الجمهورية الجزائرية الدسمقراطية الشعبيةا

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الوادي

التحليل 03

السلاسل العددية – متتاليات و سلاسل الدوال

السلاسل الصحيحة – سلاسل فورية – التكامل الموسع

د . بالهادي احفوظه

الفصل الاول

السلاسل العددية

السلاسل العددية

تمهيد : نعتبر المتتالية العددية (u_n) وليكن المجموع غير منتهي الأتي :

$$u_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_\mathrm{n} + \cdots$$

وليكن المجموع الجزءي $S_n = u_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_\mathrm{n}$

نسمي سلسلة عددية ذات الحد العام u_n المتتالية العددية ذات الحد العام S_n

ونرمز للسلسلة العددية البرمز $\sum_{n\geq 0} \mathrm{u}_\mathrm{n}$ او $\sum_{n==0}^{\infty} \mathrm{u}_\mathrm{n}$

$$u_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_\mathrm{n} + \cdots$$

المتتالية العددية ذات الحد العام u_n تكون من الشكل $u_0, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots + \mathrm{u}_\mathrm{n}, \ldots$

السلسلة العددية ذات الحد العام u_n تكون من الشكل

$$u_0, u_0 + \mathrm{u}_1, u_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2, \ldots, u_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_\mathrm{n}, \ldots$$

تعريف : نقول ان السلسلة العددية ذات الحد العام u_n انها متقاربة اذا وفقط اذا كان

المتتالية العددية ذات الحد العام S_n متقاربة بمعنى

$\sum_{n\geq 0} \mathrm{u}_\mathrm{n}$ متقاربة $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0\quad |S_\mathrm{n} - \mathrm{S}| < \varepsilon$

$\sum_{n\geq 0} \mathrm{u}_\mathrm{n}$ متقاربة $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} \lim_{\mathrm{n}\to\infty} S_\mathrm{n} = \mathrm{S}$ حيث S_n المجموع الجزءي للسلسلة $\sum_{n\geq 0} \mathrm{u}_\mathrm{n}$

اذا كانت $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} S_\mathrm{n} = \mathrm{S}$ نقول ان السلسلة $\sum_{n\geq 0} \mathrm{u}_\mathrm{n}$ متقاربة وان مجموعها S او ان السلسلة

$\sum_{n\geq 0} \mathrm{u_n}$ تقبل المجموع S ونكتب $S = \sum_{n\geq 0} \mathrm{u_n}$

ملاحظات :

(1) كل سلسلة غير متقاربة تكون متباعدة

(2) دراسة طبيعة سلسلة يعني تقاربها اوتباعدها

(3) نقول عن سلسلة عددية ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ انها متزايدة (اومتزايدة تماما) اذا كانت متتالية المجاميع الجزئية (S_n) متزايدة (اومتزايدة تماما)

(4) نقول عن سلسلة عددية ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ انها متناقصة (اومتناقصة تماما) اذا كانت متتالية المجاميع الجزئية (S_n) انها متناقصة (اومتناقصة تماما)

رتابة السلاسل العددية : نقول عن سلسلة عددية ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ انها رتيبة اذا كانت متتالية المجاميع الجزئية (S_n) انها رتيبة

ملاحظة : سلسلتان عدديتان لا يختلفان الا في عدد منته من الحدود لهما نفس الطبيعة

الاثبات :

نعتبر سلسلتين عدديتين $\sum_{n\geq 0} \mathrm{u_n}$ $\sum_{n\geq 0} \mathrm{v_n}$ نفرض نهما يختلفان الا في عدد منته من الحدود

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{u_n} = u_0 + \mathrm{u_1} + \cdots + \mathrm{u_{n_0}} + \mathrm{u_{n_{0+1}}} + \cdots + \mathrm{u_n} + \cdots$$

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{v_n} = v_0 + \mathrm{v_1} + \cdots + \mathrm{v_{n_0}} + \mathrm{v_{n_{0+1}}} + \cdots + \mathrm{v_n} + \cdots$$

اي توجد رتبة $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall n > n_0 \quad \mathrm{u_n} = \mathrm{v_n}$$

وليكن

$$S_\mathrm{n} = \sum_{\mathrm{k}==0}^{n} \mathrm{u_k} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{n_0} \mathrm{u_k} + \sum_{\mathrm{k}=n_0+1}^{\mathrm{n}} \mathrm{u_k}$$

$$T_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{k}==0}^{n} \mathrm{v_k} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{n_0} \mathrm{v_k} + \sum_{\mathrm{k}=n_0+1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_k}$$

ومنه
$$S_{\mathrm{n}} - T_{\mathrm{n}} = \mathrm{A}$$

اي
$$S_{\mathrm{n}} = A + T_{\mathrm{n}}$$

اذا كانت S_{n} متقاربة فان T_{n} متقاربة والعكس بالعكس اي ان المتتاليتان(S_{n})و(T_{n}) لهما نفس الطبيعة

نتيجة : اذا اظفنا او حذفنا عدد منته من الحدود الي سلسلة عددية معينة فان ذلك لا يغيرطبيعتها

مثال :

(1) دراسة السلسلة الهندسية

نسمي سلسلة هندسية كل سلسلة حدها العام من شكل $u_n = \mathrm{aq^n}\ \mathrm{a} \neq 0$

المجموع الجزئي يعطى بالصيغة التالية j

$$\mathrm{S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = a + aq + \cdots + aq^n = a(1 + q + \cdots + q^n)}$$

$$= \begin{cases} a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ a(n+1) & q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{S_n} = \frac{a}{1-q} \quad , |q| < 1$$

ومنه السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{aq^n}$ متقاربة من اجل $|q| < 1$ ومجموعها $S = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{aq^n} = \frac{a}{1-q}$

(2) دراسة السلسلة التوافقية $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

نضع $S_n = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{k}$ $\quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - log(n) > 0$

ومنه
$$S_n > log(n)$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} S_n = \infty \Leftarrow \lim_{\mathrm{n}\to\infty} S_n > \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \log n = \infty$$

وعليه السلسلة التوافقية $\sum_{\text{n}=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

مثال : اوجد S مجموع السلسلة $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{n}(\text{n}+1)}$

نضع $$u_n = \frac{1}{\text{n}(\text{n}+1)} = \frac{1}{\text{n}} - \frac{1}{\text{n}+1}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\text{n}} - \frac{1}{\text{n}+1} = 1 - \frac{1}{\text{n}+1}$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{\text{n}+1} = 1$$

ومنه $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{n}(\text{n}+1)} = 1$$

الشرط اللازم لتقارب سلسلة عددية : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ السلسلة العددية ذات الحد العام u_n

نظرية : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ السلسلة العددية ذات الحد العام u_n

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $\lim_{\text{n} \to \infty} u_n = 0$ والعكس غيرصحيح

الإثبات

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ السلسلة العددية متقاربة اذا $\exists S \in \mathbb{R} \ / \lim_{\text{n} \to \infty} S_n = \text{S}$

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{\text{n} \to \infty} u_{\text{n}} = \lim_{\text{n} \to \infty} S_{\text{n}} - S_{\text{n}-1} = \text{S} - \text{S} = 0$$

عكس الاستلزام غير صحيح نستعمل مثال مضاد السلسلة $\sum_{\text{n} \geq 1} \frac{1}{\text{n}}$ متباعدة لكن $\lim_{\text{n} \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

نتيجة : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ السلسلة العددية ذات الحد العام u_n

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \text{متباعدة} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

الإثبات

لدينا من النظرية أن

$$\text{بستعمال العكس النقيض نجد} \lim_{\mathrm{n}\to\infty} u_n = 0 \quad \Longleftarrow \quad \text{متقاربة} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow \text{متباعدة} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

(II) السلاسل ذات الحدود الموجبة

تعريف : نقول أن السلسلة ذات الحد العام u_n بانها ذات حدود موجبة اذا حققت :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \geq 0$$

ملاحظة :

واضح أنه هذه الحالة $S_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ حيث S_n هو المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة المشار اليها

واضح كذلك أنه اذا كانت السلسلة متقاربة فان مجموعها S يحقق

$$S = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} S_{\mathrm{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{بحيث} \quad \mathrm{S} \geq 0$$

دراسة طبيعة السلاسل ذات الحدود الموجبة :

1) نقوم في هذا الجزء من الدرس باختيار السلاسل غيما اذا كانت متقاربة او متباعدة و كذلك ندرس عدة معايير لاختيار هذه السلاسل ذات الحدود الموجبة

2) تجدر الإشارة إلى أن هذه المعايير ستدرسها لا تكون صالحة إذا كانت السلاسل ليست ذات حدود موجبة اي أن : $\exists n \in \mathbb{N} / U_n < 0$

معيار المقارنة :

نعتبر سلسلتين ذات حدود موجبة وذات حدود عامة على التوالي

u_n , v_n اذا تحققت $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ فانه :

اذا كانت $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة فان $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

اذا كانت $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة فان $\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة

البرهان : نعتبر سلسلتين ذات حدود موجبة وذات حدود عامة على التوالي

u_n , v_n و ليكن S_n , T_n المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة ذات الحد العام u_n , v_n على الترتيب

نفرض أن $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و منه نستنتج $S_n \leq T_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

اذا كانت السلسلة ذات الحد العام v_nمتقاربة هذا يعني ان المجموع الجزئي T_n يقبل نهاية منتهية و لتكن T

بما أن $0 \leq S_n \leq T_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ اذن سنتحصل على $0 \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n$

و منه $0 \leq \lim_{n\to\leftrightarrow\infty} S_n \leq T_n$ لأن $\lim_{n\to\infty} T_n = T$

اذا نستنتج ان المجموع الجزئ للسلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ محدودة من الاعلى بT وهي متزايدة اذن S_n

ومنه المتتالية S_n متقاربة وعليه السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة لان

اذا كانت $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة لان $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و منه نستنتج $S_n \leq T_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $0 \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n$

إذن السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة

المعيار اللوغارتمي : نعتبر سلسلتبن عدديتين ذات حدود موجبة تماما وذات حدود عامة علي التوالي

u_n , v_n

اذا تحقق $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ فانه اذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة و اذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة

الإثبات : نعتبر سلسلتين عدديتين ذات حدود موجبة تماما وذات حدود عامة على التوالي v_n , u_n

و تحقق $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ بما ان $v_n > 0 , u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ بضرب طرفي

المتراجحة في $\frac{u_n}{v_{n+1}}$ نجد $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \cdots \leq \frac{u_1}{v_1} \leq \frac{u_0}{v_0}$$

اذن $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_0}{v_0}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \frac{u_0}{v_0} v_n$$

اذا كانت السلسلة ذات الحد العام v_n متقاربة فان السلسلة ذات الحد العام $\frac{u_0}{v_0} v_n$ متقاربة وحسب

المقارنة فان السلسلة ذات الحد العام u_n متقاربة

اذا كانت السلسلة ذات الحد العام u_n متباعدة حسب المقارنة فان السلسلة ذات الحد العام $\frac{u_0}{v_0} v_n$ متباعدة

ومنه السلسلة ذات الحد العام v_n متباعدة

مثال : ادرس السلاسل ذات الحدود العامة التالية $\frac{1}{n!} (n \geq 0)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (n > 1), \qquad \frac{1}{n^{\alpha}}, (\alpha \in \mathbb{Z}, n > 0) \qquad \frac{1}{\sin(n)}, \qquad \frac{1}{\log n} \quad n \geq 2$$

الحل : $(*) \quad n! \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 3$ ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 3 \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$$

$\frac{1}{2^n}$ حد عام لسلسلة هندسية متقاربة $\left(q = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{ذات الاساس} \right)$ باستخدام معيار المقارنة

فان السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n!}$ متقاربة

(∗) نعلم ان $\forall n \geq 1 \ n \geq \sqrt{n}$ ومنه $\forall n \geq 1 \ \frac{1}{\mathrm{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}$

$\frac{1}{\mathrm{n}}$ حد عام لسلسلة توافقية متباعدة حسب معيار المقارنة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}$ متباعدة

(∗) $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \ \log n < n$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ توافقية متباعدة ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ متباعدة (حذف حد لا يغير من طبيعة السلسلة)

وحسب معيار المقارنة فان السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n}$ متباعدة

(∗) $\forall \alpha > 1 \ n^{\alpha} > n!$ $\quad \forall \alpha > 1 \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n!}$

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ متقاربة وحسب معيار المقارنة فان السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ متقاربة

اذا كان $\alpha \in]0,1[$ فان $n^{\alpha} < n$ $\quad \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}$

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ توافقية متباعدة ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ متباعدة وحسب معيار المقارنة

فان السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}}$ متباعدة

(∗) $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{\sin n} \neq 0$ ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sin n}$ متباعدة

المعيار التكاملي : نعتبر سلسلة عددية ذات حدود موجبة وحدها العام u_{n} و ليكن f

تطبيق موجب ومتناقص علي المجال $[1, \infty[$ اذا تحقق $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} \quad u_{\mathrm{n}} = f(n)$

السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_{\mathrm{n}}$ متقاربة اذا وفقط اذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متقارب

تعريف : ليكن g تطبيق معرف وقابل الاشتقاق علي مجال (a, b) نعرف التكامل الموسع

$$\int_a^{\infty} \mathrm{g(t)dt} = \lim_{\mathrm{a}\to\infty} \int_a^{\mathrm{a}} \mathrm{g(t)dt}$$

اذا كانت النهاية موجودة نقول انه متقارب واذا غير موجودة او مالانهاية نقول انه متباعد

الإثبات

ليكن f تطبيق موجب ومتناقص علي المجال $[1,+\infty[$ و لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ [n,n+1] \subset\ [1,+\infty[$$

واضح ان ليكن f تطبيق موجب ومتناقص علي كل مجال من الشكل $\forall n \in \mathbb{N}^*\ [n,n+1]$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}^*\ [n,n+1]$ فان $f(n+1) \leq\ f(x) \leq\ f(n)$

بمان التطبيق f يحقق $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ u_n = f(n)$ نستنتج $u_{n+1} \leq\ f(x) \leq\ u_n$

نكامل علي المجالات $\forall n \in \mathbb{N}^*\ [n,n+1]$ اذن

$$\int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} u_{n+1}dx \leq \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} f(x)dx \leq \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} u_n dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \ u_{n+1} \leq\ \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} f(x)dx \leq u_n$$

ومنه

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k+1}} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \ S_{n+1} - u_1 \leq\ \int_1^{\mathrm{n+1}} f(x)dx \leq\ S_n$$

نفرض ان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة اذن متتالية (S_n) متقاربة ومنه $\lim_{n\to\infty} S_n$ وعليه

$$\lim_{n\to\infty}\ \ S_{n+1} - u_1 \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^{\mathrm{n+1}} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$S - u_1 \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq\ S$$

لدينا ان f تطبيق موجب ورتيب علي المجال $[1,+\infty[$ اذن $0\ \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq S$

نستنتج ان $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ منتهي لانه محدود من الاعلي ب S اذن $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \alpha \leq S$$ ومنه متقارب

الحالة العكسية

اذا كان $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متقارب فانه $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \alpha \leq S$

ومنه $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \alpha$

المتتالية (S_n) محدودة من الاعلى ومتزايدة فهي متقاربة وعليه فان السلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة

دراسة سلاسل ريمان :

تعريف : نسمي سلاسل ريمان السلاسل العددية ذات الحد العام u_n الموجب تماما من الشكل

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \ , \alpha \in \mathbb{R}$$

لدراسة سلاسل ريمان $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}\ , \alpha \in \mathbb{R}$ نطبق المعيار التكاملي نبحث عن تطبيق f

موجب ومتناقص علي المجال $[1,\infty[$ يحقق $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = f(n)$

بماان سلاسل ريمان تكتب علي الشكل $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}\ , \alpha \in \mathbb{R}$

اذن ناخذ $\forall x \geq 1 \ f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\ , \alpha \in \mathbb{R}$

التطبيق f موجب ومتناقص من اجل كل $\alpha > 0$ فهو يحقق شروط المعيار التكاملي ومنه

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}\ , \alpha > 0$ و $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ لهما نفس الطبيعة

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^{\alpha}}dx = \lim_{\mathrm{y}\to\infty}\int_{1}^{\mathrm{y}} \frac{1}{\mathrm{x}^{\alpha}}dx = \lim_{\mathrm{y}\to\infty}\left[\frac{\mathrm{x}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{1}^{\mathrm{y}}$$

$$= \lim_{\mathrm{y}\to\infty}\frac{\mathrm{y}^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty \ , & \alpha < 1 \end{cases}$$

اذن التكامل متقارب اذا كان $\alpha > 1$ ومتباعد اذا كان $0 < \alpha < 1$ ومنه نستنتج ان السلسلة

$\sum_{\mathrm{n}\geq 1}\frac{1}{\mathrm{n}^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ متقاربة اذا كان $\alpha > 1$ ومتباعدة اذا كان $0 < \alpha < 1$

معيار التكافؤ : نعتبر سلسلتبن عدديتين ذات حدود موجبة تماما وذات حدود عامة علي التوالي

v_n , u_n

(ا) اذا وجد عددين $M > 0$ و $\mathrm{m} \geq 0$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq m < \frac{u_n}{v_n} < M$ فان

السلسلتين $\sum_{n\geq 0} u_n$ و $\sum_{n\geq 0} v_n$ لهما نفس الطبيعة

(ب) اذا كانت $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \mathrm{k}, (\mathrm{k} \in \mathbb{R}_{+}^{*})$ فان السلسلتين $\sum_{n\geq 0} u_n$ و $\sum_{n\geq 0} v_n$ لهما نفس الطبيعة

ونقول انهما متكافئتين ونرمز للتكافؤ بالرمز $\sum_{n\geq 0} u_n \sim \sum_{n\geq 0} v_n$

الإثبات

نبرهن وجود عددين $M > 0$ و $\mathrm{m} \geq 0$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq m < \frac{u_n}{v_n} < M$ بمان

$u_n > 0$ و $v_n > 0$ بضرب طرفي المتراجحة $0 \leq m < \frac{u_n}{v_n} < M$ في v_n نتحصل

متراجحتين

$$\begin{cases} u_n < M\, v_n & (1) \\ m v_n < u_n & (2) \end{cases}$$

حسب المتراجحة (1)

اذا كانت $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة فانه حسب معيار المقارنة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة و اذا كانت

$\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة فانه حسب معيار المقارنة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة

حسب المتراجحة (2)

اذا كانت $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة فانه حسب معيار المقارنة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة و اذا كانت

$\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة فانه حسب معيار المقارنة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

(ب) اذا كانت $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \mathrm{k}\,, (\mathrm{k}\in\mathbb{R}_+^*)$ فان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad \left|\frac{u_n}{v_n} - k\right| \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow k - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon$$

بوضع $m = \min\left\{\frac{u_0}{v_0}\ ,\frac{u_1}{v_1}\ ,\dots\ ,\ \frac{u_n}{v_n}\ ,\ k-\varepsilon\right\}$

$$M = \max\left\{\frac{u_0}{v_0}\ ,\frac{u_1}{v_1}\ ,\dots\ ,\ \frac{u_n}{v_n}\ ,\ k+\varepsilon\right\}$$

ومنه نجد $\forall n\in\mathbb{N}\ \ 0 \leq m < \frac{u_n}{v_n} < M$

ومنه حسب الجزء الاول فان السلسلتين $\sum_{n\geq 0} u_n$ و $\sum_{n\geq 0} v_n$ لهما نفس الطبيعة

معيارريمان : نعتبر السلسلة العددية ذات الحدود الموجبة وذات الحد العام u_n

(1) اذا وجد عدد حقيقي $\alpha > 1$ بحيث $n^{\alpha}\mathrm{u_n}$ محدودة من الاعلى فان السلسلة

ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ تكون متقاربة

(2) اذا وجد عدد حقيقي $\alpha \leq 1$ بحيث $n^{\alpha}\mathrm{u_n}$ محدودة من الاسفل فان السلسلة

ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ تكون متباعدة

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\mathrm{u_n} = \mathrm{k}\ (\mathrm{k} > 0)$ فان السلسلة ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ تكون متقاربة

من اجل $1 < \alpha$ متباعدة من اجل $\alpha \leq 1$

الإثبات

(1) نفرض وجود عدد حقيقي $\alpha > 1$ بحيث $n^{\alpha}\mathrm{u_n}$ محدودة من الاعلى اي

$$\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n^{\alpha}\mathrm{u_n} < M$$

بمعني $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{u_n} < \dfrac{M}{n^{\alpha}}$

من اجل $\alpha > 1$ لدينا $\dfrac{M}{n^{\alpha}}$ حد عام لسلسلة ريمان متقاربة وحسب معيار المقارنة

فان السلسلة ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ تكون متقاربة

(2) نفرض وجود عدد حقيقي $\alpha \leq 1$ بحيث $n^{\alpha}\mathrm{u_n}$ محدودة من الاسفل

$$\exists m > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n^{\alpha}\mathrm{u_n} > m$$

بمعني $\exists m > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{u_n} > \dfrac{m}{n^{\alpha}}$

من اجل $\alpha \leq 1$ لدينا $\dfrac{m}{n^{\alpha}}$ حد عام لسلسلة ريمان متباعدة وحسب معيار المقارنة

فان السلسلة ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ تكون متباعدة

(3) اذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\mathrm{u_n} = \mathrm{k}\ (\mathrm{k} > 0)$ اي ان $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{u_n}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \mathrm{k}$ حسب معيار

التكافؤ فان السلسلتين $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ و $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ لهما نفس الطبيعة

معيار دالمبير : نعتبر السلسلة العددية ذات الحدود الموجبة تماما وذات الحد العام u_n

(1) اذا وجد عدد حقيقي موجب $q < 1$ بحيث $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \mathrm{q}$ فان السلسلة ذات الحد

العام $\mathrm{u_n}$ تكون متقاربة

(2) اذا وجد عدد حقيقي موجب $q > 1$ بحيث $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \mathrm{q}$ فان السلسلة ذات الحد

العام $\mathrm{u_n}$ تكون متباعدة

(3) اذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k / k \in \overline{\mathbb{R}}_+$ فان السلسلة ذات الحد العام $\mathrm{u_n}$ تكون متقاربة

من اجل $k < 1$ متباعدة من جل $k > 1$

ملاحظات : (1) في حالة $k = 1$ فان معيار دالمبير لا نتيجة

(2) معيار دالمبير لا يطبق الا علي السلاسل ذات الحدود الموجبة

(3) معيار دالمبير شرط كافي وغير لازم اي العكس غير صحيح بمعني يمكن ان تكون

السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة دون ان تكون $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$ او متباعدة دون ان

تكون $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$$

الإثبات

ليكن $$0 < q < 1 \text{ حيث } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \mathrm{q} \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

نعتبر $v_n = q^n$ حد عام لسلسلة هندسية ذات الاساس $0 \leq q < 1$ فهي متقاربة لان

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

لدينا ان $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \mathrm{q}$$

$$\forall n \epsilon \, \mathbb{N} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

وبتطبيق المعيار اللوغريتمي وبمان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متقاربة نستنتج ان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة

ليكن $q \geq 1$ بحيث $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ $\forall n \epsilon \, \mathbb{N}$

نعتبر $v_n = q^n$ حد عام لسلسلة هندسية ذات الاساس $q \geq 1$ متباعدة

اذا كان $q \geq 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

اذا كان $q > 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ وعليه $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \infty$

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n} = q \qquad \forall n\epsilon\, \mathbb{N}$

وبتطبيق المعيار اللوغريتمي وبمان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متباعدة نستنتج ان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة

قضية : لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة تماما

نضع $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

(1) اذا كان $l < 1$ فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة اذا

(2) اذا كان $l > 1$ فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

(3) اذا كان $l > 1$ فان معيار دالمبير لا يعطي نتيجة

الاثبات

(1) اذا كان $l < 1$

$$\forall \varepsilon > 0\, , \exists N\epsilon\mathbb{N}: \forall n\epsilon\mathbb{N}\ (n \geq N) \Rightarrow l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

نختار $\varepsilon > 0$ بحيث $l + \varepsilon < 1$ من .اجل.كل . $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon < 1$

حسب المبرهنة السابقة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

(2) اذا كان $l > 1$

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \epsilon \mathbb{N}: \forall n \epsilon \mathbb{N}\ (n \geq N) \Rightarrow l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

نختار $\varepsilon > 0$ بحيث $l - \varepsilon > 1$ من .اجل.كل . $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l + \varepsilon > 1$

حسب المبرهنة السابقة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

(3)(1) نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n}$ وهي سلسلة توافقية متباعدة و $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

(2) نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n^2}$ وهي سلسلة ريمان متقاربة لان $\alpha = 2 > 1$ و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

امثلة

(1) نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n!}$ متقاربة حسب معيار دالمبير

(2) نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{n^n}{n!}$ متباعدة حسب معياردالمبير

معيار كوشي :

قضية : لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة

(1) اذا كان $l\epsilon\mathbb{R}\,, 0 < l < 1$ بحيث $\sqrt[n]{u_n} < l$ فان $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

(2) اذا كان $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ فان $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

الاثبات

$\sqrt[n]{u_n} < l \Leftrightarrow u_n < l^n$ و $\left(\sum_{n\geq 0} l^n\right)$ سلسلة هندسية متقاربة لان الاساس $0 < l < 1$

حسب معيار المقارنة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

$$(2)\ \sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Leftarrow u_n > 1 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} u_n > 1$$

ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

قضية : لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة

نضع $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

(1) اذا كان $l < 1$ فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

(2) اذا كان $l > 1$ فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

(3) اذا كان $l > 1$ فان معيار كوشي لا يعطي نتيجة

الاثبات

(1) اذا كان $l < 1$

$$\forall\varepsilon > 0\,, \exists N\epsilon\mathbb{N}: \forall n\epsilon\mathbb{N}\ (n \geq N) \Rightarrow l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \epsilon \mathbb{N}: \forall n \epsilon \mathbb{N}\ (n \geq N) \Rightarrow (l-\varepsilon)^n \leq u_n \leq (l+\varepsilon)^n \Leftrightarrow$

نختار $\varepsilon > 0$ بحيث $l+\varepsilon < 1$ من اجل كل. $u_n \leq (l+\varepsilon)^n < 1$.

السلسلة الهندسية ذات الحد العام $v_n = (l+\varepsilon)^n$ متقاربة لان الاساس $l+\varepsilon < 1$

حسب معيار المقارنة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

(2) اذا كان $l > 1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \epsilon \mathbb{N}: \forall n \epsilon \mathbb{N}\ (n \geq N) \Rightarrow l-\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

نختار $\varepsilon > 0$ بحيث $l-\varepsilon > 1$ من اجل كل. $u_n \geq (l-\varepsilon)^n > 1$.

السلسلة الهندسية ذات الحد العام $v_n = (l-\varepsilon)^n$ متباعدة لان الاساس $l-\varepsilon \geq 1$

حسب معيار المقارنة فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة

(3)(1) نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n}$ وهي سلسلة توافقية متباعدة و $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$

(2) نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n^2}$ وهي سلسلة ريمان متقاربة لان $\alpha = 2 > 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$

مثال

نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$ $p \geq 0$ $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{n^p}\right)$$

(1) اذا كان $p = 0$ فان $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$ وعليه السلسلة متباعدة

(2) اذا كان $p > 0$ فان $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$ وعليه السلسلة متباعدة من اجل $a > 1$

متقاربة من اجل $a < 1$

(3) اذا كان $a=1$ فان

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^{n^p}\right]^{n^{1-p}}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\begin{cases}\infty\ , & 0<p<1\\ e\ , & p=1\\ 1\ , & p>1\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ وبالتالي السلسلة متباعدة

قضية : لتكن $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$$

والعكس غير صحيح

الاثبات

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,,\exists N\epsilon\mathbb{N}:\forall n\epsilon\mathbb{N}\ (n\geq N)\Rightarrow l-\varepsilon\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}\ \leq l+\varepsilon$$

ومنه من اجل كل $n\epsilon\mathbb{N}\ (n\geq N)$

$$l-\varepsilon\leq\frac{u_n}{u_{n-1}}\ \leq l+\varepsilon$$

$$l-\varepsilon\leq\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\ \leq l+\varepsilon$$

.

.

.

$$l-\varepsilon\leq\frac{u_{N+1}}{u_N}\ \leq l+\varepsilon$$

$$(l-\varepsilon)^{N+n}\leq\frac{u_nu_{n-1}u_{n-2}\dots u_{N+1}}{u_{n-1}u_{n-2}u_{n-3}\dots u_N}\ \leq(l+\varepsilon)^{N+n}$$

$$(l-\varepsilon)^{n-N}\leq\frac{u_n}{u_N}\ \leq(l+\varepsilon)^{n-N}$$

$$u_N(l-\varepsilon)^{n-N}\leq u_n\ \leq u_N(l+\varepsilon)^{n-N}$$

$$u_N^{\frac{1}{n}}(l-\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq u_N^{\frac{1}{n}}(l+\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}}$$

$$\alpha_n = u_N^{\frac{1}{n}}(l-\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}}, \quad \beta_n = u_N^{\frac{1}{n}}(l+\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = l-\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists N_1 > 0\ \forall n > N_1$ بحيث $\alpha_n > l-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2} = l-\varepsilon$,

$\lim_{n\to\infty} \beta_n = l+\varepsilon \Rightarrow \exists N_2 > 0\ \forall n > N_2$ بحيث $\beta_n > l+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = l+\varepsilon$

ليكن $N_3 > max(N, N_1, N_2)$ من اجل كل $(n \geq N_3)$ لدينا

$$l-\varepsilon < \alpha_n < \sqrt[n]{u_n} < \beta_n < l+\varepsilon$$

يعني $\forall n \geq N_3 \quad \left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| \leq \varepsilon$

مثال مضا د

نعتبر $a > 0, b > 0,$ و $\neq b$ ولتكن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ المعرفة ب :

$$u_n = \begin{cases} a^{n+1}b^n, & n \text{ زوجي} \\ a^{n+1}b^{n+1}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

باستعمال معيار كوشي

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{n+1}b^n} = a^{\frac{n+1}{2n}} b^{\frac{1}{2}}, & n \text{ زوجي} \\ \sqrt[2n+1]{a^{n+1}b^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{n+1}{2n+1}}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$$

باستعمال معيار دالمبير

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{(ab)^{n+1}}{a^{n+1}b^n}, & n \text{ زوجي} \\ \frac{a^{n+2}b^{n+1}}{(ab)^{n+1}}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} b, & n \text{ زوجي} \\ a, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

والنهاية غيرموجودة حسب معيار دالمبير

مثال اخر

$$u_n = \begin{cases} 2\ , & n \text{ زوجي} \\ 3\ , & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1 \quad \text{و}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{3}{2}\ , & n \text{ زوجي} \\ \frac{2}{3}\ , & n \text{ فردي} \end{cases}$$

معيار كامر $(Critére\ de\ Kummer)$

قضية : لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة تماما

(1) اذا وجد $\alpha > 1$ حيث $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$ فان السلسلة متقاربة

(2)اذا وجد $\alpha \leq 1$ حيث $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq \alpha$ فان السلسلة متباغدة

الاثبات

في حالة $\alpha > 1$ نعتبر التابع $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ المعرفة ب $f(x) = (1+x)^{-\alpha}$

النشر المحدود للتابع f في جوار 0 من الرتبة 1.

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(\theta_x)}{2!} \quad \text{مع} \quad 0 < \theta_x < 1.$$

$$f(x) = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2\ \ (1+\theta_x)^{-\alpha+2}$$

من اجل $x = \frac{1}{n}$ نجد

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2}\ \ (1+\theta_x)^{-\alpha+2} \geq 1 - \frac{\alpha}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1-\frac{\alpha}{n} \Leftrightarrow \ n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1-\frac{\alpha}{n} \leq f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

حيث $v_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$ حد عام سلسلة ريمان متقاربة وحسب المعيار اللوغاريتمي فان

السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=\frac{w_{n+1}}{w_n} \Leftrightarrow \ n\langle 1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\rangle \leq 1$$

نضع $w_n=\frac{1}{n-1}$ $n \geq 2$ السلسلة $\sum_{n\geq 2} w_n$ سلسلة توافقية متباعدة

وحسب المعيار اللوغاريتمي فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$

معيار راب $(Critére\ de\ \ Raab)$

قضية : لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة تماما

نضع $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$

(1) اذا كان $l>1$ فان السلسة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة

(2) اذا كان $l<1$ فان السلسة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباغدة

(3) اذا كان $l=1$ فان معيار راب لا يعطي نتيجة

الاثبات

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l \ \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\,, \exists N\epsilon\mathbb{N}: \forall n\epsilon\mathbb{N}\ (n\geq N)\ \leq l+\varepsilon$$

$$\Rightarrow l-\varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(1) اذا كان $l > 1$

نختار $\varepsilon > 0$ بحيث $l - \varepsilon = \alpha > 1$ و $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha > 1$ من اجل كل $(n \geq N)$.

وحسب معيار كامر فان السلسلة متقاربة

(1) اذا كان $l < 1$

نختار $\varepsilon > 0$ بحيث $l + \varepsilon < 1$ و $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < l + \varepsilon < 1$ من اجل كل $(n \geq N)$.

وحسب معيار كامر فان السلسلة متباعدة

(II) السلاسل ذ ات حدود باشارات كيفية

ان المعايير المدروسة سابقا تطبق علي السلاسل ذ ات الحدود الموجبة او السلاسل ذ ات الحدود باشارات ثابته لكنها لا تطبق علي السلاسل ذ ات الحدود باشارات كيفية لذ ا نلجا الي دراسة السلاسل $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ حتئ نستفيد من كل المعايير المدروسة سابقا .

تجميع الحدود :

نظرية : لبكن السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} u_n$ ذ ات حدود كيفية وليكن $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيق متزايد تماما و $\varphi(0) = 0$ ولنفرض ان

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (1)

(2) $E\ M \ni \mathbb{N}$ بحيث $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq M$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

نعتبرالسلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ المعرفة ب $v_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k$ عندئذ

السلسلتان $\sum_{n\geq 0} v_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ لهما نفس الطبيعة اذا كانا متقاربتان فان $\sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 1} u_n$

ملاحظة : ليكن $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\varphi(n) = 2n$

و $\varphi(n+1) - \varphi(n) = 2 = M$

$$v_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+1} + u_{2n+2}$$

مثلا $\varphi(n) = 2n \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$v_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$v_0 = u_1 + u_2 \,, \quad v_1 = u_3 + u_4 \ldots\ v_n = u_{2n+1} + u_{2n+2}$$

$$v_n = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$w_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{1}{4n^2}$$

$\frac{1}{4\,n^2}$ حد عام لسلسلة ريمان متقاربة لان $1 < 2 = \alpha$ وحسب معيار المقارنة فان

$\sum_{n\geq 0} w_n$ سلسلة متقاربة منه ان السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة بالتالي $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة

التقارب المطلق : نقول عن السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} u_n$ انها متقاربة مطلقا اذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ متقاربة .

مثال : ادرس طبيعة السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{(-1)^n cosn}{n^2}$

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n cosn}{n^2}\right| = \frac{|cosn|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\frac{1}{n^2}$ حد عام لسلسلة ريمان متقاربة لان $1 < 2 = \alpha$ وحسب معيار المقارنة فان السلسلة ذات الحد العام $|u_n|$ متقاربة وعليه فان السلسلة ذات الحد العام u_n متقاربة مطلقا

نظرية : اذا كان السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة مطلقا فهي متقاربة

الاثبات

لكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة مطلقا من التعرسف فان السلسلة $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ متقاربة J

حسب مقياس كوشي فان :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : \forall n, m \in \mathbb{N}, \left[m \geq n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon \right]$$

لكن $\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k|$

وبالتالي : $\Leftrightarrow: \forall n, m \in \mathbb{N}, \left[m \geq n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon \right]$

ومنه حسب مقياس كوشي فان السلسلة متقاربة.

ملاحظة : العكس غيرصحيح

مثلا $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$|u_n| = \frac{1}{n}$ حد لسلسلة توافقية متباعدة ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ غيرمتقاربة مطلقا

ولكنها متقاربة

نصف التقارب :

تعريف : نقول عن سلسلة انها نصف متقاربة اذا كانت مقاربة و

غيرمتقاربة مطلقا

معيار ابيل : يدرس معيار ابيل طبيعة السلاسل العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ حيث a_n و b_n اعداد حقيقية

تحويل ابيل : نجري تحويلا لعبارة المجموع الجزئ للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ اي $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$

$$B_0 = b_0$$

$$B_1 = b_0 + b_1$$

$$B_2 = b_0 + b_1 + B_2$$

.

.

.

$$B_n = b_0 + b_1 + B_2 + \cdots + b_n$$

ادا

$$b_0 = B_0$$

$$b_1 = B_1 - B_0$$

$$b_2 = B_2 - B_1$$

.

.

.

$$b_n = B_n - B_{n-1}$$

وعليه فان

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_K - B_{K-1})$$
$$= a_0 B_0 + a_1(B_1 - B_0) + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1})$$
$$= (a_0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})B_{n-1} + a_n B_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_K + a_n B_n$$

وهذه الاخيرة تدعى تحويل ابيل المجموع الجزئ من الرتبة n ;

متباينة ابيل : ليكن $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ و $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ اذا كانت

(1) (a_n) متتالية رتيبة

$\exists M > 0\ M\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |B_n| \leq; M$ (2)

فان $|S_N| \leq M(|a_0| + 2|a_n|)$

وهذه الاخيرة تدعى متباينة ابيل

الاثبات :

حسب تحويل ابسل فان : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_K + a_n B_n$

$$|S_n| \leq \left|\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_K\right| + |a_n B_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|a_k - a_{k+1}||B_K| + |a_n||B_n|$$
$$\leq M\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right) \leq M(|a_0 - a_n| + |a_n|)$$
$$\leq M(|a_0| + 2|a_n|)$$

نظرية ابيل : لبكن السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ ذ ات حدود ة كيفية بحيث

(1) المتتالية (a_n) للاعداد الحقيقية رتيبة تؤول الي 0

(2) $\exists M > 0\ M\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |B_n| \leq; M$ ث$B_n B_n$حي $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

عندئذ السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ متقاربة

الاثبات :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \left(n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}\right)$$

ليكن p, q عددان طبيعيان بحيث :

اذا $q \geq p \geq N_\varepsilon$:

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} b_n\right| = |B_q - B_p| \leq |B_q| + |B_p| \leq 2M$$

وعليه .

$$|S_q - S_p| = \sum_{k=p+1}^{q} a_n b_n \leq 2\,M\big(|a_{P+1}| + 2|a_Q|\big) \leq 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + 2\frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon$$

وعليه فان السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ تحقق مقياس كوشي فهي متقاربة

مثال : $\alpha \in \mathbb{R};\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx\alpha)}{n}$

$$a_n = \frac{1}{n};\quad b_n = sin(n\alpha)$$

اذا كان $\alpha = k\pi\ \ k\epsilon\mathbb{Z};$ فان السلسلة متقاربة ومجموعها 0

اذا كان $\alpha \neq k\pi\ \ k\epsilon\mathbb{Z};$,

بتطبيق نظرية ابيل نعتبر $a_n = \frac{1}{n}\ \ b_n = \sin(n\alpha)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$ ومنه المتتالية (a_n) متناقصة

$$\forall n\ \ |B_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} sin(k\alpha)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} Ime^{ik\alpha}\right| = \left|\frac{sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right).sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right|$$
$$\leq \frac{1}{\left|sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} = M$$

ومنه فان السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx\alpha)}{n}$ متقاربة

نظرية ديريكلي : لبكن السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ ذ ات حدود ة كيفية بحيث

(1) المتتالية (a_n) للاعداد الحقيقية رتيبة ومحدودة

(2) السلسلة العددية $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ متقاربة

فان السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ متقاربة

الاثبات :

بمان المتتالية (a_n) محدودة فان $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| < M$

و السلسلة العددية $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ متقاربة فهي تحقق شرط كوشي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : \forall p, q \in \mathbb{N} \left(q > p > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=p+1}^{q} b_n \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \right)$$

اذا حسب متباينة ابيل فان k

$$|S_q - S_p| = \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k \leq \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_{P+1}| + 2|a_Q|\right) \leq \frac{\varepsilon}{3M}(M + 2M) = \varepsilon$$

وعليه فان السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ تحقق مقياس كوشي فهي متقاربة

مثال : $\alpha \in \mathbb{R};\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx\alpha) cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{log\left(log(n)\right)}$

بتطبيق نظرية ديريكلي نعتبر $a_n = cos\left(\frac{\pi}{n}\right);\quad b_n = \frac{sin(n\alpha)}{log\left(log(n)\right)}$

المتتالية (a_n) متزايدة ومحدودة لان $\left|cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

كما ان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx\alpha)}{log\left(log(n)\right)}$ مقاربة حسب ابيل لان :

$\left(\frac{1}{log\left(log(n)\right)}\right)$ متتالية اعداد حقيقيةمتناقسةوتؤولا الي 0

$$\forall n \quad |B_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} sin(k\alpha)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} Ime^{ik\alpha}\right| = \left|\frac{sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right).sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right|$$
$$\leq \frac{1}{\left|sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}$$

ومنه فان السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx\alpha)cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{log\left(log(n)\right)}$ متقاربة حسب ديريكلي

نتيجة : لبكن السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ ذ ات حدود كيفية بحيث

(1) المتتالية (a_n) للاعداد الحقيقية موجبة ومتناقصة وتؤول الي 0

(2) السلسلة العددية $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ محدودة

فان السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ متقاربة وتحقق

$$|R_n| = |S - S_n| \leq Ma_{n+1}$$

الاثبات

تحت الشرطين (1) و (2) وحسب نظرية ابيل فان السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$ متقاربة

$$|R_n| = |S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq Ma_{n+1}$$

(III) السلاسل المتناوبة

تعريف : نسمي كل سلسلة عددية من الشكل $\sum_{n\geq 1} (-1)^n |a_n|$ سلسلة متناوبة

حيث (a_n) متتالية اعداد حقيقية

نظرية ليبنيز : اذاكانت (a_n) متتالية اعداد حقيقية موجبة ومتناقصة وتؤول الي 0

فان السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ متقاربة

الاثبات

تطبيق مباشرلنظريةابيل باعتبار $b_n = (-1)^n$;

مثال : ادرس طبيعة السلاسل التالية

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n} \ , \ \sum_{n\geq 1} log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}, \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

جداء السلاسل : نسمي جداء السلسلتين العدديتين $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ بمفهوم كوشي

السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} w_n$ حيث $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

نظرية :

اذا كانت السلسلتان العدديتان $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربتان مطلقا فان سلسلة الجاء متقاربة مطلقا

$$\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{n\geq 0} w_n \quad \text{حيث} \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

تمارين محلولة

التمرين (1) : عين طبيعة السلاسل التالية

$$\sum_{n\geq 1} n^{\frac{1}{n^2}} - 1, \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n\geq 2}\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ , \quad \sum_{n\geq 1}\frac{|sin(n)|}{n^2}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n\geq 1} 1-cos\left(\frac{sin(n)}{n}\right), \quad \sum_{n\geq 0} Log\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}\right)$$

$$(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^a-n^a}{n^b}$$

الحل :(1) نضع $u_n=\dfrac{|sin(n)|}{n^2}$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{|sin(n)|}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha=2>1)$ وحسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\dfrac{|sin(n)|}{n^2}$ متقاربة

(2) نضع $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$$\forall n\geq 2 \qquad u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{u_n=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ سلسلة ريمان متقاربة $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$ وحسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 2}\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ متباعدة

(3) نضع $\forall n\geq 3 \quad u_n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\forall n \geq 3\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$\sum_{n\geq 3}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة$q=\frac{5}{6}<1$ وحسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ متقاربة

(4) نضع $\forall n \geq 1\ \ u_n = n^{\frac{1}{n^2}}-1$

$$\forall n \geq 1\ \ u_n = n^{\frac{1}{n^2}}-1 = e^{\frac{Logn}{n^2}}-1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{Logn}{n^2}$$

لندرس طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{Logn}{n^2}$

نستخدم معيار ريمان

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\frac{Logn}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{Logn}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow n^{\frac{3}{2}}\frac{Logn}{n^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{Logn}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ سلسلة ريمان متقاربة $\left(\alpha=\frac{3}{2}>1\right)$ وحسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1}\frac{Logn}{n^2}$ وحسب معيار التكافؤ فان السلسلة $\sum_{n\geq 1} n^{\frac{1}{n^2}}-1$ متقاربة

(5) نضع $\forall n \geq 0\ \ u_n = Log\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}\right)$

$$\forall n \geq 0\ \ u_n = Log\left(1+\frac{1}{n^2+2n+2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+2n+2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha=2>1)$ وحسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+2n+2}$ متقاربة وحسب معيار التكافؤ فان السلسلة $\sum_{n\geq 1} Log\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}\right)$ متقاربة

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = 1 - cos\left(\frac{sin(n)}{n}\right) \quad (6)$$

بمان $\frac{sin(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ و $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

ومنه $1 - cos\left(\frac{sin(n)}{n}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{sin(n)}{n}\right)^2$

$$0 \leq \left(\frac{sin(n)}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة ($1 < 2 = \alpha$) وحسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{sin(n)}{n}\right)^2$ متقاربة

$$(a,b) \in \mathbb{R}^2 (7) \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^a - n^a}{n^b}$$

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(n+1)^a - n^a}{n^b} = n^{a-b}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right)$$

$$= n^{a-b}\left(\frac{a}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

اذا كان $a \neq 0$

$$u_n \underset{n\to 0}{\sim} \frac{a}{n^{1-a+b}}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{a}{n^{1-a+b}}$ سلسلة ريمان متقاربة من اجل $1 - \mathrm{a} + \mathrm{b} > 1$ اي $a < b$

متباعدة من اجل $\mathrm{a} > \mathrm{b}$

اذا كان $a = 0$ فان $u_n = 0$ ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة

$$\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!} \quad (8)$$

نضع

$$\forall n\geq 0 \quad u_n=\frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0<1$$

وحسب معيار دالمبير فان السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}$ متقاربة

التمرين (2) : ادرس طبيعة السلاسل التالية واحسب مجموعها

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n}} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)} \quad \sum_{n\geq 1}Log\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n} \quad \sum_{n\geq 1}arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

الحل

(1) نضع

$$\forall n\geq 1 \quad u_n=\frac{1}{n\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n\sqrt{n}}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ سلسلة ريمان متقاربة $\left(\alpha=\frac{3}{2}>1\right)$ حسب معيار التكافؤ فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n}}$ متقاربة

$$u_n=\frac{(n+2)\sqrt{n}-(n)\sqrt{n+2}}{2n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

$$\sum_{n\geq 1}u_n=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) نضع $\quad \forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{1}{n(2n+1)}$

$$u_n = \frac{1}{n(2n+1)} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha = 2 > 1)$ حسب معيار التكافؤ فان السلسلة

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ متقاربة

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n}\right)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} = 2Log(N) - 2Log(2N+1) + 2$$

$$= 2Log\left(\frac{N}{2N+1}\right) + 2 \underset{N \to \infty}{\to} 2 - Log2$$

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right) = 2 - Log2$$

(3) نضع $\quad \forall n \geq 1 \quad u_n = Log\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

$$u_n = Log\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{2}{n(n+1)} \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{-2}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha = 2 > 1)$ حسب معيار التكافؤ فان

$\sum_{n\geq 1}\frac{-2}{n(n+1)}$ متقاربة ومنه $\sum_{n\geq 1} Log\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ متقاربة

(4) نضع $\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$

$$u_n = \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha = 2 > 1)$ حسب معيار التكافؤ فان

$\sum_{n\geq 1}\frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$ متقاربة

$$u_n = \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n} = \frac{-1}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{4}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{4}{n+2}\right) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 5\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}$$

$$= -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 5\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} - 4\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 5\left(-1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{N+1}\right) - 4\left(-1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{N+1} - \frac{4}{N+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n = \underset{N\to\infty}{lim}\left(1 + \frac{1}{N+1} - \frac{4}{N+2}\right) = 1$$

(5) نضع $\forall n \geq 1 \quad u_n = arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha = 2 > 1)$ حسب معيار التكافؤ فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1} arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ متقاربة

نعلم انه لدينا $arctg(a) - arctg(b) = arctg\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

ومنه $\frac{a-b}{1+ab} = \frac{1}{2n^2} = \frac{2}{4n^2}$ بمعنى

$$\begin{cases} a - b = 2, \\ 1 + ab = 4n^2 \end{cases}$$

وعليه $a = 2n+1, \quad b = 2n-1 \quad ,$

اي $arctg(2n+1) - arctg(2n-1) = arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{N} arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \sum_{n=1}^{N} (arctg(2n+1) - arctg(2n-1)$$

$$= \big(arctg(3) - arctg(1)\big) + \big(arctg(5) - arctg(3)\big) + \cdots + \big(arctg(2N+1) - arctg(2N-1)\big)$$

$$= arctg(2N+1) - arctg(1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \lim_{N\to\infty}\big(arctg(2N+1) - arctg(1)\big)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

التمرين (3) : ادرس طبيعة السلاسل التالية

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!},\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{4^n+1},\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n},\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}},\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{(2n)!}\ ,\sum_{n\geq 1}\frac{1-cos^2(n)}{n^2}\ ,$$

$$\sum_{n\geq 0} sin(n)\,,\qquad \sum_{n\geq 1} sin\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\pi\ ,\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^{2n}}$$

الحل : (1) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$

نضع $\forall n\geq 0\ \ u_n=\frac{1}{n!}$

نستخدم معيار دالمبير

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ 0<1$$

حسب معيار دالمبير فان السلسلة متقاربة

(2) $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{4^n+1}$

نضع $\forall n\geq 0\ \ u_n=\frac{3^n}{4^n+1}$

$$u_n=\frac{3^n}{4^n+1}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة $\left(q=\frac{3}{4}<1\right)$ حسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1}\frac{3^n}{4^n+1}$ متقاربة

(3) $\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}$

نضع $\forall n\geq 0\ \ u_n=\frac{n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}<1$$

حسب معيار دالمبير فان السلسلة متقاربة

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \quad (4)$$

نضع $\forall n\geq 0 \quad u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

$$u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0=1$$

السلسلة متباعدة $\Leftarrow \lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{(2n)!} \quad (5)$$

نضع $\forall n\geq 0 \quad u_n=\frac{n^n}{(2n)!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{\big(2(n+1)\big)!}\times\frac{(2n)!}{n^n}=\frac{1}{2(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0<1$$

حسب معيار دالمبير فان السلسلة متقاربة

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1-cos^2(n)}{n^2} \quad (6)$$

نضع $\forall n\geq 0 \quad u_n=\frac{1-cos^2(n)}{n^2}$

$$u_n=\frac{1-cos^2(n)}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha=2>1)$ حسب معيار المقارنة فان السلسلة

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1-cos^2(n)}{n^2}$$ متقاربة

(7) $$\sum_{n\geq 0} sin(n)$$

نضع $\forall n \geq 0 \quad u_n = sin(n)$

$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ السلسلة متباعدة

(8) $$\sum_{n\geq 1} sin\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\pi$$

(9) $$\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^{2n}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)(n+3)\dots\big(2(n+1)\big)}{\big(2(n+1)\big)^{2(n+1)}}\times\frac{(2n)^{2n}}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$$
$$=\frac{(2n+1)(2n)^{2n}}{\big(2(n+1)\big)^{(2n)}(2n+2)}$$
$$=\frac{1}{(2n+2)}\times\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0<1$$

حسب معيار دالمبير فان السلسلة متقاربة

التمري (4) : ادرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام التالية

$$u_n=\frac{(-1)^n n}{n^3+n+1} \qquad u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

الحل :

(1) $$u_n=\frac{(-1)^n n}{n^3+n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{(-1)^n}{n^2}=v_n$$

$$|v_n| = \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha = 2 > 1)$ حسب معيار المقارنة فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1} |v_n|$ متقاربة ومنه $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة وحسب معيار التكافؤ فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^3 + n + 1}$ متقاربة

(2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ متناقسة وتؤول الي 0 حسب معيارليبنيز فان السلسلة

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة

(3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + 0\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة و $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ متباعدة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة اذا $\sum_{n\geq 1} 0\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة

وعليه $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ متباعدة

(3) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة و $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ متقاربة

وعليه $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ متقاربة

التمري (4) : ادرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام التالية

$$u_n = Log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right), \qquad u_n = arccos\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right), \ u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

$$u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{Log(n)}, u_n = \left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}, u_n = \frac{1}{LognLog\big(ch(n)\big)}$$

$$u_n = Log\left(\frac{2}{\pi}arctg\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)$$

الحل :

(1) $u_n = Log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ ارجع لحل التمرين 2

(2) $u_n = arccos\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right)$

$$n \geq 1, \quad u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} sin(u_n) = sin\left(arccos\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{3n^2}+0\frac{1}{n^2}}\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{n}>0$$

$\sqrt{\frac{2}{3}}\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ ساسلة متباعدة حسب معيار التكافؤ فان السلسلة $\sum_{n\geq1} arccos\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right)$ متباعدة

(3) $$u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+0\frac{1}{n^2}$$

$\sum\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ سلسلة متقاربة حسب ليبنيز والسلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ متباعدة ومنه

$\sum_{n\geq1} = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ متباعدة

(4) نضع $\forall n\geq1\ u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{Log(n)}$

$$\forall n\geq1\ u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{Log(n)} \geq 0$$

$$\forall n\geq1 \quad log(\ u_n) = Log(n)Log\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$$

$$= Log(n)\left(Log\left(\frac{1}{2}\right)+Log\left(1+\frac{3}{n}\right)+Log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim}Log(n)\left(-Log(2)+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\sim}-Log(2)Log(n)$$

$$u_n\underset{n\to\infty}{\sim}e^{-Log(2)Log(n)}=\frac{1}{n^{ln2}}$$

$\frac{1}{n^{ln2}}$ حد عام لسلسلة ريمان متباعدة $(\alpha = ln2 < 1)$ ومنه حسب معيار التكافؤ فان السلسلة

$$\sum_{n\geq1}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{Log(n)}$$ متباعدة

(5) نضع $\forall n \geq 1 \;\; u_n = \left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$Log\left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\sim}Log\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{8n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$nLog\left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = e^{nLog\left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}-\frac{1}{\sqrt{e}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+0\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{12n\sqrt{e}}<0$$

$\frac{1}{12\sqrt{e}}\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ ساسلة متباعدة حسب معيار التكافؤ فان السلسلة

$$\sum_{n\geq1}\left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$$ متباعدة

(6) $\forall n \geq 2 \quad u_n = \frac{1}{LognLog\big(ch(n)\big)}$

$$Log\big(ch(n)\big)\underset{n\to\infty}{\sim}Log\left(\frac{e^n}{2}\right)=n-Log(2)\underset{n\to\infty}{\sim}n$$

$$u_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{nLog(n)}$$

$f(x)=\frac{1}{xLog(v)}$ تابع مستم موجب ومتناقس من اجل $x \geq 1$

$\sum_{n\geq 2} u_n$ و $\int_2^{\infty} \frac{1}{xLog(x)}$ لهما نفس الطبيعة

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{xLog(x)} dx = \lim_{y\to\infty} \int_2^{y} \frac{1}{xLog(x)} dx$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left[Log\big(Log(x)\big)\right]_2^y = \lim_{y\to\infty} Log\big(Log(Y)\big) - Log\big(Log(2)\big) = \infty$$

ومنه $\int_2^{\infty} \frac{1}{xLog(x)} dx$ متباعد وعليه السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{nLog(n)}$ متباعدة وبالتالي متباعد

السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{LognLog\big(ch(n)\big)}$ متباعدة

$$\forall n \geq 1 \;\; u_n = Log\left(\frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) (7)$$

$$u_n = Log\left(\frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)$$

$$= \; Log\left(1 - \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi n} < 0$$

السلسلة ذات الحد العام u_n متباعدة

التمرين (5) : ليكن $a\epsilon\mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ادرس طبيعة السلاسل التالية

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!} \;,\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^\alpha} \;,\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n+\alpha}\right)^{n^2} ,\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n)}$$

الحل :

$$\forall n \geq 1 \;\; u_n = \left|\frac{a^n}{n!}\right| \;\; (1)$$

اذا كان $\alpha = 0$ فان السلسلة متقاربة

اذا كان $\alpha \neq 0$

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a^{n+1}|}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|a^n|} = \frac{|a|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$$

ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}$ متقاربة مطلقا ومنه متقاربة

$$(2) \quad \forall n \geq 1 \;\; u_n = \frac{|a|^n}{n^\alpha}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a^{n+1}|}{(n+1)^\alpha} \times \frac{n^\alpha}{|a^n|} = |a| \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to\infty}{\to} |a|$$

اذا كان $|a| < 1$ السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^\alpha}$ متقاربة مطلقا ومنه

اذا كان $|a| > 1$ فان $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ وبالتالي السلسلة متباعدة

اذا كان $\alpha = 1$ السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ هي سلسلة ريمان متقاربة من احل $\alpha > 1$ ومتباعدة

من احل $\alpha \leq 1$

اذا كان $\alpha = 1$ السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ هي سلسلة متناوبة متقاربة حسب ليبنيز

$$(3) \quad \forall n \geq 1 \;\; u_n = \left(\frac{n+1}{n+\alpha}\right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+\alpha}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-n} \underset{n\to\infty}{\to} e^{1-\alpha}$$

اذا كان$\alpha > 1$ فان السلسلة متقاربة واذا كان $\alpha < 1$ فان السلسلة متباعدة

واذا كان $\alpha = 1$ فان $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ومنه السلسلة متباعدة

$$(4) \quad \forall n \geq 1 \;\; u_n = \frac{n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n)}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n+1)} \times \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n}$$

$$= \frac{(n+1)(\alpha+1)}{(\alpha+n+1)n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$$

ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n)}$ متقاربة

*التمرين (6) : بين ان السلاسل التالية متقاربة ثم احسب مجموعها

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad \sum_{n\geq 1} Log\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n\geq 2} Log\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

*التمرين 7 : باستعمال النشر المحدود ادرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام لتالية

$$u_n = 1 - cos\frac{\pi}{n}, \ n \geq 1, \quad u_n = \left(1 - \frac{Logn}{n}\right)^n, n \geq 2,$$

$$u_n = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1, n \geq 1$$

التمرين 8 : ادرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام التالية

$$u_n = ch\left(\frac{1}{n}\right) - 1, n \geq 1, \quad u_n = \left(tg\left(\frac{1}{n}\right) - sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, n \geq 1,$$

$$u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p Log\left(\frac{n+1}{n-1}\right), n \geq 2$$

التمرين (9) : ادرس تقارب السلاسل ذات الحد العام u_n التالية

$$u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right), n \geq 1, u_n = nLog\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \geq 1$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{Log\left(\sqrt{n}+1\right)}$$

الفصل الثاني

متتاليات و سلاسل التوابع

متتاليات وسلاسل التوابع

(I) متتاليات التوابع

ليكن X, Y مجموعتين غير جاليتين حيث

$X \subseteq \mathbb{R}$ و $Y \subseteq \mathbb{K}$ حيث $\left(\mathbb{K} = Y \text{ او } \mathbb{K} = X\right)$

$\mathcal{F}(X, Y)$ مجموعة التوابع المعرفة من X نحو Y

تعريف : نسمي متتالية توابع علي X التطبيق f بحيث $f: \mathbb{N} \to \mathcal{F}(X, Y)$

نرمز له ب $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $f_n = f(n)$

نقول كذلك ان $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية عناصر المجموعة $\mathcal{F}(X, Y)$ لان

$$f_n \in \mathcal{F}(X, Y)$$

مثال : لنعتبر متالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي

$$X = \mathbb{R} \quad , f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1} \quad , n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{X = [0, 1] \quad , f_n(x) = x^{2n} \quad , n \in \mathbb{N} \quad (2)}$$

$$\boldsymbol{X = \mathbb{R} \quad , f_n(x) = e^{-nx} \quad , n \in \mathbb{N} \quad (3)}$$

التقارب البسيط لمتتالية تابع : $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث

ليكن $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $f_n \in \mathcal{F}(X, Y)$

تعريف : نقول ان المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة علي X اذا كان من اجل كل $x \in X$

المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $f(x)$ خيث $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ تابع معرف ب

$\forall x \in X , f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ وتسمى نهاية المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ونكتب

$f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ او $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ وهذا يكافئ

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists , N_\varepsilon(x) > 0 \ \forall\ [n > N_\varepsilon(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)|] < \varepsilon$$

ملاحظة : ان وجدت النهاية f فهي وحيدة

مثال (1) :

$$\boldsymbol{X = [0,1] \ , f_n(x) = x^n \ , n \in \mathbb{N}}$$

اذا كان $x \in [0,1[$ فان $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

اذا كان $x = 1$ فان $\boldsymbol{f_n(1) = 1}$,

وبالتالي المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو النهايةf المرفة ب

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \in [0,1[\\ 1 & , \ x = 1 \end{cases}$$

مثال (2) :

$$X = \mathbb{R} \ , f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{x^{2n} + 1} \ , n \in \mathbb{N}^*$$

اذا كان $|x| < 1$ فان $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

اذا كان $|x| > 1$ فان $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -1$

اذا كان $|x| = 1$ فان $f_n(1) = f_n(-1) = 0$

وبالتالي المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو النهايةf المرفة ب

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$$

مثال (3) :

$$X = \mathbb{R} \ , f_n(x) = \frac{nx}{nx + 1} \ , n \in \mathbb{N}^*$$

اذا كان $x > 0$ فان $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

اذا كان $x = 0$ فان و $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو النهايةf المعرفة ب

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

ملاحظات :

(1) القيمة $N_\varepsilon(x)$ مرتبطة بالوسطين x, ε .

(2) يمكن ان تكون القيمة $N_\varepsilon(x)$ لا تنتمي الي $\mathbb{N}$ $(N_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}_+)$.

(3) نهاية متتالية متقاربة ببساطة لتابع مستمر ليس بالضرورة تابع مستمر .

(4) اذا كان متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو f حيث $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة (متناقصة علي التوالي) فان f متزايدة (متناقصةعلي التوالي) .

التقارب المنتظم :

تعريف : نقول ان المتتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام علي X نحو f

اذا كان

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \exists\ N_\varepsilon > 0\ \forall n\ \left[n > N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|\right] < \varepsilon$$

ملاحظة : هنا القيمة N_ε مرتبطة ب ε فقط وهذا يعني ان ε تولائم كل x من X

قضية : التقارب المنتظم يستلزم التقارب البسيط والعكس غير صحيح

الاثبات :

$$\forall x \in X\ , \forall n \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|$$

مثال مضاد :

$$X = \mathbb{R}_+ \quad , f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو النهاية f المعرفة

$$f(x) = \begin{cases} 1 \, , & x > 0 \\ 0 \, , & x = 0 \end{cases}$$

لندرس التقارب المنتظم لمتتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نحو التابع f اي لنحسب

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left\{ |f_n(0) - f(0)|, \sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right\}$$

$$= \max_{x\in[0,1]} \left\{ 0, \sup_{x\in]0,1]} \left(\frac{1}{1+nx} \right) \right\} = \max(0,1) = 1$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$

اي ان متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ لاتتقارب نحو التابع f

مثال مضاد :

$$X = [0,1] \quad , f_n(x) = x^n \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو النهاية f المعرفة

$$f(x) = \begin{cases} 1 \, , & x = 1 \\ 0 \, , & x \in [0,1[\end{cases}$$

لندرس التقارب المنتظم لمتتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نحو التابع f اي لنحسب

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left\{ |f_n(1) - f(1)|, \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| \right\}$$

$$= \max_{x\in[0,1]} \left\{0,\ \sup_{x\in[0,1[} (x^n)\right\} = \max_{x\in[0,1]} (0,1) = 1$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$

اي ان متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ لاتتقارب $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نحو التابع f

لكن اذا اخذنا $X = [0, \alpha]$ حيث $0 < \alpha < 1$ فان

متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو 0 لان $\sup_{x\in[0,\alpha]} (x^n) = \alpha^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

معيار كوشي : لتكن $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع علي X من $\mathbb{R}$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع متقاربة بانتظام نحو fعلي X اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall\varepsilon > 0 , \exists N_\varepsilon \epsilon \mathbb{N}, \forall n \epsilon \mathbb{N}, \forall m \epsilon \mathbb{N}, \forall x \in X$$

$$[n > N_\varepsilon \wedge\ m > N_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

الاثبات : لنفرض ان $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع متقاربة بانتظام نحو fعلي X هذا يعني

$$\forall\varepsilon > 0 , \exists N_\varepsilon \epsilon \mathbb{N}, \forall n \epsilon \mathbb{N}, \forall x \in X\ [n > N_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

اذا كان $n > N_\varepsilon \wedge\ m > N_\varepsilon$ لدينا من اجل كل x

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)|$$
$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

لنفرض ان $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع لكوشي متقاربة نحو fعلي X

$$\forall\varepsilon > 0 , \exists N_\varepsilon \epsilon \mathbb{N}, \forall n \epsilon \mathbb{N}, \forall x \in X$$

لما $m \to \infty$ مع $m > N_\varepsilon$ المتراجحة $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ تعطي النهاية

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ وهذا من اجل كل $x\ \ni$ X

و من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ ويحقق $n > N_\varepsilon$ وهذا يعني ان $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

متقاربة بانتظام نحو f .

ملاحظة : معيار كوشي يسمح بمعرفة التقارب بانتظام دون معرفة النهاية f

متتالية توابع مستمرة :

نظرية : ليكن I مجال من $\mathbb{R}$

لتكن متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $f_n \in \mathcal{F}(X,Y)$ متقاربة بانتظام نحو f

اذا كانت كل التوابع f_n مستمرة عند x_0 من I فان التابع f مستمر عند x_0 من I

الاثبات :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N_\varepsilon \epsilon \mathbb{N}, \forall n \epsilon \mathbb{N}, \forall x \in I \left[n > N_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right] \quad (3)$$

من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ ويحقق $n > N_\varepsilon$ f_n مستمرة عند x_0 وبالتالي

$$\exists \delta > 0,, \forall x \in I \; \left[|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \right] \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج :

$$\begin{aligned} \forall x \in I\colon \Big[|x - x_0| < \delta \Longrightarrow & |f(x) - f(x_0)| \\ & \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Big] \end{aligned}$$

قضية :

اذا كانت متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $f_n \in \mathcal{F}(X,Y)$ متقاربة بانتظام نحو f

و اذا كانت كل التوابع f_n مستمرة علي I فان التابع f مستمر علي I

ملاحظة : النظرية تعطي شرط كافيا حتى تكون f تابع مستمر حيث $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

لكن شرط غيرلازم اي يمكن ان تكون f_n و f توابع مستمرة دون ان

يكون هناك تقارب منتظم .

نظرية ديني ($Dini$) : اذا كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع حقيقية مستمرة ومتقاربة نحو تابع مستمر f علي $[a,b]$ اذا كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة فان المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو f

التقارب المنتظم لمتتالية المشتقات : ليكن X مجال محدود من $\mathbb{R}$ و $E=\mathcal{F}(X,Y)$

نظرية : لتكن $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع من E حيث f_n هي مشتقات ولتكن F_n توابع اصلية ل f_n وتنعدم عند x_0 من X

اذا كانت متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو f علي X فان المتتالية $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو F علي X ونهايتها F قابلة للاشتقاق علي X و $F'(x)=f(x)$

متتالية التوابع القابلة للمكاملة :

لتكن $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع القابلة للمكاملة علي $X=[a,b]$ متقاربة بانتظام نحو f فان :

(1) f قابلة للمكاملة علي $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

الاثبات :

ليكن $\varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$\forall x\in[a,b]\quad f_n(x)-\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<f(x)<f_n(x)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(1)$$

لان المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو f

التابع f_n قابل للمكاملة من اجل كل $n\in\mathbb{N}$ اي توجد تجزئة للمجال $[a,b]$

بحيث $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $\quad (2)\ \sum_{i=1}^{k}\left(M_{n_i} - m_{n_i}\right)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$M_{n_i} = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_n \quad \text{و} \quad m_{n_i} = \underset{[x_{i-1},x_i]}{inf} f_n$$

نضع $\quad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \quad$ و $\quad m_i = \underset{[x_{i-1},x_i]}{inf} f$

من العلاقة (1)نجد من اجل كل $1 \le \ i \le k$ من

$$m_{n_i} - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \le m_i \le f(x) \le M_i \le M_{n_i} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

مما يستلزم نظرا ل (2)

$$\sum_{i=1}^{k}\left(M_i - m_{i_i}\right)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{k}\left(M_{n_i} - m_{n_i}\right)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

وهذا يعني ان f قابل للمكاملة.

(2) لدينا من اجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\ \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a)$$

بمان $\quad \lim_{n\to\infty} \underset{x\in[a,b]}{sup} |f_n(x) - f(x)|$

فان $\quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

قضية : اذا كانت $F_n(x) = \int_a^X f_n(x)dx$ و $F(x) = \int_a^X f(x)dx$

فان المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتطام نحو f هو كافي وغير لازم .

الاثبات :

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \left| \int_a^x f_n(x)dx - \int_a^x f(x)dx \right|$$
$$\leq \int_a^x |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$
$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a)$$

ملاحظة : متى نحصل علي $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

فان الشرط $f_n(x)$ متقاربة بانتظام نحو $f(x)$

مثال : علي المجال $X = [0,1]$ نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$$

لدينا : $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ رغم ان التقارب $f_n = f$ ليس بانتظام علي المجال $[0,1]$

لان $\sup_{x\in[a,b]} f_n(x) = 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ لكن :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \int_0^1 f(x)dx$$

مثال :

$$X = \mathbb{R}_+ \quad , f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتؤول ببساطة نحو النهاية f المعرفة ب

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

بمان متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ غير متقاربة بانتظام نحو f فانه من غير لممكن

استنتاج
$$\underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

فنلجا الي حساب التكاملين ثم نقارن

$$I = \underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 f_n(x)dx = \underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 \frac{nx}{nx+1}dx$$

$$= \underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{nx+1}\right)dx$$

$$= \underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 dx \ - \ \underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 \left(\frac{1}{nx+1}\right)dx$$

$$nx = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = n \end{cases}$$

$$I = \underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 f_n(x)dx = \ = \underset{n\to\infty}{lim}\left[\frac{1}{n}\int_0^n dt - \ \frac{1}{n}\int_0^n \left(\frac{1}{t+1}\right)dt\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{Log(1+n)}{n}\right) = 1$$

من جهة اخرى من

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

بالتالي

$$\underset{n\to\infty}{lim}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

متتالية التوابع القابلة للاشتقاق :

اذا كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع قابلة للاشتقاق متقاربة (وحتى بانتظام) نحو التابع f

قابل للاشتقاق علي $[a,b]$ فليس بالضرورة ان يكون $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو f'

مثال : من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو $f = 0$ علي $\mathbb{R}$ لان

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

لدينا $f'(x) = 0$ $\quad f_n{}'(x) = \sqrt{n}cos(nx)$

لكن $\{f_n{}'\}_{n\in\mathbb{N}}$ ليست متقاربة في اي نقطة نحو $f = 0$

نظرية :

اذا كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من صنف $C^1([a,b])$ وتحقق الخواص التالية :

(1) المتتالية $\{f_n{}'\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو g علي المجال $[a,b]$

متقاربة

(2) يوجد x_0 من $[a,b]$ بحيث $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$

فان $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو f من صنف $C^1([a,b])$ مع $f'(x) = g(x)$

بمعنى اخر $\quad \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$

الاثبات :

لدينا $\quad f_n(x_0) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n{}'(x)dx$

حسب القضية فان $\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n{}'(x)dx = \int_{x_0}^{x} g(x)dx$ بانتظام علي $[a,b]$

وبالتالي $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو f المعرفة ب

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(x)dx$$

وبمان g تابع مستمر فان التابع f من صنف $C^1([a,b])$ ولدينا من اجل كل x من $[a,b]$

$$f'(x) = g(x)$$

مثال :

نعتبر متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي :

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx} \ ; \ x \in [0,1]$$

(1) بين ان المتتالية $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة نحو التابع f يطلب تعيينه

(2) هل هذا التقارب منتظم ؟

هل لدينا المساواة التالية $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

الحل :

التقارب البسيط :

في حالة $x = 0$ لدينا $f_n(0) = 0 = f(0)$ وبالتالي $f_n \to f = 0$

في حالة $x \in]0,1]$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x)$

وبالتالي $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة نحو $f = 0$

التقارب المنتظم :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^2}{1+nx}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

وبالتالي $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو $f = 0$ علي $[0,1]$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^2}{1+nx}$$

نضع $\qquad g(x) = \frac{x^2}{1+nx}$

$$g'(x) = \frac{2x + nx^2}{(1+nx)^2} > 0$$

$$\sup_{x\in[0,1]} \frac{x^2}{1+nx} = f_n(1) = \frac{1}{1+n}$$

سلاسل التوابع

ليكن X,Y مجموعتين غير جاليتين حيث

$X \subseteq \mathbb{R}$ و $Y \subseteq \mathbb{K}$ حيث $\left(\mathbb{K} = Y \text{ او } \mathbb{K} = X\right)$

$\mathcal{F}(X,Y)$ مجموعة التوابع المعرفة من X نحو Y

تعريف(1) :

لتكن متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. نسمي السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ سلسلة توابع

لدراسة السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ندرس متتالية المجموعات الجزئية $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

حيث $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$ المعرفة ب : $x \in X,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n\,(x)$

تعريف(2) :

السلسلة $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ تسمى باقي السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$

من الرتبة n اي

$$R_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x) - S_n$$

نقول عن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ متقاربة عند $x_0 \in X$ اذا كانت

السلسلة$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x_0)$ متقاربة

نقول عن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة علي X نحو S اذا كانت

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة عند كل x من X نحو $S(x)$ ونقول في

هذه الحالة ان التقارب بسيط ونكتب ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

نسمي S مجموع السلسلة

ولدينا التكافؤات التالية ,

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة عند $x_0 \Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $S_n(x_0)$ متقاربة

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة علي $X \Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة عند كل x من X

$\Leftrightarrow X$ متقاربة علي S_n

(2)ملاخظات :

ملاحظة (1) : تعاريف ونظريات السلاسل العددية تبقى صحيحة لسلاسل التوابع

ملاحظة (2) : في حالة $Y = \mathbb{C}$ تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة علي X

اذا كان الجزء الحقيقي $\sum_{n=0}^{\infty} Ref_n(x)$ والجزء التخيلي $\sum_{n=0}^{\infty} Imf_n(x)$

متقاربين علي X ولدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x) \;= \sum_{n=0}^{\infty} Ref_n\,(x) + i \sum_{n=0}^{\infty} Imf_n\,(x)$$

ملاحظة (3) :

اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ متقاربة علي X فان باقي السلسلة R_n يؤول الي 0

لما $n \to \infty$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0$$

ملاحظة (3) :

اذا كانت السلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty} h_n\,(x)$ متقاربتين علي X فان السلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n\,(x) + \beta h_n(x))$ حيث $\alpha, \beta \epsilon\ \mathbb{C}$ سلسلة متقاربة ولدينا المجموع

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n\,(x) + \beta h_n(x)) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x) + \beta \sum_{n=0}^{\infty} h_n\,(x)$$

التقارب المطلق : نقول عن سلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ متقاربة مطلقا علي X اذا كانت

السلسلة $\sum_{n*0}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة ببساطة علي X

قضية :

اذا كانت السلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ متقاربتين مطلقا علي X فان

جداؤهما $\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x)$ سلسلة متقاربة مطلقا علي X بحيث $W_n = \sum_{k=0}^{n} f_k\, h_{n-k}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\right)$$

التقارب المنتظم :

نظرية و تعريف :

نقول عن سلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X اذا كانت $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

متتالية متقاربة بانتظام نحو S او اذا كانت السلسلة متقاربة والباقي يؤول بانتظام نحو 0

ونكت $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

الاثبات :

$$\forall\, n\epsilon\mathbb{N}, \quad \sup_{x\in X}(S_n - S) = \sup_{x\in X} R_n$$

ملاحظة : التقارب المنتظم للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ علي X يعني :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n\epsilon\mathbb{N}, \forall x\epsilon X \left[n > N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right| \le \varepsilon\right]$$

مغيار كوشي :

حتى تكون للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X يكفي ويلزم مايلي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n, p \epsilon N^*, \forall x \epsilon X \left[n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right| \leq \varepsilon \right]$$

مثال (1) : بين ان سلسلة التوابع ذات الحد العام : $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

متقاربة بانتظام $[0,1]$

الحل :

من اجل $x \epsilon [0,1]$ $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ومنه

سلسلة التوابع ذات الحد العام : $\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ متقاربة ببساطة علي $[0,1]$

$|R_n| \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ الباقي يؤول الي 0 بانتظام ومنه السلسلة متقاربة بانتظام

مثال (2) : ادرس التقارب المنتظم للسلسلة ذات الحد العام : $f_n(x) = x^n$

علي المجال $]-1,1[$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad , S(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$\forall\, n \epsilon \mathbb{N}, \quad \underset{x \in X}{sup}\, R_n = \sup_{x \in X} |S_n - S| = \sup_{x \in X} \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right|$$
$$= \underset{x \in X}{sup} \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = 1$$

ومنه للسلسلة ليست متقاربة بانتظام علي $]-1,1[$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = 1 \neq 0$

التقارب النظيمي : نقول عن سلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة نظيميا علي X اذا كانت

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\|$ متقاربة مع $\|f_n(x)\| = \sup_{x\in X}|f_n(x)|$

قضية :

اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة نظيميا علي X فانها متقاربة بانتظام علي X

الاثبات :

$$\forall n,p \geq 1 \ \sup_{x\in X}\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right|$$
$$\leq \sup_{x\in X}|f_{n+1}(x)| + \sup_{x\in X}|f_{n+2}(x)| + \cdots + \sup_{x\in X}\left|f_{n+p}(x)\right|$$

حسب معيار كوشي السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X

قضية : نقول ان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة نظيميا علي X اذا وجدت

سلسلة ذات حدود موجبة $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ بحيث :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}, \forall x\epsilon X, \qquad |f_n(x)| \leq \alpha_n$$

ملاحظة : التقارب النظيمي اقوى من التقارب المنتظم

مثال (1) : نعتبر سلسلة التوابع ذات الحد العام :

$$f_n(x)=\begin{cases} \frac{sin^2 x}{n} & , x \in]n\pi,(n+1)\pi[\\ 0 \ , & x \notin]n\pi,(n+1)\pi[\end{cases}$$

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ سلسلة متباعدة ومنه السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ليست متقاربة نظيميا ولكنها متقاربة بانتظام

حسب معياركوشي

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)\right| \le \frac{1}{n}$$

نظرية ابل $(Abel)$:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ سلسلة توابع حيث a_n و b_n متتاليتا توابع

معرفتا علي X تحققان

(1) a_n رتيبة ومتقاربة بانتظام نحو 0

$$(2) \ \exists M>0, |B_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_n(x)\right| < M$$

عندئذ فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X

الاثبات :

حسب (2) $\exists M>0, |B_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_n(x)\right| < M \ , \forall n\epsilon\mathbb{N}, \forall x\epsilon X$

$$\forall p,q \in \mathbb{N}, q>p \ \ \left|B_q(x)-B_p(x)\right| \le \left|B_q(x)\right| + \left|B_p(x)\right| \le 2M$$

من (1) لدينا $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} a_n(x) = 0$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n\epsilon\mathbb{N}, \forall x\epsilon X \quad \left[n > N_\varepsilon \Longrightarrow |a_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{6M}\right]$$

a_n رتيبة و B_n محدودة حسب متباينة ابل فان

$$\forall p, q > 0, p \ \left|S_q(x) - S_p(x)\right| = \sum_{k=p+1}^{q} a_k(x)b_k(x)$$

$$\le 2M(|a_{P+1}(x)| + 2)|a_A(x)| \le 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + 2\frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon$$

اي ان المتتالية $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي لتقارب بانتظام علي X

اذا $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ سلسلة متقاربة بانتظام علي X

مثال : $, \alpha > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n^{\alpha,}}$ $X = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

نعتبر : $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\qquad b_n = sin(nx)$

واضح ان $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة ومتقاربة بانتظام نحو 0

$$|B_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_n(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} sin(kx)\right| \le \frac{1}{sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{sin\frac{\varepsilon}{2}} = M$$

حسب نظرية ابل فان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n^{\alpha,}}$ متقاربة بانتظام علي $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

نظرية ديركلي للتقارب بانتظام :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ سلسلة توابع حيث a_n و b_n متتاليتا توابع

معرفتا علي X تحققان

(1) a_n رتيبة ومحدودة $\forall x \epsilon X$

(2) سلسلة توابع $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X

عندئذ فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X

مثال : $\alpha > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\left(\frac{\pi}{n}\right) sin(nx)}{n^{\alpha,}}$ $X = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

بتطبيق نظرية ديركلي للتقارب بانتظام :

نعتبر : $a_n = cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ $\qquad b_n = \frac{sin(nx)}{n^{\alpha,}}$

واضح ان $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبة (متزايدة) ومحدودة من الاعلى

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n^{\alpha,}}$ متقاربة بانتظام علي $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

حسب نظرية ديركلي فان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\left(\frac{\pi}{n}\right) sin(nx)}{n^{\alpha,}}$ متقاربة بانتظام علي $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

(3) التقارب المنتظم وخواص مجاميع سلاسل التوابع :

(1) خاصية الاستمرار :

نظرية : اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي X وكان كل حد

f_n مستمر عند x_0 من X فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ فان مستمرة عند x_0

ونكتب : $$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$$

نتيجة : اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي $[a,b]$ وكان كل

$\forall n \ f_n \in C([a,b])$ فان $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in C([a,b])$

(2) خاصية قابلية المكاملة :

نظرية : اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي$[a,b]$ وكان كل حد

f_n قابل للمكاملة علي$[a,b]$ $\forall n$ فان

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ قابل للمكاملة علي$[a,b]$

(2) $$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{C.U} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$ علي $[a,b]$

مثال : $\frac{1}{1+x} \xrightarrow{C.S} \sum_{n*0}^{\infty} (-1)^n x^n$ علي $]-1,1[$

$$[a,b] \subset]-1,1[\text{ علي } \sum_{n*0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad \xrightarrow{C.U} \quad \frac{1}{1+x}$$

كل حد $(-1)^n x^n$ مستمر فهو قابل للمكاملة علي $[a,b]$

اذا حسب نظرية قابلية المكاملة فان

$$[a,b] \text{ علي } \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt \quad \xrightarrow{C.U} \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

$$[a,b] \text{ علي } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \xrightarrow{C.U} \quad Log(1+x)$$

ملاحظة : اذا كان تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ نظيميا فان تقارب السلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ يكون نظيميا نحو $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$ علي $[a,b]$

(3) خاصية قاببلية الاشتقاق :

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ و $f_n: I \to \mathbb{C}$ $\forall n$ بحيث :

$\forall n \quad f_n \epsilon C^1(I)$ (1)

(2)توجد علي الاقل x_0 من I بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ متقاربة

$\sum_{n=0}^{\infty} {f_n}'(x)$ متقاربة علي I

عندئذ فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة ببساطة علي I و متقاربة بانتظام علي كل

مجال $[a,b]$ من I ويكون مجموعها قابلا للاستقاق باستمرار علي I ومشتقته /

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n{}'(x)$$

ملاحظة : في نص النظرية اذا كان تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n{}'(x)$ نظيميا علي I

فان $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ تكون تتقارب نظيمياعلي كل مجال $[a,b]$ من I

مثال : $f_n: x \in [-r,r] \to f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ حيث $0 < r < 1$

(1) من الواضح $\forall n \quad f_n \epsilon C^1([-r,r])$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

لكن $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-r,r], |x^n| = |x|^n \leq r$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة ومتقاربة

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n{}'(x)$ متقاربة نظيميا علي المجال $[-r,r]$ ومنه متقاربة بانتظام علي $[-r,r]$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0)$ متقاربة ومجموعها 0 وعليه فان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ متقاربة نظيميا ومنه متقاربة

ومنه متقاربة بانتظام علي $[-r,r]$ لنحسب المجموع $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$S(x) = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -Log(1-x)$$

تمرين (1) : ادرس التقارب علي $\mathbb{R}$ لسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ حيث

$$f_n(x) = n^{-\alpha}x^2e^{-nx^2}, \ \ \alpha > 0$$

تمرين (2) : ادرس التقارب علي $[0,1]$ لسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ حيث

$$f_n(x) = x^{\alpha}(1-x)^n, \ \ \alpha > 1$$

تمرين (3) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث :

$$f_n(x) = x^n(1-x), \ \ x \in \mathbb{R}$$

(1) احسب المجموع $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$

(2) هل السلسلة متقاربة بانتظام ؟

تمرين (4) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث :

$$f_n(x) = x^2(1+x^2)^{-n}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

(1) احسب المجموع $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2(1+x^2)^{-n}$

(2) هل السلسلة متقاربة بانتظام ؟

تمرين (5) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث

$$f_n(x) = \frac{sin(2^n x)}{n^{\alpha}}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

(1) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة نظيميا علي $\mathbb{R}$

(2) بين ان المجموع $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ من صنف $C^{\infty}[\mathbb{R}]$

تمرين (6) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{n^2 + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(1) بين انه اذا كانت (a_n) متتالية حقيقية موجبة ومتزايدة اذا من اجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leq a_n$$

(2) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام علي $\mathbb{R}$ هل متقاربة بانتظام مطلقا ؟

تمرين (7) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + n^2 x)}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(1) ادرس تقارب سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

(2) ادرس قابلية الاشتقاق $S(x)$ مجموع سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ عند 0

(3) اثبت ان $\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$

تمرين (8) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx} sin(nx)}{Log(1+n)}, \;\; x \in \mathbb{R} \,, n \in \mathbb{N}^*$$

(1) ادرس التقارب البسيط لسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x)$ علي $\mathbb{R}$

(2) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ متقاربة بانتظام علي $\mathbb{R}$

(3) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ ليست متقاربة نظيميا علي اي جزء من $\mathbb{R}$

(4) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ مستمرة

تمرين (9) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n حيث

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ مستمرة علي $\mathbb{R}$

تمرين (10) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n

$$f_n(x) = \frac{x}{(n^2+x^2)^2}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

(1) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)$ متقاربة بانتظام علي علي اي $[-a, a]$ من $\mathbb{R}$

(2) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x)$ مستمرة علي $\mathbb{R}$

(3) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ قابلية الاشتقاق علي $\mathbb{R}$

تمرين (11) : لتكن لسلسلة التوابع ذات الحد العام f_n

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}, \quad x \in [0,1]$$

(1) بين ان سلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة ببساطة علي $[0,1]$

نحو تابع S يطلب تحديده

(2) بين ان S غير مستمر علي $[0,1]$ لكن $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 S(x) dx$

(3) استنتج ان $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ لا تتقارب نظيميا علي $[0,1]$

الفصل الثالث

السلاسل الصحيحة

السلاسل الصحيحة

تعريف :نسمي سلسلة صحيحة ذات المتغير x والمعاملات a_n

كل سلسلة توابع من الشكل $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ حيث a_n متتالية عقدية او حقيقية

و $\left(K = \mathbb{C}\right.$ او $\left.\mathrm{K} = \mathbb{R}\right) \quad z \in K$

اذا كان $x \in \mathbb{R}$ نسمي السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ سلسلة صحيحة حقيقية

اذا كان $z \in \mathbb{C}$ نسمي السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ سلسلة صحيحة عقدية

نسمي المجموعة $\Delta = \left\{x \in \mathbb{R}\,, \quad \text{متقاربة} \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n\right\}$ مجال تقارب السلسلة

مثال :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\geq 0} x^n\,, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2} x^n$$

دراسة طبيعة السلاسل الصحيحة :

كل الطرق التي تطبق على سلاسل التوابع فإنها تطبق على السلاسل الصحيحة

نظرية ابل : ليكن $z \in \mathbb{C}$ و a_n متتالية عقدية او حقيقية

اذا كانت السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة من اجل $z_0 \neq 0$ فانها تكون متقاربة

من اجل كل z حيث $|z| < |z_0|$

ملاحظة : نعرف المجموعة $D(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C}\,, \quad |z| < |z_0|\}$

بانها القرص المفتوح

اثبات النظرية : $\sum_{n\geq 0} a_n {z_0}^n$ متقاربة اذا $0 = \lim_{n\to\infty} a_n z^n$ وبالتالي

$$\exists M > 0, \forall n: |a_n {z_0}^n| \leq M$$

$$|a_n z^n| = \left|a_n {z_0}^n \frac{z^n}{{z_0}^n}\right| = |a_n {z_0}^n| \left|\frac{z^n}{{z_0}^n}\right| \leq M \left|\frac{z^n}{{z_0}^n}\right| = M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

اذا كان $|z_0| > |z|$ فان $1 > \left|\frac{z}{z_0}\right|$ ومنه $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة

اذا $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة مطلقا وبالتالي متقاربة على $D(0, |z_0|)$

نتيجة : اذا كانت السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متباعدة من اجل $0 \neq$

z_0 فانها تكون متباعدة من اجل كل z حيث $|z| > |z_0|$

نتيجة : اذا كانت السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة من اجل $0 \neq z_0$

فانها تكون متقاربة نظيميا من اجل كل $z \in \mathbb{C}$ حيث $|z| < r < |z_0|$

الاثبات : لدينا

$$|a_n z^n| \leq M \left|\frac{z^n}{{z_0}^n}\right| \leq M \left|\frac{r^n}{{z_0}^n}\right|$$

$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{r}{z_0}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة وعليه $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة نظيميا على $D(0, r)$

نصف قطر التقارب :

ليكن $\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} ,\quad \sum_{n\geq 0} a_n z^n \right\}$ متقاربة $=\Delta$ حيز التقارب

نسمي العدد الحقيقي الموجب R حيث $R = sup\{|z| , z \in \mathbb{C}\}$

بنصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$

ملاحظة (1) : $0 \leq R \leq \infty$

(1) اذا كان $R = 0$ فان $\Delta = \{0\}$

(2) اذا كان $R = \infty$ فان $\Delta = \mathbb{C}$

ملاحظة (2) :

(1) اذا كان $R > |x|$ فان السلسلة متقاربة مطلقا

(2) اذا كان $R < |x|$ فان لسلسلة متباعدة

(3) اذا كان $R = 1$ لا يعطي نتيجة

(4) من اجل كل $r \in \mathbb{R}_+$ و $r < R$ فان السلسلة متقاربة نظيميا و مطلقا

مثل (1) : $\sum_{n\geq 0} n!\, x^n$

$\lim_{n\to\infty} |n!\, x^n| = \infty$ ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 0} n!\, x^n$ متباعدة

مثل (1) : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!}\right| = \mathit{lim}_{n\to\infty} \left|\frac{x}{(n+1)}\right| = 0 < 1$$

ومنه السلسة $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة مطلقا وبالتالي متقاربة

$R = \infty$ و $\Delta = \mathbb{C}$

تعيين نصف قطر التقارب :

توطئة ادامار :

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ السلسلة الصحيحة و R نصف قطر تقاربها يعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

الاثبات :

نضع
$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = l|x|$$

(1) اذا كان $l|x| < 1$ فان $|x| < \frac{1}{l}$ وعليه فان السلسلة متقاربة مطلقا

(2) اذا كان $l|x| > 1$ فان $|x| > \frac{1}{l}$ وعليه فان السلسلة متباعدة

حسب ملاحظة (2) فان $R = \frac{1}{l}$ بمعنى اخر $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

مثل (1) : $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

ومنه $R = \infty$ و السلسلة متقاربة على $\mathbb{R}$

مثال (2) : $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^n}$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

ومنه $R = 2$ و السلسلة متقاربة على المجال $]-2,2[$ ومتباعدة

على المجال $]-\infty,-2[\ \cup\ ]2,\infty[$

ملاحظة (3) : ليكن التطبيق $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^{\varphi(n)}$ سلسلة صحيحة

لايجاد نصف قطر التقارب R نتبع مايلي

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \lim_{n\to\infty}|x|^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

مثال : اوجد نصف قطر التقارب R للسلسلة الصحيحة

$$\sum_{n\geq 0} 3^n x^{2n+1}$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n+3}}{3^n x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 3|x|^2$$

السلسلة تتقارب اذا كان $3|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و السلسلة متقاربة على المجال $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ ومتباعدة

على المجال $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\ \cup\ \left]\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right[$

دراسة السلاسل الصحيحة الحقيقية من الشكل $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$:

نستطيع كتابة السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ علي الشكل $\sum_{n\geq 0} a_n y^n$ حيث $y=x-x_0$

وعليه فان نصف قطر تقارب الثانية هو نفسه نصف قطر تقارب الاولى وبالتالي فان السلسلة

$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ تتقارب مطلقا على المجال $]x_0-R, x_0+R[$ حيث

R هو نصف قطرتقاربها وتتباعد من اجل $|x-x_0| > \mathrm{R}$

كما انها تتقارب نظيميا على المجال $[a,b]$ من $]x_0-R, x_0+R[$

ملاحظة : ينبغي ان نشير الى انه في حالة $|x-x_0| = \mathrm{R}$ فان السلسلة

$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ تتقارب او تتباعد كما هو الحال بالنسبة للسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

فانها قد تتقارب او تتباعد في الحالة $|x| = \mathrm{R}$

خاصية استمرار مجموع سلسلة صحيحة :

نظرية : اذا كانت $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ سلسلة صحيحة و نصف قطرها R

و$S(x)$ مجموعها. عندئذ فان $S(x)$ يكون مستمرا على المجال $]x_0-R, x_0+R[$

الاثبات :

$x \to a_n(x-x_0)^n$ نعلم انه تابع مستمر على $\mathbb{R}$

كما ان السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ تتقارب نظيميا وبالتالي بانتظام على كل مجال

$[a,b]$ من $]x_0-R, x_0+R[$ وعليه فان $S(x)$ يكون مستمرا

على المجال $]x_0-R, x_0+R[$

خاصية الاشتقاق قابلية المكاملة لمجموع سلسلة صحيحة :

نظرية : اذا كانت $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ سلسلة صحيحة و R نصف قطرتقاربها

(1)مجموعها $S(x)$ يكون قابلا للاشتقاق على المجال $]x_0-R,x_0+R[$

ومشتقه $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_n(x-x_0)^n = \sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1} = S'^{(x)}$

(2) مجموعها $S(x)$ يكون قابلا للمكاملة على المجال $]x_0-R,x_0+R[$

وتكامله هو $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

ملاحظة (4) : اذا كانت $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ سلسلة صحيحة و R نصف قطرتقاربها

مشتقها و تكاملها لهما نفس نصف قطر التقارب

الاثبات :

$$l' = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

$$l'' = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_{n+1}}{(n+1)a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

ومنه $R' = R'' = R = \frac{1}{l}$

نتيجة : اذا كانت $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = S(x)$ و R نصف قطرتقاربها فان

$$a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$S^{(1)}(x) = \sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$S^{(1)}(x_0) = 1!\, a_1$$

$$S^{(2)}(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$S^{(2)}(x_0) = 2!\, a_2$$

$$S^{(3)}(x) = \sum_{n\geq 3} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

$$S^{(3)}(x_0) = 3!\, a_3$$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

$$S^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

نظرية : اذا كان المجموع $S(x)$ للسلسلة الصحيحةا $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$

نصف قطر تقاربها R فانه تابع من صنف $C^{\infty}(]-R,R[)$

و $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

ملاحظة : $f \in C^{\infty}(]-R,R[)$ شرط لازم غير كافي لكي يكون f تابع قابل للنشر الى سلسلة صحيحة

مثال : $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ لكن f تابع غي قابل للنشر الى سلسلة صحيحة لان

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; f^{(k)}(0) = 0$$

التابع قابل للنشر الى سلسلة صحيحة :

تعريف : نقول عن التابع f انه قابل للنشر الى سلسلة صحيحة في حوار 0

اذا وجد سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ معرفة علي مجال $]-r,r[$ $r>0,$ بحيث

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

قضية : اذا كان التابع f قابل للنشر الى سلسلة صحيحة في حوار 0 فان

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ يسمى نشر ماك – لوران

نظرية (الشرط الكافي) : ليكن $f\in C^{\infty}(]-r,r[)$ يحقق الشرط التالي :

$$\exists M>0,\forall n\geq 1\,,\forall x\in\,]-r,r[:\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M$$

عندئذ فان f قابل للنشر الى سلسلة صحيحة حيث $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

نصف قطرتقاربها اكبر او يشاوي r .

الاثبات :

مثال : $f(x)=\sum\frac{2^n}{n!}x^n$ f قابل للنشر الى سلسلة صحيحة على $\mathbb{R}$

ان $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(0)=\infty$

اذا $\forall M>0\ ,\left|f^{(n)}(x)\right|>M$

سلسلة تايلور :

تعريف : نقول عن التابع f انه قابل للنشر الى سلسلة تايلور في جوار x_0 اذا وجد

$R > 0$ بحيث $R \;\; \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[\; f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

نظرية : ليكن $f \in C^{\infty}(]x_0 - R, R + x_0[)$ عندئذ

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

الاثبات :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

نشر بعض التوابع المالوفة :

$$f(x) = sin(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$

اذا f قابل للنشر الى سلسلة صحيحة حيث ا

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$f(x) = cos(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$

اذا f قابل للنشر الى سلسلة صحيحة حيث ا

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$f(x) = e^x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\,, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$

اذا f قابل للنشر الى سلسلة صحيحة حيث ا

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

قصية : ليكن f, g تابعين قابلين للنشر الى سلسلة صحيحة قي جوار 0

عندئذ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$

(1) اذا $(f + \mathrm{g})$ قابل للنشر الى سلسلة صحيحة قي جوار 0 حيث

$$(f + \mathrm{g})(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$$

(2) اذا $(f.\mathrm{g})$ قابل للنشر الى سلسلة صحيحة قي جوار 0

$$(f.\mathrm{g})(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

الفصل الرابع

سلاسل فورية

سلاسل فوريه

(I) مفاهيم عامة :

دورتابع دوري : ليكن f تابعا معرفا على $\mathbb{R}$

نقول عن f انه دوري اذا وجد عدد حقيقي موجب تماما يحقق :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+T) = f(t)$$

العدد T يدعى دور التابع f

ملاحظات :

(1) اذا كان T دورا للتابع f فان كل الاعداد من الشكل kt $k \in \mathbb{N}^*,$ هي ايظا دور ل f

(2) عموما الدور هو العدد موجب تماما الاصغر في مجموعة الادوار وهو موجود خاصة حينما يكون التابع f مستمر ودوري وغير ثابت

قضية : ليكن f تابعا دوريا ودوره T و f_a تابعا معرف ب $f_a(t) = f(at)$

f_a دوريا ودوره $\dfrac{T}{a}$ $(a > 0)$

الاثبات :

$$f_a\left(t+\frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(t+\frac{T}{a}\right)\right) = f(at+T)$$

$$= f(at) = f_a(t)$$

قضية : ليكن f تابعا دوريا ودوره T . عندئذ فان نكامل f على مجال طوله الدور لا يتعلق حدود التكامل اي ان : $\forall c \in \mathbb{R} \quad \int_c^{c+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

الاثبات :

$$\int_c^{c+T} f(t)dt = \int_c^0 f(t)d\,t + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{c+T} f(t)dt$$

لنحسب $\int_T^{c+T} f(t)dt$ باستعمال تبديل المتغير

نصغ $t = x + T$

$$\int_T^{c+T} f(t)dt \; = \int_0^c f(x+T)d\,x = -\int_c^0 f(x)dx$$

ومنه $$\int_T^{c+T} f(t)dt \; = \int_0^T f(t)dt$$

$\vert \quad \vert$

تعريف : نسمي سلسلة مثلثية كل سلسلة معرفة ب :

$$\frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

حيث $l > 0$ و (a_n) , (b_n) متتاليتا اعداد حقيقية

ملاحظة (1) : اذا كانت السلسلة العددية $\sum_{N\geq}(|a_n| + |b_n|)$ متقاربة فان السلسلة

المثلثية $\frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ متقاربة نظيميا وبالتالي

متقاربة بانتظام ومطلقا على $\mathbb{R}$

لان $$u_n(x) = a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |u_n(x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

ملاحظة (2) :

$$e^{i\frac{n\pi}{l}x} = cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + i\ sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$e^{-i\frac{n\pi}{l}x} = cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) - i\ sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x} + e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2}$$

$$sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x} - e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2i}$$

السلسلة المثلثية الناتجة تصبح

$$\frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x} + e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x} - e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)}{2} e^{i\frac{n\pi}{l}x} + \frac{(a_n + ib_n)}{2} e^{-i\frac{n\pi}{l}x}$$

ای انها من الشكل

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n\, e^{i\frac{n\pi}{l}x} \quad \text{حيث} \quad \lambda_n \in \mathbb{C}$$

$$\lambda_n = \begin{cases} \dfrac{(a_n - ib_n)}{2}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ \dfrac{(a_n + ib_n)}{2}, & n \leq -1 \end{cases}$$

تعريف : متتالية التوابع

$$1, cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), sin\left(\frac{\pi}{l}x\right), cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right), sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \ldots,$$

$$, cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

تدعى جملة مثلثية اساسية

قضية : الجملة المثلثية الاساسية تقبل خاصية تدعى خاصية التعامد

$\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-l}^{l} cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \, cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \int_{-l}^{l} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ l, & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

قضية : اذا كانت السلسلة المثلثية

$\frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ متقاربة علي المجال $[-l, l]$

فان مجموعها $S(x)$ يكون دوريا ودوره $2l$ واذا كان التقارب منتظما فان

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \,, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \,, n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \,, n \geq 1$$

البرهان :

من الواضح انه في حالة التقارب على المجال $[-l, l]$ فان $S(x + 2l) = S(x)$

ونعبر عن هذا اختصارا بالقول : $S(x)$ $2l$ – دوري

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n(x) = a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

مستمر على $\mathbb{R}$ و السلسلة متقاربة بانتظام اذا فان $S(x)$ مستمر وبالتالي يقبل

المكاملة على $[-l,l]$

$$S(x)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right) = \frac{a_0}{2}cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)$$

$$\int_{-l}^{l} S(x)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx = \int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx +$$

$$\int_{-l}^{l}\sum_{n=0}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

$$+\int_{-l}^{l}\sum_{n-1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}a_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

(1)بوضع $p = 0$

$$la_0 = \int_{-l}^{l} S(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)dx$$

(2)بوضع $p \geq 1$

$$la_n = \int_{-l}^{l} S(x)cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \quad ,n \geq 1$$

$$lb_n = \int_{-l}^{l} S(x) sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} S(x) sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \quad , n \geq 1$$

اكتب المعادلة هنا.