Série d'exercices N° 1

Exercice 1 *Soit X un ensemble.*

1. *Si on muni X muni de la topologie discrète. Quelles sont les parties fermées ?.*
   Si A un sous-ensemble de X, quel est l'intérieur de A ?, quelle est l'adhérence ?.
2. *Même questions pour la topologie grosière ?.*

Exercice 2 *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.*
Pour $x \in X, d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$.

1. *Montrer que si $x, y \in X$, alors $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.*
2. *En déduire que la fonction $f(x) = d(x, A)$ est continue.*
3. *Montrer que $\overline{A} = \{x \in X, d(x, A) = 0\}$.*

Exercice 3 *Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite dans X.*

1. *Montrer que si (x_n) est de Cauchy, alors $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. La réciproque est-elle vraie ?*
2. *Montrer que (x_n) est suite de Cauchy si et seulement si pour toute sous-suite (x_{nk}) on a $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) = 0$.*
3. *Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente, alors (x_n) est de Cauchy.*

Exercice 4 *Soit $X =]0, \infty[$, pour x et y dans X, on pose $\rho(x, y) = |\ln x - \ln y|$.*

1. *Vérifier que ρ est une distance sur X.*
2. *Soit d la distance usuelle sur X. Montrer que (X, d) n'est pas complet.*
3. *La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$, est-elle convergente dans l'espace metrique (X, ρ) ?. Est-elle de une suite de Cauchy dans (X, ρ) ?.*
4. *Montrer que l'espace metrique (X, ρ) est complet.*

Exercice 5 $\mathbb{R}$ *est-il complet si on le muni par une de les distences suivantes ? :*
1)$d(x, y) = |x^3 - y^3|$, 2)$d(x, y) = |e^x - e^y|$, 3)$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$.

Exercice 6 *Soit $\alpha > 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application pour laquelle*

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y).$$

pour tout $x, y \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. Considerons une suite (x_n) définie par $x_n = T^n x_0$, où $x_0 \in X$.

1. *Montrer que (x_n) est de Cauchy.*
2. *Montrer que T admet un unique point fixe $x^* \in X$.*