Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hamma Lakhdar El-Oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Emements de la topologie générale

Cours

Said Beloul

2020-2021

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on présente quelques éléments de la topologie, définitions, concepts et théorèmes. Ce travail s'adresse principalement aux étudiants de premième année master en (mathématiques), ainsi qu'à toute personne s'intéressant à la topologie. On décompose en quatres chapitre :
Dans le premier chapitre, ce polycopié on présente certaines notions et définitions de base.
Le deuxième chapitre est resérvé aux espaces compactes et leurs propriétés.
Pour le troisième chapitre, on donne un aperçu sur les espaces fonctions, critères de compacité dans des espaces de foctions.
Dans le dernier chapitre, on s'interesse aux quelques fondamentaux.

Chapitre 1

Espaces topologiques, espaces métriques

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit X un ensemble, une topologie sur X est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. *Pour tout $O_i \in \tau$, l'intersection $\cap_{i\in I} \in \tau$, où I est fini.*
3. *Pour tout $O_j \in \tau$, le réunion $\cup_{j\in J} \in \tau$.*

Exemple 1.1.
1. *Soit X un ensemble quelconque, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X, elle dite la topologie grossière (triviale).*
2. *Soit X un ensemble quelconque, $\tau = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, elle dite la topologie discrète.*

3. *Soit* $X = \{1,2\}$, *alors les topologies sur* X *sont :* $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$,$\tau_3 = \{\emptyset, \{2\}, X\}$, $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{1, \{2\}, X\}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ *sont dits des ouverts, et on appelle un fermé le complementaire d'un ouvert.*

Définition 1.2. *Soient* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *deux topologies, on dit que* $\mathcal{T}_1$ *est moins fine que* $\mathcal{T}_2$ *si* $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

Exemple 1.2. *Soit* X *un ensemble, la topologie discrète est plus fine topologie peut être définie sur* X.

Définition 1.3. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ *est dite une base de la topologie* $\mathcal{T}$ *si pour tout ouvert non vide de* $\mathcal{T}$ *est un réunion d'ouverts appartenant à* $\mathcal{B}$.

Définition 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in X$, *on dit qu'une partie* $\mathcal{V}$ *de* X *est un voisinage de* x, *s'il existe un ouvert* O *tel que* $x \in O \subset \mathcal{V}$.

Exemple 1.3. $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle, tout ensemble* $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cup\{y\}$ *est un voisinage de* x.

1.1.2 Adhérence, intérieur et frontière d'une partie

Définition 1.5. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $x \in X$ *et* A *une prtie de* X.

1. *On dit que* x *est ahérent à* A *si tout voisinage de* x *rencontre* A, *c'est à dire*

$$\forall O \in \mathcal{V}x, O \cap A \neq \emptyset.$$

   On note par $\overline{A}$ *l'ahhérence de* A, *c'est l'ensemble de points adhérent à* A.

2. *On dit que x est intérieur à A si A est un voisinage de x et on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A.*

3. *On dit que x est un point frontiière à A si à la fois adhérent à A et à X/A, c'est àdire $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$.*

4. *On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point distinct de x, c'est à dire*

$$\forall V \in \mathcal{V}x, (V/\{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

5. *On dit que x est un point isolé dans A s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.*

Quelques propriétés

1. *L'adhérent de A est le plus petit fermé qui contient A.*

2. *L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.*

3. *$Fr(A) = \overline{A} \backslash A$.*

4. *x est un point isolé dans X si $\{x\}$ est un ouvert.*

5. *Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors $A' = \emptyset$*

Proposition 1.1. *Soit A une patie d'un e.t $(X, \mathcal{T})$, on a :*

$$\overbrace{X\backslash A}^{\circ} = X\backslash\overline{A}, \quad \overline{X\backslash A} = X\backslash\mathring{A}$$

Démonstration. Puisque $A \subseteq \overline{A}$, alors $X\backslash\overline{A} \subseteq X\backslash A$, comme $X\backslash\overline{A}$ est un ouvert inclus dans $X\backslash A$. D'où $X\backslash\overline{A} \subseteq \overbrace{X\backslash A}^{\circ}$.
Reciproquement, soit $x \in \overbrace{X\backslash A}^{\circ}$, alors il exist un ouvert O, tel que $x \in O \subseteq X\backslash A$, ce qui implique $O \cap A = \emptyset$. Donc $x not \in A$, i.e., $x \in X\backslash\overline{A}$.
On a $\mathring{A} = X\backslash\overline{X\backslash A} = \overbrace{X\backslash(X\backslash A)}^{\circ}$, donc d'après la propriété précédente on trouve $X\backslash\mathring{A} = X\backslash(X\backslash\overline{X})$. ■

Définition 1.6. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subseteq X$.

1. *On dit que* A *est dense dans* X *si* $\overline{A} = X$.
2. *On dit que* X *est séparable s'il existe une partie dénombrable et dense.*

1.1.3 La continuité dans des espaces topologiques

Définition 1.7. *Soient* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ *des espace topologique,* $x_0 \in X$ *et* $f : X \to Y$ *une fonction.*

1. *On dit que* f *est continue en* x_0 *si pour tout voisinage* V *de* $f(x_0)$ *il existe un voisinage* U *de* x_0 *tel que* $f(U) \subseteq V$.
2. *On dit qu'une application continue* f *est un homoémorphisme de* X *sur* Y *si* f *est bijective et* f^{-1}.

Définition 1.8. *Soient* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ *un espace topologique, et* $f : X \subseteq Y$ *une fonction.*

1. *On dit que* f *est fermée si l'image de tout fermé de* X *est fermé dans* Y.
2. *On dit que* f *est fermée si l'image de tout fermé de* X *est fermé dans* Y.

Proposition 1.2. *Soient* X, Y *des espaces topologiques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. Les propriété suivantes sont équivalentes.*

(i) *:* f *est une application ouverte.*

(ii) *: Pour toute partie* A *de* X, *on a* $f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X, alors A est un ouvert de X et donc $f(A)$ est un ouvert de Y contenu dans $f(A)$, d'où $f(\mathring{A}) \subset \overbrace{f(A)}$. Donc on a $f(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$. Par conséquent, $f(A)$ est un ouvert de Y.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X, on a $U = \mathring{U}$, d'où $f(U) = f(\dot{U}) \subset \widetilde{f(U)}$. Done on a $f(U) = \overbrace{f(U)}$. Par conséquent, $f(U)$ est un ouvert de Y. ∎

Proposition 1.3. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équrvalentes.*

(i) : f est fermée.

(ii) : Pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\longrightarrow$ (ii). Soit A uno partie de X, alors $f(\bar{A})$ cst un fermé de Y et on a $f(A) \subset f(\bar{A})$, d'où $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.
Prcuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit F un fermé de X, alors on a $\bar{F} = F$, d'où $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F')$. Donc on a $f(F) = \overline{f(F)}$. Par conséquent, $f(F)$ est un fermé de Y. ■

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Définitions

Définition 1.9. *Soit X un ensemble quelconque. On appelle distance sur E toute fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $d(x, x) = 0, \forall x \in X$ et $d(x, y) > 0, \forall x, y \in X, x \neq y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$ on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (X, d) est dit un espace métrique.

Proposition 1.4. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Pour tout $x, y, z \in X$, on a$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$.*
2. *Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$, on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$.*

Démonstration. D'après les deuxième et troisième propriétés d'une métrique, on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ et $d(z, y) \leq d(x, z) + d(x, y)$, d'où $d(x, z) -$

$d(z,y) \leq d(x,y)$ et $d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y)$ Par conséquent, on a $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$. Posons $I_n : d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$. Il est clair que I_1 est vraie. Posons que I_{n} est vraie, i.e. que l'on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$. Par l'inégalité trinngulaire, on a $d(x_1, x_{n+2}) \leq d(x_1, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})$, d'où :

$$d(x_1, x_{n+2}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i+1})$$

Whe I_{n+1} est vraie. Par conséquent, I_n est vraie pour tout $n \geq 1$. ■

Définition 1.10. *Soient (X,d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'enserable :*

$$B(a,r) = \{x \in X; d(a,x) < r\}$$

2. *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$B'(a,r) = \{x \in X; d(a,x) \leq r\}$$

3. *On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$S(a,r) = \{x \in X; d(a,x) = r\}.$$

1.2.2 Distences équivalentes

Définition 1.11. *Soit E un ensemble sur lequel sont définies deux distances d_1 et d_2. d_1 et d_2 sont dites topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie, c'est à dire si elles définissent les mêmes ouverts.*

Proposition 1.5. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur X. On suppose qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que*

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y), \quad \forall x,y \in X.$$

Alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. Soient O un ouvert de (X, d_1) et $a \in O$. Alors $\exists r > 0$ tel que $B_{d_1}(a, r) = \{x \in E : d_1(x, a) < r\} \subset O$. On pose $r_* = rC_1$ Si $d_2(a, x) < r_*$, alors $d_1(x, a)\frac{1}{C_1}d_2(x, a) < \frac{r_*}{C_1}$ et donc $d_1(x, a) < r$. D'où $x \in O$. Ainsi pour $r_* = rC_1$ on a

$$B_{d_2}(a, r_*) = \{x \in X : d_2(x, a) < r_*\} \subset O.$$

Donc O est ouvert dans (X, d_2). Réciproquement en permutant les rôles de d_1 et d_2 il vient que si O est un ouvert de (X, d_2) alors O est un ouvert de (X, d_1). Donc d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

■

1.2.3 Suites convergentes, suites de Cauchy

Définition 1.12. *Soient (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite de X.*

1. *On dit que (x_n) converge vers $l \in X$ et on note $x_n \to l$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\forall n \geq n_{alors}$ on a $x_n \in B(l, \varepsilon)$.*
2. *Une suite extraite (on dit aussii sous-suite) de (x_n) est de la forme $\left(x_{\phi(n)}\right)$ où[1] $\phi : \mathbb{N} \to N$ est strictement croissante.*
3. *Une suite $(x_n) \subset X$ est dite de Cauchy* si $d(x_n, x_m) \to 0$ *lorsque $n, m \to \infty$. Autrement dit si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$$

Proposition 1.6. *Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n) \subset X$. Si (x_n) converge vers l, alors toute sous-suite $\left(x_{k(n)}\right)$ de (x_n) converge vers l.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $\exists n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$ on a $d(x_n, l) < \varepsilon$. On a $1 \leq k(1) < k(2) < \cdots < k(n) < k(n+1) \ldots$ Par récurrence on a

$k(n) \geq n$. Alors $\forall n \geq n_\varepsilon$ $k(n) \geq n \geq n_\varepsilon$, donc $d\left(x_{k(n)}, l\right) < \varepsilon$. On a donc prouvé que $x_{k(n)} \to l$. ■

Proposition 1.7. *Soit(X, d)unespacemérique.*

(*i*) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

(*ii*) *Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy admettant une suite extraite convergente. Alors la suite $(x_n) \subset X$ est convergente.*

(*iii*) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. (*i*) Si $x_n \to x$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$ et donc

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \leq 2\varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

(*ii*) Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy et $\left(x_{\phi(n)}\right)$ une suite extraite telle que $x_{\phi(n)} \to x$ pour un $x \in X$. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$, pour tout $n, m \geq n_0$. Aussi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(p) \geq n_0$. Par suite $d\left(x_{\phi(p)}, x\right) \leq \varepsilon$ et

$$d(x_n, x) \leq d\left(x_n, x_{\phi(p)}\right) + d\left(x_{\phi(p)}, x\right) \leq \varepsilon + \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

(*iii*) Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{n_0}, x_n) \leq 1, \forall n \geq n_0$. Donc

$$(x_n) = \{x_0, \cdots, x_{n_0-1}\} \cup (x_n)_{n \geq n_0}$$

est bornée.

■

Proposition 1.8. *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniforémément continue est de Cauchy.*

Démonstration. Soient $(X, d), (Y, d')$ des espaces mét riques, $f : X \longrightarrow Y$ une application uniformément continue et $(x_n)_n \geq 0$ une suite de Cauchy dans (X, d). Soit $d(x, z) < \eta$, puisque f est uniformément continue on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Comme $(x_n)_n \geq 0$ est de Cauchy, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, on ait $d(x_n, x_m) < \eta$, d'où pour tout $n, m \geq$ on a $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Par conséquent $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (Y, d'). ∎

1.2.4 Espaces métriques complets

Définition 1.13. *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de (X, d) est convergente dans (X, d).*

Exemple 1.4. *(ii) Considérons $X =]0, 1]$ muni de la distance usuelle $|\cdot|$ et $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \subset X$. Puisque $x_n \to 0$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|), (x_n)$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et donc de Cauchy dans $(X, |\cdot|)$. Pourtant elle ne converge pas dans $(X, |\cdot|)$.*

Proposition 1.9. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F \subset X$. Alors (F, d) est complet si et seulement si F est un fermé de X*

Démonstration. Supposons que F soit fermé dans X. Soit $(x_n) \subset F$ une suite de Cauchy. C'est aussi une suite de Cauchy de X et donc elle converge dans X car E est complet. Maintenant puisque $(x_n) \subset F$ et que F est fermé la limite est dans F et donc F est complet. Réciproquement supposons F complet. Soit $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$ dans X. La suite (x_n) est de Cauchy dans X et donc aussi dans F. Or, par hypothèse, les suites de Cauchy de F sont convergentes dans F et donc $x \in F$. Cela prouve que F est fermé. ∎ *On dit que $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ est une application lipschitzienne s'il existe $L > 0$*

tel que $\forall x, y \in X_1$ *on a*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq Ld_1(x, y).$$

On appelle la plus petite constante $L \in \mathbb{R}$ *qui vérifie cette propriété la constante de lipchitz.*

On dit que $f : (X, d) \to (X, d)$ *est contractante s'il existe* $k < 1$ *tel que* $\forall x, y \in X$ *on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

1.2.5 Applications aux espaces métriques complets

Principe de contraction de Banach

Théorème 1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $f : X \to X$ *une application contractante. Alors*

(i) Il existe un unique $x \in X$ *tel que* $f(x) = x$ *(on dit alors que* $x \in X$ *est un point fixe).*

(ii) Toute suite $(x_n) \subset X$ *qui satisfait* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* $x \in X$*.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite définie par $x_1 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n1$. Soit $k < 1$ tel que $d(f(x), f(y))kd(x, y)$. Alors

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq k^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\
&\leq \cdots k^{n-1} d(x_2, x_1)
\end{aligned}$$

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ fixe et soient pmN_0. Alors

$$\begin{aligned}
d(x_p, x_m) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\leq k^{p-2} d(x_2, x_1) + k^{p-3} d(x_2, x_1) + \cdots + k^{m-1} d(x_2, x_1) \\
&= \left[k^{p-m-1} + k^{p-m-2} + \cdots k + 1\right] k^{m-1} d(x_2, x_1)
\end{aligned}$$

Or

$$1+k+k^2+\cdots k^{p-m-1} \leq \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{1}{1-k}.$$

Donc $\forall p \geq m \geq N_0$ on a, comme, $k<1$

$$d\left(x_p, x_m\right) \leq k^{m-1} \frac{1}{1-k} d\left(x_2, x_1\right) \leq k^{N_0-1} \frac{1}{1-k} d\left(x_2, x_1\right)$$

Soit $\varepsilon>0$ fixé. Alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k^{N_0-1} \frac{1}{1-k} d\left(x_2, x_1\right)<\varepsilon$$

Donc $\forall p \geq m \geq N_0$ on a $d\left(x_p, x_m\right)<\varepsilon$ et donc $\left(x_n\right) \subset X$ est de Cauchy. Comme (X, d) est. complet elle converge donc. Soit $x=\lim x_n$. Maintenant puisque $x_{n+1}=f\left(x_n\right), \forall n \geq 1$, en passant à la limite et en utilisant la continuité de f il vient que $x=f(x)$. Donc $x \in X$ est bien un point fixe de f. Pour l'unicité, si $x=f(x)$ et $y=f(y)$ on écrit $d(x, y)=d(f(x), f(y)) \leq k(d(x, y))$ et comme $k<1$ il vient que $d(x, y)=0$ d'où $x=y$. ■

Théorème de Cantor

Théorème 1.2. *Soit* (X, d) *et* $\left(F_n\right)$ *une suite de fermés non vides et décroissante de* X *telle que* $\lim_{n \rightarrow+\infty} \delta\left(F_n\right)=0$. *Alors l'intersection des* $F_n, n \in \mathbb{N}$, *est réduite à un point si et seulement si* (X, d) *est complet.*

Démonstration. Les F_n n'étant pas vides, on peut construire une suite $\left(x_n\right)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$. L'hypothèse (i) montre que $F_m \subset F_n$ pour tout $m \geq n$, si bien que pour tout $m \geq n, x_n$ et x_m sont dans F_n. par suite, pour tout $m \geq n$, on a

$$\mathrm{d}\left(x_n, x_m\right) \leq \delta(F_n).$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc la suite $\left(x_n\right)$ est de Cauchy. Soit ℓ sa limite et soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. la suite

$(x_m)_{m\geq n}$ est une suite de F_n qui converge vers ℓ. Comme F_n est un fermé de X, la limite ℓ appartient à F_n et par suite ℓ appartient à l'intersection des $F_n, n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, soit x dans l'intersection des F_n. Puisque x et ℓ sont dans F_n pour tout n, on a

$$0 \leq \mathrm{d}(x, \ell) \leq \delta(F_n)$$

Le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $x = \ell$.

Soit $(x_n) \subset E$ une suite de Cauchy. Considérons les ensembles, pour $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}}$$

La suite (F_n) est constituée de fermés et elle est décroissante. Aussi comme $(x_n) \subset E$ est de Cauchy on a que diam $F_n \to 0$ si $n \to \infty$. Par hypothèse il vient donc que

$$\cap_{n=0}^{\infty} F_n$$

comporte un et un seul point, que l'on note $x \in X$. Clairement alors $x_n \to x$.

■

1.2.6 Espaces de Baire

Soit X un espace topologique, on dit dit que X est un espace de Baire si pour tout des ouverts O_n denses dans X, l'intersection est dense, c'est àdire $\overline{\cap_{n\geq 0} O_n} = X$.

Exemple 1.5. *L'espace topologique discrète est un espace de Baire.*

Corollaire 1.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Si (F_n) est une suite de fermés d'intérieur vide de X, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. Il suffit de passer au complémentaire. ■

Théorème 1.3. *Soit (X, d) un espace metrique complet. Alors X est une espace de Baire.*

Démonstration. Soit $(O_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts de X et denses dans X. Pour montre que $\cap_0 O_n$ est dense dans X, il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide V de $X, V \cap \bigcap\limits_{n\geq 0} O_n \neq \emptyset$. Comme O_0 eat dense dans X, alors $V \cap O_0 \neq 0$, et soit $x_0 \in V \cap O_0$. Comme $V \cap O_0$ est un ouvert de X, il existe $r_0 > 0$ tel que $r_0 \leq 1$ et $B(x_0, 2r_0) \subset V \cap O_0$. On construit, par récurrence sur n, une suite $(x_n)\, n \geq 0$ dans X et une suite $(r_n)_n \geq 0$ de nombres réels strictement positifs tels que $r_n \leq 2^{-\pi}$ et $B(x_n, 2r_n) \subset O_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, pour tout $n \geq 1$. En effet, on a déja construit x_0 et r_0 et supposons x_n et r_n construits ; comme O_{n+1} est dense dans X, il existe $x_{n+1} \in On + 1 \cap B(x_n, r_n)$ théorème de Cantor, on a $\cap_n B_n \neq \emptyset$. Or $B_0 \subset V$ et, pour tout $n \geq 0$, on a $B_n \subset O_n$ donc $\bigcap\limits_{n\geq 0} B_n \subset V \cap \bigcap\limits_{n\geq 0} O_n$. Par conséquent, on a $V \cap \bigcap\limits_{n\geq 0} O_n \neq 0$. Donc $\bigcap\limits_{n\geq 0} O_n$ est dense dans X. ■

Chapitre 2

Espaces compacts

2.1 Définitions

Définition 2.1. *Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est compact* † *si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \cup_{i\in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \cup_{i\in J} O_i$.*

Proposition 2.1. *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *X est compact.*

(*ii*) *De toute famille de fermés de X dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.*

(*iii*) *Toute famille de fermés de X dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide, est elle-même d'intersection non vide.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X telle que $\underset{i\in I}{\cap} F_i = \emptyset$. Pour tout $i \in I$, soit $O_i = X\backslash F_i$, alors $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est compact, alors il existe un sous-ensemble fun ? J de I tel que $X = \cup_{i\in J} O_i$, d'où on a $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$ Pour montrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i), on fait exactement le même raisonnement que précédemment. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est triviale. ■

Définition 2.2. *Soient X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est compacte si A, munie de la topologie induite par celle de X, es un espace compact.*
On dit que A est relativement compacte si $\bar{A}$ est compact.

Exemple 2.1.

1. *Soient X un espace topologique séparé et $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ une partie finie de X. Alors A est compacte. En effet, soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$. Pour tout $n \in \{1, \dots, p\}$, il existe $i_n \in I$ tel que $a_n \in O_i$. Donc on a $A \subset \bigcup_{n=1}^{p} O_{i_n}$. Par conséquent, A est compacte.*

2. *Soit X un espace topologique discret. Alors X est compact si et seulement si X est fini. En effet, si X est fini, il résulte de ce qui précède que X est compact.*
   Réciproquement, supposons que X est compact. Pour tout $x \in X$, soit $U_x = \{x\}$ alors $(O_x)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X, donc il existe $x_1, \dots, x_p \in X$ tel que $X = \bigcup_{n=1}^{p} O_{x_n} = \{x_1, \dots, x_p\}$. Par conséquent, X est fini.

3. *Soient X un espace topologique séparé et $(x_n)_n \geq 0$ une suite convergente dans X vers la limite $x \in X$, alors l'ensemble $A = \{x\} \cup \{x_n, n \geq 0\}$ est compact.*
   En effet soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$. Alors il existe $i_\alpha \in I$ tel que $x \in O_{i_\alpha}$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, on ait $x_n \in O_{i_\alpha}$. Comme pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in O_{i_n}$. Alors on a

$A \subset O_{i_\alpha} \cup \bigcup_{n=0}^{N} O_{i_n}$. *Par conséquent, A est compact.*

Théorème 2.1. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X.*

1. *Si A est compacte, alors A est fermée dans X.*

2. *X est compact et A est fermée dans X, alors A est compacte.*

Démonstration. Pour montrer que A est fermée dans X, on montre que son c ataire $X \backslash A$ est ouvert dans X. Soit $x \in X \backslash A$. Puisque X est séparé, pour tout x, a il existe deux ouverts V_a et O_x dans X tels que $a \in V_a, x \in O_{a,x}$ et $V_a \cap O_{a,x} = \emptyset$ $(V_a)_{a \in A}$ est une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \cup_{a \in A} V_a$. Comme A est compacte alors il existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$. Soit $O_{a_i,x}$, alors U_x est un ouvert de X contenant x tel que $O_x \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}) = \emptyset$, d'où $O_x \subset X \backslash A$. Donc $X \backslash A$ est un ouvert de X. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \cup_{i \in I} O_i$. Soit $O = X \backslash A$, alors un ouvert de X et on a $X = O \cup \cup_I O_i$. Or X est compact, donc il existe un sous-en fini J de I tel que $X = O \cup \cup_J O_i$, d'où on a $A \subset \cup O_i$. Donc A est compacte. ■

2.2 Espaces métriques compacts

Définition 2.3. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est un espace compact si et seulement si de tout recouvrement de X par des ouverts de X, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $X = \cup_{i \in I} O_i$ où les U_i sont des ouverts, il existe J fini, $J \subseteq I$ tel que $X = \cup_{i \in J} O_i$.*

Théorème 2.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Les conditions suivantes font équivalentes :*

(*i*) *X est un espace compact.*

(*ii*) *Toute suite de points de X possède une sous-suits convergente dans X.*

Proposition 2.2. *Soient $X_1, ..., X_n$ un nombre fini d'espaces métriques. L'ensemble $X = X_1 \times ... \times X_n$ est compact si et seulement si X_i est compact pour tout i.*

Démonstration. Pour $n = 2$, si X_1 et X_1 sont compacts, montrons que $X_1 \times X_2$ est compact. Soit donc (x_n, y_n) une suite de $X_1 \times X_2$. Comme X_1 est compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) converge vers $x \in X_1$. même pour (y_n), il existe $(y_{n'_k})$ converge vers $y \in X_2$. La suite $(x_{n_k}, y_{n'_k})$ est extraite de la suite (x_n, y_n) donc $X_1 \times X2$.
Réciproquement, si $X_1 \times X_2$ est compact, il suffit de montrer X_1 est comact. Soient (x_n) une suite de X_1 et $a \in X_2$, alors la suite (xn, a) est dans $X1 \times X_2$, donc il existe une sous-suite (x_{n_k}, a) converge, ce qui montre que la suite (x_n) converge et que X_1 est compact. Le cas général pour n quelconque se déduit aisément par récurrence. ∎

Corollaire 2.1. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni des distances produit usuelles) sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.*

2.3 Espaces précompacts

Définition 2.4. *Un espace métrique (X, d) est dit précompact* † *si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε.*

Proposition 2.3. *Soient (X, d) un espace métrique et A un sous ensemble de X. On a :*

1. *Si (X, d) est précompact, alors A est précompact.*
2. *Si A est précompact, alors $\bar{A}$ est précompact.*

Proposition 2.4. *Soit (X, d) un espace métrique précompact. Alors X est séparable En particulier, tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, il existe un sous-ensemble fini D_n de X tel que $X = \cup_{x \in D_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Soit $D = \cup_{n \geq 1} D_n$, alors D est au plus dénombrable. Vérifions que D est dense dans X. Soient $y \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Comme on a $X = \cup_{x \in D_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, il existe $x \in D_n \subset D$ tel que $y \in B\left(x, \frac{\bar{1}}{n}\right)$, d'où $d(y, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc D est dense dans X. Par conséquent, (X, d) est séparable. Comme tout espace métrique compact est précompact, alors tout espace métrique compact est séparable. ■

Lemme 2.1. *Soient (X, d) un espace métrique tel que toute suite dans X possède une sous-suite convergente. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans au moins un des O_i. Autrement dit, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ pour lequel $B(x, r) \subset O_i$.*

Théorème 2.3. *Soit (X, d) un espace métrique. X est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Démonstration. On va montrer seulement une implication. Soit donc (x_n) une suite dans X. X étant précompact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon 1. L'une d'elles, B_1 contient donc une infinité d'éléments de la suite (x_n). Il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \exists \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $x_{\varphi_1(n)}$ soient dans cette boule B_1. On peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$. En particulier, on peut recouvrir $B1$ par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$, et l'une d'elles, B_2

contient donc une infinité d'éléments de la suite $(x_{\varphi_1}(n))$. Il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \exists\mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}$ soient dans cette boule B_2. On continue le processus, on construit comme cela une suite de boules B_p de rayons $\frac{1}{p}$ et des applications strictement croissantes $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ .... \varphi_p}(n)$ soient dans B_p. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ ...\varphi_n(n)$. La fonction φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Comme Xest complet, il suffit de vérifier que $(x_(n))$ est de Cauchy pour montrer qu'elle converge. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \geq n$, puisque $\varphi(q) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ ...\varphi_n(\varphi_{n+1} \circ ...\varphi_q$ et que tous les termes de la forme $x_{\varphi_1 \circ ...\varphi_n(k)}$ sont dans B_n, on en dLeduit que, pour tout $p, q \geq n$ $x_{\varphi(p)}$ et $x_{\varphi(q)}$ sont dans la boule B_n. En particulier,

$$\forall p, q \geq n, d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) \leq diam B_n < \frac{2}{n},$$

ce qui termine la preuve. ■

2.4 Fonctions continues dans des espaces compacts

Théorème 2.4. *Soient X et Y deuc espaces topologiques, avec Y sépare, et $f : X \to Y$ une application continue.* Ona *: 1.*

1. *L'image par f de toute partie compacte de X est une partie compacte de Y.*
2. *Si X est compact, alors f est une application fermée.*
3. *Si X est compact et si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit K une partie compacte de X. Puisque Y est séparé, alors $f(K)$ est séparé. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(K) \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, alors on a

$$K \subset f^{-1}(j(K)) \subset f^{-1}\left(\underset{i\in I}{\cup} U_i\right) = \underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(U_i)$$

Comme f est continue, alors pour tout $i \in I, f^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X. Or K est une partie compacte de X, donc il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \cup_{i\in} f^{-1}(U_i)$ D'où on a $f(K) \subset f\left(\underset{d\in J}{\cup} f^{-1}(U_i)\right) = \cup_{i\in J} f\left(f^{-1}(U_i)\right) \subset \underset{i\in J}{\sqcup} U_i$. Par conséquent, $f(K)$ est une partie compacte de Y. 2. Supposons de plus que X est compact. Soit F une partie fermée de X, d'après le théorème $3.1.1, F$ est une partie compacte de X, donc $f(F)$ est une partie compacte de Y. En utilisant une fois de plus le théorème 3.1.1, on déduit que $f(F)$ est une fermée de Y. Par conséquent, f est une application fermée. 3. Ceci résulte de 2 , voir également le théorème 1.3 .2 . Corollaire 3.2.1. Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f\ X \longrightarrow Y$ une application continue, alors pour toute partic A de X, on a $\overline{f(A)} = f(\vec{A})$ Démonstration. Ceci résulte du th ?orème précédent et du corollaire 1.3 .1 . ■

Corollaire 2.2. *Soient T_1 et T_2 deux topologies sur un ensemble X et supposons yue T_2 est plus fine que T_1. Si $(X, \mathcal{T}_2)$ est compact et $(X, \mathcal{T}_1)$ est séparé, alors on a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Théorème 2.5. *Scient X un espace compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornéc et atteint sur X ses bomes inferiéure et superiéure. Autrement dit, il existe $a, b \in X$ tels que $f(a) = \inf_{x\in X} f(x)$ et $f(b) = \sup_{x\in X} f(x)$.*

Démonstration. D'après le théoreme précédent, $f(X)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, Hinc $f(X)$ est fermée et bornée dans R, voir théorème 3.1.1. Par l'exercice 2.16, on $f(X)$, alors il existe $a, b \in X$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. D'où le résultat. ■

Théorème 2.6. *Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces metriques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue, il existe, pour tout $x \in X$, une boule ouverte B_x centrée en x dont l'image est contenue dans $B(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$. On a $\cup_{x\in X} B_x = X$, et X est compact, donc il existe $\delta > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon δ est contenue dans une boule B_x. Si $y, z \in X$ vérifient $d(y, z) < \delta$, on a donc $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$. ■

Proposition 2.5. *Si X est compact et f est bijective et continue, alors f est un homéomorphisme.*

Proposition 2.6. *Il s'agit de vérifier que l'application réciproque f^{-1} est continue. Or, si A est une partie fermée de X , A est compacte car X est compact, donc $f^{-1-1}(A) = f(A)$ est compacte, et par conséquent fermée.* ■

Proposition 2.7. *Soit (X, d) un espace métrique, si X est compact alors il est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X, alors on peut extraire une sous suite $(x_{n_k}$ convergente vers x dans X, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \geq m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in N, \forall n \geq n_1, d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui ilplique pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

2.5 Espaces localement compacts

Définition 2.5. *Soit X un espace topologique séparé, on dit que X est localement compact si et seulement si pour tout point dans X admet un voisinage compact.*

Exemple 2.2. *1. $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est localement compact.*

2. Tout espace compact est localement compact.

2.6 La compacité dans les espaces vectoriels normés

Théorème 2.7. *Dans un espace vectoriel normé X toutes les normes définis sur X sont équivalentes.*

Corollaire 2.3. *Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel normé quelconque est continue.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ une application linéaire où X est un e.v.n de dimenension finie et Y un e.v.n quelconque. Consdérons $(e_1, .., e_n)$ une base de X et la norme

$$\|x\|_X = \max_{1 \leq \leq n} |x_i| \ ; \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Il suffit donc de montrer que f est continue si on munit X de la norme précédente, alors on a

$$\|f(x)\|_Y = \| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \leq \|x\|_X \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i\|_Y.$$

Donc f est continue. ■

Corollaire 2.4. *Tout espace vectoriel normé X de dimension finie est complet.*

Démonstration. Si X est de dimension finie n, il existe un isomorphisme linéeaire $f : X \to K$n. Comme X et K^n sont tous les deux de dimension finie, il résulte que f et f^{-1} sont continues. Comme toute application linéaire continue est uniformément continue, il en résulte que f est un homéomorphisme uniforme. Comme K^n est complet, il résulte que X est complet. ∎

Corollaire 2.5. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Démonstration. Puisque il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors il est complet, donc fermé. ∎

Proposition 2.8. *Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Théorème 2.8. *(Théorème de Riez) La boule unit´e ferm´ee d'un espace vectoriel norm´e de dimension infinie n'est jamais compacte.*