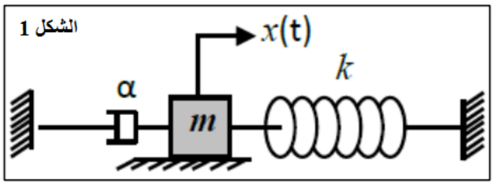
جامعــة الشهيد حمه لخضر الــوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا
سنة 2 هندسة الطرائق و البتروكيمياء

قسم هندسة الطرائق و البتروكيمياء
مقياس الاهتزازات والأمواج والضوء
2021-2020

السلسلة 2 (الهزاز الحر المتخامد)

التمرين الأول :

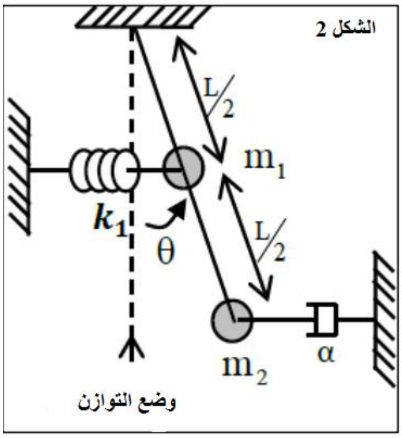


الشكل 1

نعتبر النظام الميكانيكي المتكون من كتلة m و نابض ثابت مرونته k و مخمد α (الشكل1).

1. اوجد المعادلة التفاضلية للحركة بطريقة لاغرانج.
2. اكتب الحل في حالة التخامد الضعيف $\omega_0 > \lambda$ و استنتج ω_a .

التمرين الثاني :

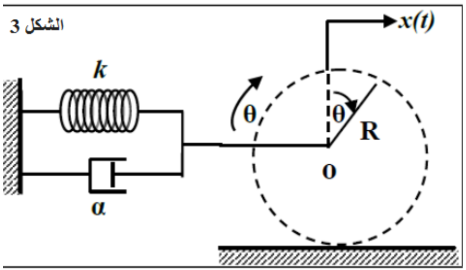


الشكل 2

يمثل الشكل2 نظام متكون من كتلتين m_1 و m_2 ، ساق مهمل الكتلة طوله L ، نابض ثابت مرونته k_1 و مخمد α.

1. اكتب المعادلة التفاضلية للحركة علما ان الهزاز ينجز اهتزازات صغيرة.
2. اوجد النبض الذاتي ω_0 و ω_a.
3. اكتب الحل في حالة التخامد الضعيف $\omega_0 > \lambda$ حيث تعطى : $\frac{k}{4} = k'$ ، $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$

التمرين الثالث :



الشكل 3

يتكون النظام المبين في الشكل 3 من قرص (M, R) يمكنه الدوران و الانسحاب افقيا مربوط بنابض ثابت مرونته k و مخمد α. $\left(j = \frac{1}{2} M R^2\right)$

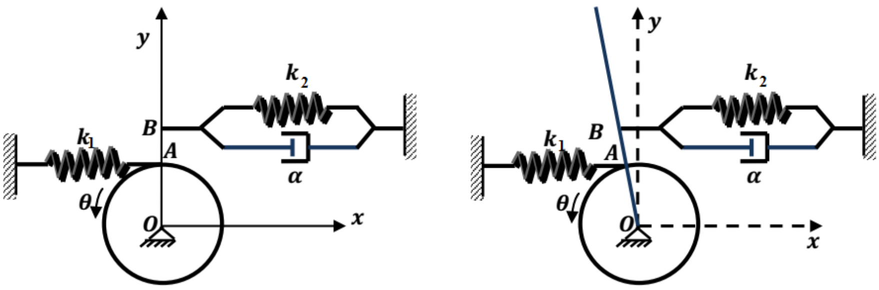
1. اكتب معادلة الحركة بدلالة λ و ω_0 .
2. اكتب الحل الرياضي اذا كان $\omega_0 = \lambda$.

التمرين الرابع :

الشكل 4 يمثل نظام متكون من قرص (M, R) و نابضين ثابت مرنتهما k_1 و k_2، و مخمد α. حيث :

$$OA = R\,, \qquad OB = \frac{L}{2}$$

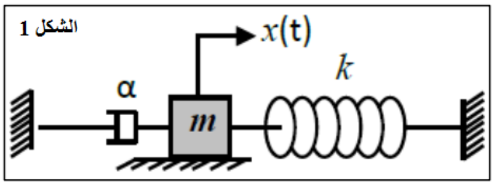
1. اوجد المعادلة التفاضلية للحركة.
2. اكتب حل المعادلة التفاضلية في حالة التخامد الضعيف
3. استنتج قيمة ω_0 ، λ .



الشكل 4

حل السلسلة 2

التمرين الأول :



1. المعادلة التفاضلية للحركة

1.1 الطاقة الحركية T

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

2.1 الطاقة الكامنة U

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

3.1 طاقة التبدد $\mathcal{D}$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2}$$

4.1 دالة لاغرانج

$$\boldsymbol{\mathcal{L}=T-U}$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

5.1 معادلة لاغرانج

تعطى معادلة لاغرانج للهزاز المتخامد كالتالي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}}$$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)=m\dot{x}\ \Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=-\,kx$$

$$\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}}=\ \alpha\dot{x}$$

اذن المعادلة التفاضلية للحركة تكتب كالتالي:

$$m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

حيث:

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m}\ , \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

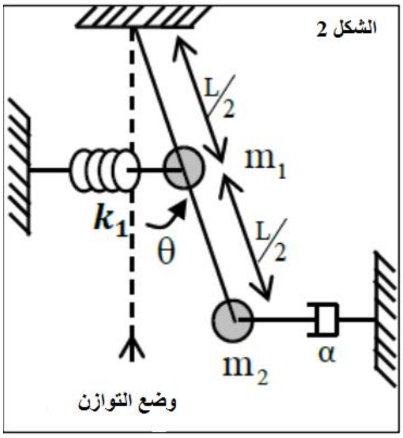
3. في حالة التخامد الضعيف تكتب عبارة الازاحة على الشكل التالي :

$$\boldsymbol{x(t) = Ce^{-\lambda t}cos\,(\omega_a t + \varphi)}$$

حيث :

$$\boldsymbol{\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Longrightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4\,m^2}}}$$

التمرين الثاني :



- **الاحداثيات و السرعات**

$$m_1\begin{cases}\frac{L}{2}sin\,\theta\\ \frac{L}{2}cos\,\theta\end{cases} \Longrightarrow m_1\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

$$m_2\begin{cases}L\,sin\,\theta\\ Lcos\,\theta\end{cases} \Longrightarrow m_2\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\ -L\dot{\theta}\,sin\,\theta\end{cases}$$

- **الطاقة الحركية $\boldsymbol{T}$**

$$T = T_{m_1} + T_{m_2}$$

$$T_{m_1} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2, \qquad \cos\theta \approx 1$$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2\left(L\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 = \frac{1}{2}m_2\left(L\dot{\theta}\right)^2$$

اذن :

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(L\dot{\theta}\right)^2$$

$$T=\frac{1}{2}L^2\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)\dot{\theta}^2$$

- **الطاقة الكامنة U**

$$U=U_{m_1}+U_{m_2}+U_k$$

$$U_{m_1}=m_1g\frac{L}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}\,m_1g\frac{L}{2}\theta^2$$

$$U_{m_2}=m_2gL(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m_2gL\theta^2$$

$$U_k=\frac{1}{2}k\,\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)^2=\frac{1}{2}k\,\frac{L^2}{4}\theta^2$$

اذن :

$$U=\frac{1}{2}\,m_1g\frac{L}{2}\theta^2+\frac{1}{2}m_2gL\theta^2+\frac{1}{2}k\,\frac{L^2}{4}\theta^2$$

$$U=\frac{1}{2}gL\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\theta^2+\frac{1}{2}k\,\frac{L^2}{4}\theta^2$$

- **طاقة التبدد $\mathcal{D}$**

$$\mathcal{D}=\frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

- **دالة لاغرانج $\mathcal{L}$**

$$\mathcal{L}=T-U$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}L^2\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}gL\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\theta^2-\frac{1}{2}k\,\frac{L^2}{4}\theta^2$$

المعادلة التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)=L^2\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -gL\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)\theta - k\frac{L^2}{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2 \dot{\theta}$$

$$L^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)\ddot{\theta} + \alpha L^2 \dot{\theta} + \left(gL\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) + \ k\ \frac{L^2}{4}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)}\dot{\theta} + \frac{\left(\frac{g}{L}\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) + \ \frac{k}{4}\right)}{\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)}\theta = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل : $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

- **النبض الذاتي $\boldsymbol{\omega_0}$:**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\left(\frac{g}{L}\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) + \ \frac{k}{4}\right)}{\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)}}$$

لدينا :

$$\frac{m_1}{4} = m_2 = m \text{ ، } \frac{k}{4} = k'$$

اذن :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{g}{L}3m + k'}{2m}} = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{k'}{2m}}$$

- **شبه النبض :** ω_a

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

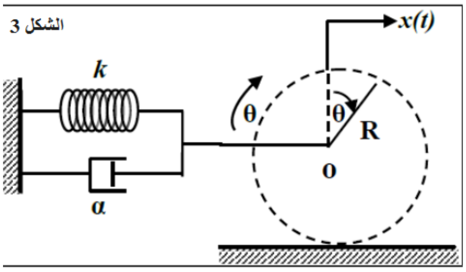
$$\omega_a = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{k'}{2m} - \frac{\alpha^2}{16m^2}}$$

- كتابة الحل في حالة التخامد الضعيف، حيث :

في حالة التخامد الضعيف يكتب الحل على الشكل التالي :

$$\theta(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$\theta(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{4m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{k'}{2m} - \frac{\alpha^2}{16m^2}}\,t + \varphi\right)$$



التمرين الثالث :

1. المعادلة التفاضلية للحركة

- الطاقة الحركية :

$$\boldsymbol{x = R\theta \implies \dot{x} = R\dot{\theta}}$$

$$T = T_{M_{\text{انسحابية}}} + T_{M_{\text{دورانية}}}$$

$$T_{M_{\text{انسحابية}}} = \frac{1}{2}M\left(R\dot{\theta}\right)^2 \quad , \quad T_{M_{\text{دورانية}}} = \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\left(R\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

- الطاقة الكامنة

$$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$$

- طاقة التبدد

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2$$

- دالة لاغرانج

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2$$

- المعادلة التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -kR^2\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

اذن :

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{3M}\dot{\theta} + \frac{2k}{3M}\theta = 0$$

معادلة تفاضلية من الشكل :

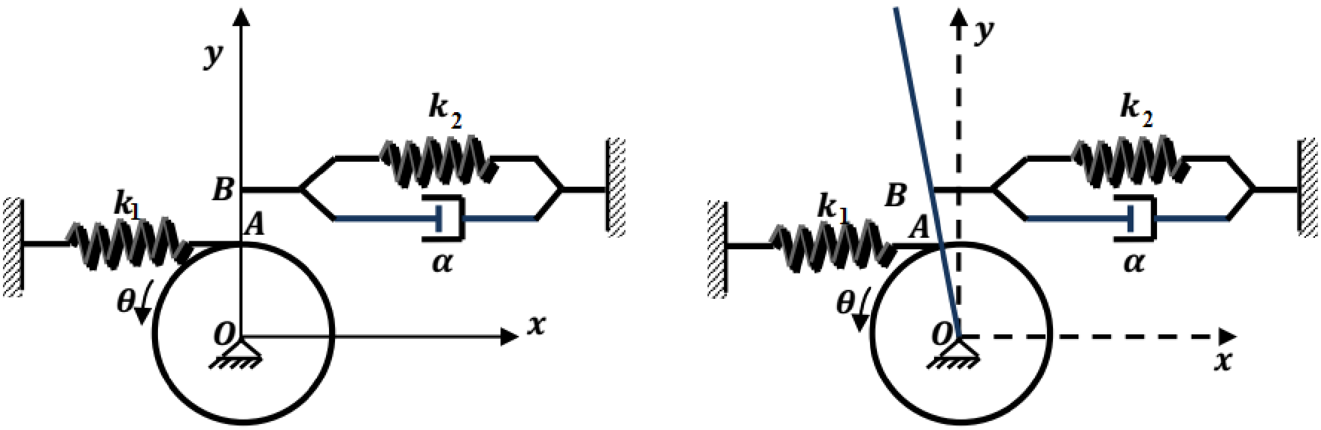
$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$2\lambda = \frac{2\alpha}{3M} \Longrightarrow \lambda = \frac{\alpha}{3M} \text{ ، } \omega_0^2 = \frac{2k}{3M} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

2. اذا كان $\omega_0 = \lambda$ يكون الحل من الشكل :

$$\theta(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\lambda t}$$

التمرين الرابع :



الشكل 4

1. المعادلة التفاضلية للحركة

- **الطاقة الحركية**

$$T = \frac{1}{2} j \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} MR^2) \dot{\theta}^2$$

$$U = U_{k_1} + U_{k_2} = \frac{1}{2} k_1 (R\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{L}{2}\theta\right)^2$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2$$

- دالة لاغرانج

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1(R\theta)^2 - \frac{1}{2}k_2\left(\frac{L}{2}\theta\right)^2$$

- المعادلة التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} + \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} + \left(k_1R^2 + k_2\frac{L^2}{4}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha\frac{L^2}{4}}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\dot{\theta} + \frac{\left(k_1R^2 + k_2\frac{L^2}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\theta = 0$$

معادلة تفاضلية من الشكل :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\lambda = \frac{\alpha L^2}{(4MR^2)}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k_1}{M} + \frac{k_2L^2}{2MR^2}}$$