$. يعرف هذا الوسيط ببعد لندو

$$\theta = k_B T = E_P\left(\lambda_L\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \lambda_L} \tag{64.1}$$

من ثمّ، بعد لندو هو

$$\lambda_L = d_0\left(k_B T\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 k_B T} \tag{65.1}$$

وعلاقته ببعد ديباي وعدد الأجسام في كرته هي

$$N_{De} = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3 = \frac{\lambda_{De}}{3\lambda_{Le}} \tag{66.1}$$

11.1 تذبذب البلازما(اهتزاز البلازما)

تظهر في البلازما ظواهر عديدة، نذكر منها تذبذباتها(اهتزازاتها) المحلية. وهي ظاهرة تميز البلازما. توجد أسباب كثيرة تتسبب في إحداث اضطراب في توزيع شحنات البلازما، يترتب على هذا الخلل في فصل بعض الشحنات بروز حقل كهربائي يعمل على ازالة الخلل(فسمي الحقل الراد أو حقل الصل). يؤثر على الشحنات ليردها. معادلة حركة شحنة q_α هي

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_i \vec{E} \quad ، \quad m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q_e \vec{E} \tag{67.1}$$

أضف لهما معادلة حفظ الشحنات

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

نفرض أولا أن كتلة الأيونات ثقيلة أمام كتلة الإلكترونات. يمكّننا هذا الاعتبار من إهمال حركة الأيونات أمام حركة الإلكترونات. يترتب الاضطراب في كثافة تيار في البلازما قدرها

$$\vec{J} = \rho_e \vec{v}_e = n_e q_e \vec{v}_e \tag{68.1}$$

فاشتقاق معادلة حفظ الشحنة بالنسبة للزمن، وادخال معادلة الحركة، يفضي للعلاقة

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \vec{\nabla}\cdot\frac{n_e q_e}{m_e}\vec{E} = 0 \tag{69.1}$$

حيث $\vec{E}$ في العلاقتين(67.1) و(69.1) هو حقل نتج عن فصل الشحنات. وباعتبار معادلة تفرق الحقل

الكهربائي لماكسويل $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$، فيفضي ذلك للعلاقة

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho=\frac{d^2\rho}{dt^2}+\omega_{p_e}^2\rho=0 \qquad (70.1)$$

فالعلاقة (64.1) هي معادلة هزاز(ذبذب) تواتره

$$\omega_{p_e}\equiv\sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \qquad (71.1)$$

هو تواتر إلكترونات البلازما. النتيجة هي أن شحنات البلازما

تطبيق عددي: عين تواتر البلازما الكرونا كثافتها 10^{13} إلكترونا للمتر المكعب

$$\omega_{p_e}^2\equiv\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}=c^2 n_e\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\frac{4\pi\hbar c}{m_e c^2}=c^2 n_e\alpha\frac{4\pi\hbar c}{m_e c^2}=3.20\ 10^{16}\ s^{-2}$$

من ثم

$$\omega_{p_e}=1.79\ 0^8\,Hz \qquad (72.1)$$

هكذا أبدت البلازما تذبذبا لإلكتروناتها في المنطقة التي بها فصل للشحنات بتواتر ω_{p_e}.

الجدير بالملاحظة أن تذبذب(تواتر) إلكترونات البلازما لا يتعلق بدرجة حرارتها، ومحلي يعني لا ينتشر عبر البلازما، لأن حل المعادلة(70.1) هو من الشكل

$$\rho(t)=\rho_0\cos\omega_p t$$

لا يوجد به عدد موجي k، وبالتالي ليس لها سرعة طور ولا سرعة مجموعة.

تعميم الدراسة السابقة لتشمل حركة الأيونات. فمعادلة حفظ الشحنات وكثافة التيار بالبلازما هما

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \quad \text{،} \quad \vec{J}(\vec{r},t)=n_i q_i\vec{v}_i+n_e q_e\vec{v}_e \qquad (73.1)$$

نعوض عبارة كثافة التيار في معادلة حفظ الشحنات، ثم نشتقها بالنسبة للزمن

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+\vec{\nabla}\cdot\left(n_i q_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}+n_e q_e\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)=0 \qquad (74.1)$$

وبأخذ بعين الاعتبار معادلتي الحركة، فتفضي إلى المعادلة

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{n_i q_i^2}{m_i}+\frac{n_e q_e^2}{m_e}\right)\vec{E}=0 \qquad (75.1)$$

وباعتبار معادلة تفرق الحقل الكهربائي لماكسويل، $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$، نجد المعادلة

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+\left(\frac{n_i q_i^2}{m_i}+\frac{n_e q_e^2}{m_e}\right)\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0 \quad \text{أو} \quad \frac{d^2\rho}{dt^2}+\omega_p^2\rho=0 \qquad (76.1)$$

وهي معادلة مذبذب تواتره

$$\omega_p^2\equiv\omega_{p_i}^2+\omega_{p_e}^2 \quad \text{حيث} \quad \omega_{p_i}\equiv\sqrt{\frac{n_i Z_i^2 e^2}{m_i\varepsilon_0}} \quad \text{و} \quad \omega_{p_e}\equiv\sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}} \qquad (77.1)$$

ω_p هو تواتر البلازما، والتواتران ω_{p_e} و ω_{p_i} هما، على الترتيب، تواتر البلازما الإلكتروني وتواتر البلازما الأيوني.

العلاقات بين λ_{De} و ω_{pe} و v_{th}

ارمز للسرعة الحرارية لإلكترون بـ $v_{th,e}$، فالطاقة الحركية الحرارية لإلكترون مرتبطة بالطاقة الحرارة لأجسام البلازما بالعلاقة

$$\frac{1}{2}m_e v_{th}^2 = \frac{3}{2}k_B T_e \tag{78.1}$$

فعبارة السرعة الحرارية بدلالة درجة الحرارة هي

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T_e}{m_e}} \tag{79.1}$$

$$\lambda_{D_e}^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2} = \frac{m_e}{3}\frac{\varepsilon_0 3k_B T_e}{m_e n_e e^2} = \frac{v_{th}^2}{3\omega_{p_e}^2} \tag{80.1}$$

، وبالتالي

$$v_{th} = \sqrt{3}\omega_{p_e}\lambda_{D_e} \quad \text{أو} \quad \lambda_{D_e} = \frac{v_{th}}{\sqrt{3}\omega_{p_e}} \tag{81.1}$$

هذه علاقة بين λ_{De} و ω_{p_e} و v_{th}. وقد تجدها في بعض المراجع على الصورة $\lambda_{De} = \frac{v_{th}}{\omega_{pe}}$، فلا تكن في حرج.

خلاصة

يمكننا أن نلخص ما تقدم في النقاط التالية:

1. أجبنا عن السؤال، ما البلازما؟ وهي ليست مجر غاز مشحون فحسب بل تتشكل بشروط تتضمنها وسائطها. كل وسيط يعبر عن معنى فيزيائي.

2. وسيط الترابط $\Gamma = \frac{\langle E_P \rangle}{\langle E_C \rangle}$، وهو يعبر عن مدا حرية حركة أجسام البلازما، فإذا كان $\Gamma < 1$ قيل أن البلازما مثالية حركتها تفوق قيدها.

3. بعد ديباي، أو بعد الحجب λ_D، $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{nq^2}}$، هو وسيط يعبر عن سلم أبعاد البلازما، إذ كل الاحداث في البلازما تجري في الكرة التي نصف قطرها λ_D.

4. عدد الأجسام في كرة ديباي $N_D = \frac{4\pi}{3}\lambda_D^3 n$، يعبر عن عدد الشحنات التي تتفاعل مع بعضها في البلازما. فحتى للبلازما أحداثا لا بد من أن يكون كبيرا $N_D >> 1$ ليضمن الفعل الجماعي.

5. أقل الأبعاع r_0، $r_0 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 k_B T} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 E}$، يعبر عن مدا اقترار شحنة q من شحنة أخرا Q. وهي ميزة تختص بها البلازما.

6. تواتر البلازما، وسيط يعبر عن إهتزاز أجسام البلازما لما يحدث في أحد نواحيها خلل في توزيع الشحنات. فتنتج حقل ترد به الشحنات لازالة الخلل في التوزيع.

7. يمكن ضم بعض الوسائط، كما يلي

$v_{th}^e=\sqrt{3}\omega_{p_e}\lambda_{D_e}$. وللأيونات هو $v_{th}^i=\sqrt{3}\omega_{p_i}\lambda_{D_i}$، تتميز البلازما المثالية بالشروط التالية

(82.1) $\lambda_D << L$ $N_D >> 1$ و $\lambda_L < \lambda_D$ و $\Gamma_C << 1$ و $\omega_p v > 1$

حيث L يمثل أبعاد الإناء الحاوي للبلازما. τ هو زمن تصادم شحنات البلازما بالمعتدلة (ذرة أو جزيء معتدلة).

و $v=\frac{1}{\tau}$ هي وتيرة تصادم أجسام البلازما.

تمارين

تمرين 1: ملأت غرفة حجمها $0.5m^{-3}$ بغاز الهيدروجين، عند ضغط قدره 10 $pascal$ ودرجة حرارة الغرفة، 20° مأوية. عين

1. عدد جزيئات الهيدروجين H_2 في الغرفة.
2. كتلة الغاز في الغرفة، إن كتلة بروتون هي $m_p=1.6710^{-27}\,Kg$.
3. متوسط طاقة حركة الجزيئات على التوزيع المنتظم متماثل المناحي المستقر (توزيع ماكسول− بولزمان).
4. جذر متوسط مربع سرعة الجزيئات.
5. الطاقة اللازمة (بالجول) لتسخين الغاز إلى درجة $10^4\,^\circ K$، علما أن تفكيك الجزيئات إلى ذرات
6. يحتاج إلى $2eV$، وتأيين ذرة يحتاج إلى طاقة قدرها $13.6eV$. افرض أن $T_i=T_e$ وأن البلازما أينت تماما.
7. الضغط الكلي للبلازما عند درجة الحرارة $T_e=T_i=10^5\,^\circ K$.
8. السرعة الحرارية للأيونات وللإلكترونات عند درجة الحرارة $T_e=T_i=10^5\,^\circ K$.
9. تواتر البلازما للإلكترونات والأيونات ω_{pe} و ω_{pi}، وبعد ديباي للإلكترونات والأيونات λ_{De} و λ_{Di}، وعدد الأجسام في كرة ديباي وتواتر التصادم بين الإلكترونات والأيونات v_{ei}.

تمرين 2: اعتبر بلازما ماكسويلية (يعني أجسامها موزعة وفق توزيع ماكسويل− بولزمان)، فالتوزيع منتظم ومتماثل المناحي ومستقل عن الزمن. بناء عليه

1. أعتبر بلازما في حالة استقرار حراري، فتحقق من صحة ما يلي

$$\int d^3v f(v)=\int_0^\infty dv\, v^2\int d\Omega\, n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}=\int_0^\infty dv\, v^2 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\equiv\int_0^\infty dv\, g(v)$$ حيث

$$g(v)\equiv 4\pi n v^2\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$$

فيمكن اعتبار $g(v)$ توزيعا لأطوال سرعات الأجسام. من ثم معنى $dv\,g(v)$ هو عدد الأجسام الذي طول سرعاته بين v و $v+dv$. ارسم منحنى توزيع أطوال السرعات. ثم عين أقصى طول سرعة للأجسام الفئة A.

2. أثبت صحة العلاقات

$$\int d^3v f(v) \equiv 4\pi n\int_0^\infty dv\, v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} \equiv n\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \mathcal{F}(v_x)\int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mathcal{F}(v_y)\int_{-\infty}^{\infty} dv_z \mathcal{F}(v_z) = n$$ من ثم

$$\mathcal{F}(v_\alpha) \equiv \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\, e^{-\frac{mv_\alpha^2}{2k_BT}}$$ و $\alpha = x, y, z$ ويحقق النظم $$\int_{-\infty}^{\infty} dv_\alpha \mathcal{F}(v_\alpha) = 1$$

3. باعتبار أن بلازما في حالة استقرار حراري، فأثبت أن متوسط طاقة حركة جسم من الفئة A هو

$$\langle E_k \rangle_{\mathcal{F}^A} = \int d^3v \left\{\frac{1}{2} m^A v^2\right\} \mathcal{F}^A(v) \equiv \frac{3}{2} k_B T^A$$

وتبين أن متوسط طاقة حركة جسم من الفئة A وفق محور هي

$$\langle E_{kx} \rangle = \langle E_{ky} \rangle = \langle E_{kz} \rangle = \frac{1}{2} k_B T^A$$

4. بالتعريف متوسط طاقة حركة جسم من أجسام الفئة A هو

$$\langle E_k \rangle_{\mathcal{F}^A} = \int d^3v \left\{\frac{1}{2} m^A v^2\right\} \mathcal{F}^A(v)$$ أثبت أن

$$\langle E_k \rangle_{\mathcal{F}^A} = \int d^3v \left\{\frac{1}{2} m^A v^2\right\} \mathcal{F}^A(v) \equiv \frac{3}{2} k_B T^A$$

أستعن بالدالة $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t}$ وخصائصها $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

اثبت أن السرعة الحرارية v_{th} لجسم من أجسام الفئة A هو

$$\langle E_k \rangle_{\mathcal{F}^A} = \frac{3}{2} k_B T^A \equiv \frac{1}{2} m^A v_{th}^2 \equiv \frac{1}{2} m^A \langle v^2 \rangle_{\mathcal{F}^A}$$

من ثم

$$v_{th}^A = \sqrt{\frac{3k_B T^A}{m^A}} \equiv v_{rms}^A \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

السرعة v_{th} معروفة بالسرعة الحرارية لأجسام الفئة A (*thermal speed of particles kind A*)، لتعلقها بدرجة الحارة البلازما مباشرة.

والسرعة $v_{rms}^A \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ معروفة بجذر متوسط مربع سرعة أجسام الفئة A (*root mean square speed of particles kind A*).

5. أثبت أن متوسط طول سرعة أجسام الفئة A هو

$$\langle v \rangle_{\mathcal{F}^A} = \int d^3v\, v\, \mathcal{F}^A(v) \equiv \frac{1}{n}\int_0^\infty dv\, v\; g^A(v) \equiv \sqrt{\frac{8k_B T^A}{\pi m^A}}$$

بين على منحنى دالة التوزيع $g^A(v)$ السرعات

أ. أقصى طول سرعة أجسام الفئة A

ب. السرعة الحرارية للأجسام الفئة A

ج. ومتوسط طول سرعة أجسام الفئة A .

افرض أن أحدا أنشأ بلازما عدد أجسامها N . ولنحاول الإجابة عن السؤال التالي، كم عدد أجسامها التي لها نفس الطاقة؟

من يطمع أن يعرف حالة بلازما مكونة من N جسم، فعليه أن يعين موضع وسرعة كل جسم منها، يعني يعين $\left(\vec{r}_1(t),\vec{v}_1(t)\right)$ و $\left(\vec{r}_2(t),\vec{v}_2(t)\right)$ و... $\left(\vec{r}_\alpha(t),\vec{v}_\alpha(t)\right)$ و...و $\left(\vec{r}_N(t),\vec{v}_N(t)\right)$ في آن t. لبلوغ ذلك فعليه أن ينطلق من معادلات تحريك الحقول والشحنات، يعني يعين الحقلين $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ من معادلات ماكسويل، (2.1) و (3.1) أولا ثم يدخل نتائجهما في معادلة تحريك كل شحنة(1.1)