الجزء الأول : الاهتزازات

الفصل الأول : عموميات

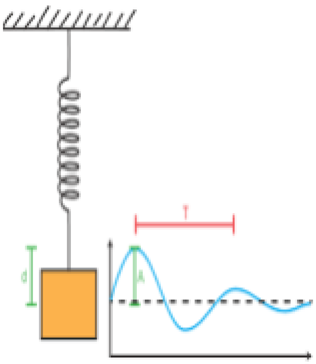
- ✓ تعريف الحركة الاهتزازية
- ✓ تعريف الحركة الدورية
- ✓ الحركة التوافقية البسيطة
- ✓ الاحداثيات المعممة
- ✓ درجة التحرر
- ✓ التوازن المستقر
- ✓ دالة لاغرانج

الفصل الأول : عموميات

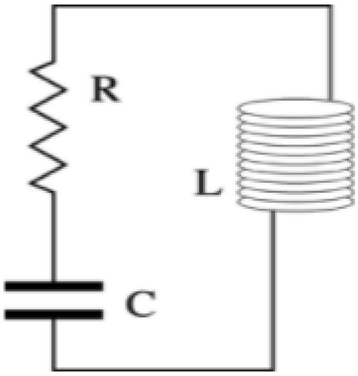
1. تعريف الحركة الاهتزازية (mouvement vibratoire)

الحركة الاهتزازية هي حركة ذهاب و إياب للجسم المهتز حول موضع سكونه او اتزانه. وقد تكون هذه الحركة الاهتزازية عشوائية مثل اهتزاز إطارات السيارة في طريق وعر، او تكون حركة اهتزازية دوريه مثل حركة النواس او الكتلة المعلقة بنابض.

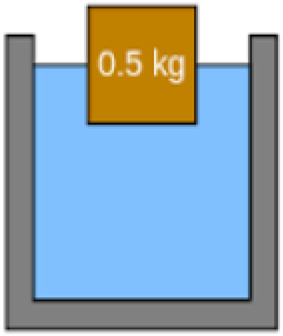
2. امثلة :



نابض - كتلة



الدارة RLC



جسم يطفو على سطح سائل

3. تعريف الحركة الدورية (mouvement périodique)

الحركة الدورية هي حركة تكرارية يعود فيها الجسم الي موضع محدد بعد فترة زمنية ثابتة، مثل حركة الأرض حول الشمس فهي حركة دورية حيث ان الأرض تعود الى موقع محدد كل فترة محددة من الزمن، كذلك حركة القمر الذي يعود لنفس موقعه بالنسبة للأرض كل فترة محددة من الزمن. و هناك الكثير من الأمثلة التي تتحرك حركة دورية، فحركة الجزيئات في المواد الصلبة تهتز حول موضع توازنها في حركة دورية مستمرة، و كذلك الأمواج الكهرومغناطيسية.

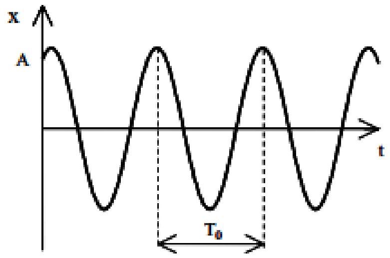
4. الحركة التوافقية البسيطة (mouvement harmonique simple)

الحركة التوافقية البسيطة هي حالة خاصة للحركة الدورية تحدث للأنظمة الميكانيكية التي تكون فيها القوة الميكانيكية تتناسب طردا مع موضع الجسم بالنسبة لنقطة اتزان ما، حيث تكون هذه القوة دائما في اتجاه نقطة الاتزان أي ان قوة الاسترجاع تتناسب طردا مع القوة المطبقة على النظام المكانيكي. و لدراسة هذه الحركات نقوم باهتزازات صغيرة بجوار نقطة التوازن المستقر و ذلك من اجل الحصول على معادلات تفاضلية سهلة للحل.

1.4 خصائص الحركة التوافقية البسيطة

عندما الحركة الاهتزازية حركة توافقية بسيطة تكون الازاحة هي دالة جيبية، تكتب على الشكل التالي :

$$y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{او} \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



حيث:

$x(t)$: الإزاحة و هي بعد الجسم المهتز عن موضع اتزانه في لحظة زمنية t و تقاس ب(m)

A : سعة الاهتزازة و هي اقصى إزاحة يصل اليها الجسم المهتز من وضع التوازن وحدتها (m)

ω_0 : نبض الحركة (النبض الذاتي للنظام) و وحدته $\left(rad/_{s}\right)$

T : دور الحركة و هو أصغر مجال زمني لازم لتكرار الحركة يرمز له ب T وحدته الثانية(s) بحيث $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$

f : تواتر الحركة أو التردد هو عدد تكرار الحركة خلال الثانية الواحدة يرمز له وحدته الهرتز (Hz) بحيث: $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}$

الابتدائيφ الطور و وحدته الراديان (rad)

في الحركة الاهتزازية يكون التردد ω و الدور T ثابتان بينما سعة الحركة و الطور يتم تحديدهما من الشروط الابتدائية.

2.3 معادلة الحركة بالاعداد المركبة

يستعمل التمثيل بالأعداد المركبة لتسهيل الحسابات، أي انه يمكن تحويل العبارات الجيبية الى عبارات اسية حيث يمكن كتابة معادلة الحركة الاهتزازية التوافقية باستعمال الاعداد المركبة على الشكل التالي : $x(t)=A\,e^{i(\omega t+\varphi)}$

الاعداد الحقيقية	الاعداد المركبة
$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$	$x(t)=A\,e^{i(\omega t+\varphi)}$
$\dot{x}(t)=-\omega A\sin(\omega_0 t+\varphi)$	$\dot{x}(t)=i\omega A\,e^{i(\omega t+\varphi)}$
$\ddot{x}(t)=-\omega^2 A\cos(\omega_0 t+\varphi)$	$\ddot{x}(t)=(i\omega)^2 A\,e^{i(\omega t+\varphi)}$

5. الاحداثيات المعممة (**coordonnées généralisées**)

الاحداثيات المعممة لنظام فيزيائي، هي احداثيات تسمح بوصف بوصف النظام (الموضع و الحرك) و تكون احداثيات مستقلة وكاملة، مستقلة يعني انه لا يوجد علاقة رياضية تجمع بين هذه الاحداثيات او بتعبير اخر اذا ثبتنا كل هذه الاحداثيات ماعدا واحدة فان الجملة تبقى تتحرك. وكاملة أي انها تكفي لوصف النظام بصفة تامة. حيث كل احداثي معمم يوافق 1 درجة تحرر.

مثال : نواس بسيط

ماهي الاحداثيات المعممة لهذا النظام ؟

لدينا $x^2 + y^2 = l^2$ $\quad y = l\cos\theta \quad$ $x = l\sin\theta$

يعني هناك علاقة بين x و y أي ان الاحداثي المعمم لهذا النظام هو θ.

5. درجة التحرر (degré de liberté)

يمكن حساب عدد درجات التحرر بالعلاقة التالية

$$\boldsymbol{d = N - l}$$

حيث :

$\boldsymbol{N}$: **عدد الاحداثيات**

$\boldsymbol{l}$: **عدد المعادلات او القيود التي تربط بين الاحداثيات**

مثال :

ما هو عدد درجات الحرية لنقطة مادية تتحرك على محيط دائرة مركزها O و نصف قطرها R موجودة في المستوي xoy:

المعادلات او القيود التي تربط بين الاحداثيات:

لدينا معادلة الدائرة تعطى بالعبارة التالية :

$$\boldsymbol{l = 1} \Leftarrow x^2 + y^2 = R^2$$

عدد الاحداثيات اثنان و هما $\boldsymbol{x}$ و y

اذن درجة الحرية لهذا النظام هي: $d = 2 - 1$

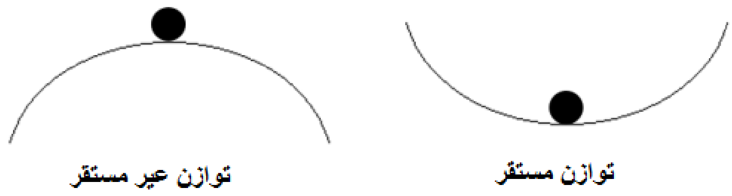
$$\boldsymbol{d = 1}$$

6. التوازن المستقر

يكون التوازن عندما يكون $\left(\sum \vec{F} = \vec{0}\right)$ او $\left(\sum \vec{M} = 0\right)$، و قد يكون توازن مستقر او غير مستقر، نقول عن التوازن انه مستقر اذا ابعدنا النظام عن موضع التوازن لكنه يعود الى توازنه تلقائيا أي يوجد قوة ارجاع تعيده الى توازنه، و اذا كان العكس فإننا نقول عن هذا التوازن غير مستقر.

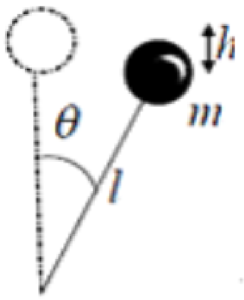
نفرض ان x_0 هي نقطة التوازن ، حيث تكون هذه النقطة هي وضع توازن غير مستقر اذا كانت الطاقة الكامنة تملك قيمة اعظمية عند النقطة x_0 و اذا كانت الطاقة الكامنة تملك قيمة صغرى في النقطة x_0 فانها تكون نقطة توازن مستقر. و اذا كان النظام في حالة توازن مستقر فان الطاقة الكامنة U تحقق العلاقة التالية :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0 \quad \text{و} \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$$



ويكون التوازن غير مستقر اذا كان :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} < 0$$



مثال :

اوجد أوضاع التوازن المستقر للنظام المبين في الشكل

تكتب عبارة الطاقة الكامنة لهذا النظام كالتالي :

$$U = -mgh = -mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \ -mgl\,sin\theta = 0 \ \Longrightarrow \ sin\theta = 0$$

اذن : أوضاع التوازن تكون عند : $\theta = 0$ او $\theta = \pi$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}(-mgl\,sin\theta) = -mgl\cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = -mgl \ < 0$$

اذن $\theta = 0$ هي نقطة توازن غير مستقر.

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} = mgl \ > 0$$

اذن : $\theta = \pi$ هي نقطة توازن مستقر .

7. دالة لاغرانج

تعطى دالة لاغرانج بالصغة الرياضية التالية:

$$\mathcal{L} = T - U$$

حيث:

$\mathcal{L}$: دالة لاغرانج (lagrangien) ، T : الطاقة الحركية ، U : الطاقة الكامنة

تكون صغة المعادلة التفاضلية حسب نوع الهزاز المراد دراسته و عدد المعادلات يساوي عدد الاحداثيات المعممة.

الهزاز الحر:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

الهزاز المتخامد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$$

$\mathcal{D}$: طاقة التبدد و تعطى بالعبارة التالية : $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2$

الهزاز القسري:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = f_{ext}$$

الجزء الأول : الاهتزازات

الفصل الثاني: الاهتزازات الحرة لنظام ذو درجة حرية واحدة تعريف الحركة الاهتزازية

- ✓ الاهتزازات الحرة الغير متخامدة لنظام ذو درجة حرية واحدة
- ✓ المعادلة التفاضلية للهزاز الحر
- ✓ طاقة الهزاز الحر
- ✓ الاهتزازات المتخامدة لنظام ذو درجة حرية واحدة
- ✓ المعادلة التفاضلية للهزاز المتخامد

الفصل الثاني : الاهتزازات الحرة لنظام ذو درجة حرية واحدة

1.2 الاهتزازات الحرة الغير متخامدة :

الاهتزازات الحرة هي الاهتزازات الناتجة عن إزاحة النظام عن موضع توازنه، او اكساب احد نقاطه سرعة ابتدائية ثم تركه يهتز بحرية دون تأثير أي قوة خارجية، في هذا الفصل سنهتم بدراسة الأنظمة التي لا يكون فيها فقدان للطاقة بحيث يمكن اعتبارها أنظمة محافظة.

1.1.2 المعادلة التفاضلية للحركة و إيجاد النبض الذاتي للنظام ω_0

المعادلة التفاضلية للهزاز الحر الغير متخامد تكون على الشكل التالي :

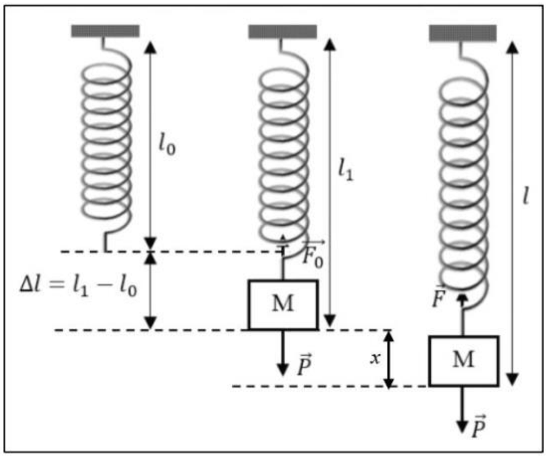
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \text{ او } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

حيث يمكن إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة باستعمال عدة طرق :

a) طريقة نيوتن باستعمال المبدأ الأساسي للتحريك
b) مبدأ انحفاظ الطاقة
c) طريقة لاغرانج

امثلة لأنظمة اهتزازية ذات درجة حرية واحدة

النظام: نابض–كتلة (النواس المروني)



a) طريقة نيوتن

بتطبيق المبدأ الاساسي للتحريك

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \qquad 1$$

عند التوازن :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \qquad 2$$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \qquad 3$$

بالاسقاط على محور الحركة (OX) نجد

$$P - T = 0 \qquad 4$$

$$mg - kx_0 = 0 \qquad 5$$

عند الحركة :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \qquad 6$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad 7$$

بالإسقاط:

$$P - T = m\ddot{x} \qquad 8$$

$$mg - k(x + x_0) = m\ddot{x} \qquad 9$$

باستعمال شرط التوازن (المعادلة 5) و التعويض في المعادلة 9 نجد :

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \qquad \mathbf{10}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وتحتاج الى حل رياضي حيث هذا الحل سيكون دالة، $x(t)$، تحقق المعادلة وتمثل تغير موقع الجسم بالنسبة للزمن تكون على الشكل التالي:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

حيث :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

يمكن حساب A و φ من الشروط الابتدائية

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ -A\omega_0 \sin\varphi = \dot{x}_0 \end{cases} \quad 11$$

و باستعمال جملة المعادليتين (11) يمكن استنتاج A و φ :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}}$$

$$\varphi = -Arctg\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\right)$$

b) طريقة انحفاظ الطاقة

مبدأ انحفاظ الطاقة يعني لا يوجد فقدان للطاقة خلال الحركة أي ان الطاقة الابتدائية تساوي الطاقة النهائية.

$$E = T + U \quad 12$$

حيث T : الطاقة الحركية

U : الطاقة الكامنة

من اجل النظام نابض–كتلة لدينا

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad 13$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad 14$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C^{te} \quad 15$$

اذن :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

باشتقاق عبارة الطاقة (15) نجد :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad 16$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

c) طريقة لاغرانج

لدينا :

$$\mathcal{L} = T - U \quad (17)$$

باستعمال العبارتين (13) و (14) يمكن كتابة دالة لاغرانج على الشكل التالي :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (18)$$

تكتب معادلة لاغرانج للنظام الحر ذو درجة حرية واحدة من الشكل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = kx$$

بالتعويض في المعادلة (19) نجد :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (20)$$

وهي نفس المعادلة التفاضلية المتحصل عليها بطريقة نيوتن و بمبدأ انحفاظ الطاقة.

2.1.2 طاقة الهزاز الحر

$$E = T + U \quad (21)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (22)$$

$$U = \frac{1}{2}\, kx^2 \quad (23)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (24)$$

نعلم ان الحل الرياضي للهزاز الحر هو:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

بتعويض $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ في العبارة (24) نجد

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 A^2 sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t + \varphi) \quad (25)$$

لدينا :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (26)$$

بالتعويض عن قيمة ω^2 في العبارة (25) نجد :

$$E = \frac{1}{2}kA^2[cos^2(\omega t + \varphi) + sin^2(\omega t + \varphi)] \quad 27$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad 28$$

العبارة (28) تبين ان الطاقة الحركية للحركة التوافقية البسيطة ثابتة و تتناسب مع مربع السعة. نلاحظ ان الطاقة الكامنة تكون صغيرة عندما تكون الطاقة الحركية كبيرة. و العكس صحيح لأن مجموعهما ثابت، حيث تكون الطاقة الميكانيكية الكلية عند $\pm A$ هي الطاقة الكامنة الأعظمية، لأن السرعة في هذه الحالة تكون معدومة و بالتالي لا يكون هناك طاقة حركية.

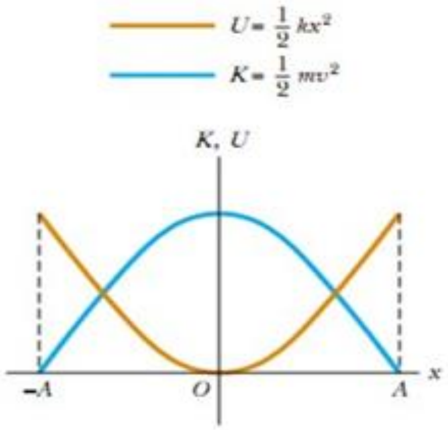
عند نقطة الاتزان: $x = 0$ تكون : $U = 0$

$$T = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2 \quad 29$$

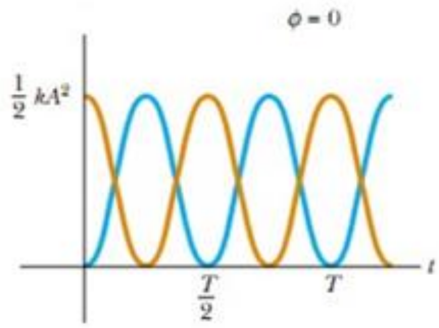
اذن عند $x = 0$ تكون الطاقة الحركية اعظمية:

$$T = \frac{1}{2}kA^2 \quad 30$$

الشكل .a يبين العلاقة بين الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة مع الزمن عندما تكون قيمة $\varphi = 0$. و الشكل . b يمثل تغيرات الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة بالنسبة لموضع الجسم.



الشكل a



الشكل b

2.2 الاهتزازات الحرة المتخامدة (oscillations libres amortis)

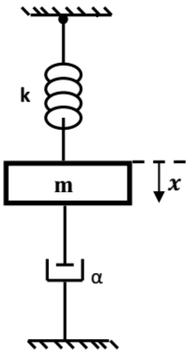
الحركة الاهتزازية التي درسناها فيما سبق هي حركة اهتزازية لنظام مثالي حيث ان النظام يستمر في الاهتزاز الى ما لانهاية تحت تأثير قوة واحدة و هي القوة الاسترجاعية حيث اهملنا جميع القوى التي تسبب فقدان الجملة الميكانيكية طاقتها مثل قوى الاحتكاك. في هذه الدراسة سوف نأخذ بعين الاعتبار القوى الخارجية لكن في حدود الحالة البسيطة حيث يكون ضياع الطاقة بسبب الاحتكاك اللزج.

1.2.2 الهزاز الحر المتخامد (oscillateur amorti)

يعرف الهزاز الحر المتخامد بتلك الاهتزازات الناتجة عن إزاحة الجملة عن وضع توازنها و تركها تهتز حتى تتخامد بسبب قوى الاحتكاك التي تظهر عند حركة الاجسام وهي قوة مقاومة تعمل على تقليل سرعة الجسم و تتناسب طرديا مع سرعة الجسم و اتجاه القوة يكون عكس اتجاه الحركة. هذه القوة المقاومة يمكن التعبير عنها بالعبارة التالية:

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

حيث: α ثابت يعرف بمعامل الاحتكاك اللزوجي وحدته $\frac{Ns}{m}$.



2.2.2 معادلة الحركة للهزاز الحر المتخامد

نعتبر الجملة الفيزيائية المكونة من نابض و كتلة و مخمد α .

بتطبيق المدأ الأساسي للتحريك

عند التوازن

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \qquad 31$$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \qquad 32$$

بالإسقاط على محور الحركة نجد :

$$mg - kx_0 = 0 \qquad 33$$

عند الحركة :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \qquad 34$$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a} \qquad 35$$

بالاسقاط على محور الحركة

$$mg - k(x_0 + x) - \alpha v = m\ddot{x} \qquad 36$$

باستعمال شرط التوازن من العبارة (33) و التعويض في المعادلة (36) :

$$-kx - \alpha v = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad 37$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية و يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad 38$$

حيث: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ و $\frac{\alpha}{m} = 2\lambda$

λ : معامل التخامد ، ω_0 : النض الذاتي للنظام

3.2.2. حل المعادلة التفاضلية للحركة

المعادلة (38) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية و تحتاج الى حل رياضي$x(t)$ حيث يكون يحقق المعادلة و يمثل تغير الجسم بالنسبة للزمن. بحيث$x(t)$ تكون دالة تربطها علاقة خطية بمشتقاتها. كما نعلم ان هذه خاصية من خواص الدالة الأسية.

اذن نفرض حلا اسيا من الشكل:

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{rt} \\ \dot{x}(t) = Are^{rt} \\ \ddot{x}(t) = Ar^2e^{rt} \end{cases} \qquad 39$$

بالتعويض في المعادلة (38) نجد :

$$r^2Ae^{rt} + 2\lambda Are^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0$$

$$Ae^{rt}[r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2] = 0 \qquad 40$$

اذن المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \qquad 41$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$$

توجد ثلاث حالات:

1. $\underline{\boldsymbol{\Delta > 0}} \Leftarrow 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 > 0$

اذن:

$\lambda > \omega_0$ (التخامد قوي)

يوجد جذران متمايزان حقيقيان :

$$r_1 = \frac{-2\lambda - 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}{2} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \qquad 42$$

$$r_2 = \frac{-2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}{2} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \qquad 43$$

اذن يمكن كتابة $\boldsymbol{x(t)}$ على الشكل

$$\boldsymbol{x(t) = A_1 e^{\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}}$$

$$\boldsymbol{x(t) = e^{-\lambda t}\left[A_1 e^{\left(-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}\right]} \qquad \mathbf{44}$$

في هذه الحالة التخامد قوي والحركة ممثلة بدالة اسية متناقصة والحركة تكون لا دورية.

.2 $\underline{\Delta = 0} \Leftarrow 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 0$

اذن: $\lambda = \omega_0$ (التخامد حرج)

يوجد حل مضاعف : $r = -\lambda$

اذن يمكن كتابة $\boldsymbol{x(t)}$ على الشكل

$$x(t) = A_1 e^{-\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t}$$

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t} \qquad 45$$

في هذه الحالة يكون التخامد حرج و الحركة لا دورية

التمثيل بيان

.3 $\underline{\boldsymbol{\Delta < 0}}$

(التخامد ضعيف) $\omega_0 > \lambda \Leftarrow 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$

لدينا

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$$

$$\Delta = -4(\omega_0^2 - \lambda^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

يوجد جذران تخيليان

$$r_1 = \frac{-2\lambda - i2\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}{2} = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \qquad 46$$

$$r_2 = \frac{-2\lambda + i2\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}{2} = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \qquad 47$$

اذن يمكن كتابة عبارة الازاحة على الشكل التالي :

$$x(t) = \boldsymbol{A_1 e}^{\left(-\lambda - i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t} + \boldsymbol{A_2 e}^{\left(-\lambda + i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t}$$

$$\boldsymbol{x(t) = A\, e^{-\lambda t}\left[e^{\left(i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t} + e^{\left(-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t}\right]} \qquad \mathbf{48}$$

باستعمال خصائص الاعداد المركبة يمكن كتابة العبارة (48) كالتالي :

$$x(t) = 2Ae^{-\lambda t}cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t \qquad 49$$

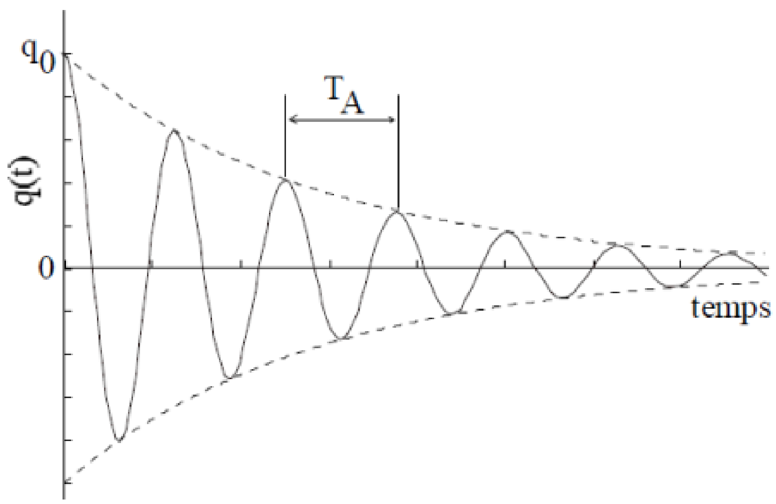
$$x(t) = Ce^{-\lambda t}cos\omega_A t \qquad 50$$

اذن الحركة شبه دورية و السعة متناقصة اسيا

بحيث: $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ و $T_A = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$

ω_A : الشبه نبض

T_A : الشبه دور



4.2.2 مقادير مميزة للحركة المتخامدة

- **معامل الجودة** : نسمي معامل الجودة الاهتزازات المقدار: $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$

$$\boldsymbol{2Q = \frac{\omega_0}{\lambda} \Leftarrow Q = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\lambda}}$$

لدينا : $\Delta = \boldsymbol{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}$

$$\Delta = 4\lambda^2(1 - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2})$$

$$\Delta = 4\lambda^2(1 - 4Q^2)$$

من خلال العبارة ** يمكن معرفة نوع التخامد

$\Delta = 0 \quad \Leftarrow \quad Q = \frac{1}{2} \Leftarrow$ التخامد حرج

$\Delta > 0 \quad \Leftarrow \quad Q < \frac{1}{2} \Leftarrow$ التخامد قوي

$\Delta < 0 \quad \Leftarrow \quad Q > \frac{1}{2} \Leftarrow$ التخامد ضعيف

- **التناقص اللوغرتمي** $(\boldsymbol{\delta})$

نستعمل هذه الطريقة لإيجاد مقدار التخامد في النظام الديناميكي و هو اللوغاريتم النسبة بين سعتين متعاقبتين للاهتزازات المتخامدة ، و هو المقدار الذي يمكننا من إيجاد معامل التخامد λ و ثابت الزمن τ الذي يمثل الزمن اللازم لكي تتناقص السعة ب $\frac{1}{e}$.

$$\delta = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{Ae^{-\lambda t_1}\cos(\omega_A t_1 + \varphi)}{Ae^{-\lambda t_2}\cos(\omega_A t_2 + \varphi)}$$

بما ان : $\boldsymbol{t_2 = t_1 + T_A}$

$$\cos(\omega_A t_1 + \varphi) = \cos(\omega_A t_2 + \varphi)$$

$$\delta = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t_2}} = \ln e^{\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$\delta = \lambda T_A$$

$$\lambda = \frac{\delta}{T_A}$$

- **ثابت الزمن** $\boldsymbol{\tau}$

في الحركة الشبه دورية أي عندما يكون التخامد ضعيف تكون السعة

$$A = ce^{-\lambda t}$$

من اجل $t = \frac{1}{\lambda}$

$$A = ce^{-1} = \frac{1}{e}c$$

اذن : الزمن τ اللازم لكي تتناقص السعة بمقدار $\frac{1}{e}$ هو $\tau = \frac{1}{\lambda}$

3. التماثل الكهروميكانيكي

النظام المكانيكي		النظام الكهربائي
الحركة الانسحابية	الحركة الدورانية	الدارة RLC
الازاحة x	الزاوية θ	الشحنة q
السرعة $\dot{x}$	السرعة الزاوية $\dot{\theta}$	التيار $i(t)$
الكتلة m	عزم العطالة j	الوشيعة L
ثابت المرونة k	ثابت الفتل C	$\frac{1}{c}$
المخمد	المخمد	المقاومة
$\sum \vec{f} = m\vec{a}$	$\sum M = j\ddot{\theta}$	$\sum V_i = 0$
الطاقة الحركية : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	الطاقة الحركية : $T = \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2$	طاقة الوشيعة: $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$
الطاقة الكامنة: $U = \frac{1}{2}kx^2$	الطاقة الكامنة: $U = mgh$	طاقة المكثفة: $\frac{1}{2c}q^2$