الفصل الأول: التعرف على الماتلاب

يعتبر برنامج الماتلاب (MATLAB) الأشهر في الأوساط العلمية، إذ أنه يستخدم في العديد من الميادين العلمية والصناعية إلى حد بعيد، وهذا نظرا لسهولته وكفاءته العالية في إعطاء النتائج الدقيقة

1.1. التعرف ببرنامج ماتلاب :

ماتلاب (MATLAB) هو اختصار لـ Matrix Laboratory أي مخبر المصفوفات، حيث نستطيع بواسطته إجراء العمليات التالية: الحسابات العددية والرمزية، تطوير الألغوريتمات وكتابة البرامج، تحليل المعطيات وإظهار النتائج، رسم المخططات العلمية والهندسية، النمذجة والمحاكاة، إرسال واستقبال المعلومات.

1.2. مكونات برنامج ماتلاب

يتألف نظام ماتلاب من خمسة أجزاء وهي:
لغة ماتلاب، بيئة عمل ماتلاب، المخططات، مكتبة التوابع الرياضية لماتلاب، وواجهة برامج التطبيقات لماتلاب.

1.3. مكونات سطح مكتب ماتلاب

عندما نفتح برنامج ماتلاب يظهر على الشاشة سطح المكتب والذي يحتوي على الأدوات التالية

- شريط القوائم Menu Bar
- نافذة الأوامر Command Window
- نافذة تاريخ الأوامر command History window
- نافذة المجلد الحالي Current Directory Window
- نافذة مساحة العمل Workspace window
- مفتاح ابدأ Star

1.4. المتغيرات في ماتلاب

هناك نوعان

أ. المتغيرات العددية: تتكون من حرف واحد أو عدة حروف من A إلى Z ويمكن أن تحتوي أرقاما من 0 إلى 9. وتكون قيمته عددية مثل: X=12 ، ar5=7

ب. المتغيرات الرمزية: تشبه المتغيرات العددية في تركيبها لكن الطرف الأيمن يكون على شكل متغير عددي بين علامتي اقتباس مثل: N='number of student' ، A='Ahmed' ، B='Age' ، C='16' .

في المقابل فإن هذا النوع من المتغيرات لا تكون له قيمة حسابية ما دام موضوعا داخل علامات الاقتباس

1.5. الأوامر في ماتلاب

من بين هاته الأوامر:

- clc : تمسح محتويات نافذة الأوامر

- clear : لمسح محتويات نافذة الأوامر من ساحة العمل
- who : يظهر قائمة بأسماء المتغيرات فقط
- whos : يعطي قائمة بأسماء المتغيرات بالإضافة إلى معلومات حول هذه المتحولات كالحجم وعدد الخانات المحجوزة والنوع.
- disp : تقوم بإظهار النتائج.
- ; : تقوم بمنع ظهور نتيجة التنفيذ.
- Help : نكتب بعدها كل ما نبحث عنه.
- % : تستعمل للتعليق فلا يتم تنفيذ ما بعدها مباشرة

6.1. دوال خاصة في ماتلاب:

يحتوي ماتلاب على مجموعة ضخمة من التوابع الرياضية القياسية مثل: log ، abs ، exp ، sqrt ، tan ، cos sin مع ملاحظة أن جذر العدد السالب أو لوغاريتم العدد السالب ليس خطأ لأنه يعطي القيمة بالشكل العقدي بالإضافة لذلك يوجد مجموعة من التوابع الرياضية المتقدمة تحتوي على توابع، Bessel ، Gamma ومعظم التوابع الموجودة في ماتلاب تقبل المطاميس العقدية أي أنها تتعامل مع الأعداد العقدية.

نذكر الدوال المثلثية الشهيرة ودوالها العكسية:

- الدالة: sin ، دالتها العكسية: asin
- الدالة: cos ، دالتها العكسية: acos

- الدالة tan ، دالتها العكسية ، atan
- الدالة cot ، دالتها العكسية ، acot
- الدالة sec ، دالتها العكسية ، asec
- الدالة csc ، دالتها العكسية ، acsc

كما نذكر أيضا الدوال المثلثية الزائدية ودوالها العكسية
- الدالة sinh ، دالتها العكسية : asinh
- الدالة cosh ، دالتها العكسية : acosh
- الدالة tanh ، دالتها العكسية : atanh
- الدالة coth ، دالتها العكسية : acoth
- الدالة sech ، دالتها العكسية : asech
- الدالة csch ، دالتها العكسية : acsch

ولدينا مجموعة دوال بسيطة أخرى كثيرا ما نتعامل معها
منها : sqrt : الجذر التربيعي ، abs : القيمة المطلقة ،
exp : الدالة الأسية ، log : الدالة اللوغاريتمية النيبرية ،
log10 : اللوغاريتم العشري ، fix : تدوير باتجاه الصفر ،
floor : التدوير نحو $-\infty$ ، ceil : التدوير نحو $+\infty$
round : التدوير باتجاه أقرب عدد صحيح ،
sign : إشارة عدد ، real : الجزء الحقيقي ، imag :
الجزء التخيلي ، angle : عمدة عدد مركب ، conj ،
مرافق عدد مركب .....

الفصل الثاني: التكامل العددي

نريد إيجاد قيمة تقريبية للتكامل $I=\int_a^b f(x)dx$ حيث f تابع عددي معرف على المجال $[a,b]$

لنعتبر التقسيم المنتظم للمجال $[a,b]$ بالنقط: x_0، x_1، x_2، ...... x_n متساوية البعد بحيث

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_i=x_0+ih \quad i=\overline{0,n} \;/ n\in\mathbb{N} \\ x_n=b \end{cases}$$ مع h الخطوة

مع العلم أن f معلومة القيمة عند كل x_i $0\leq i\leq n$

نقترح في هذا الفصل طريقتين عدديتين

2.1. طريقة شبه المنحرف

2.1.1. طريقة شبه المنحرف البسيطة

نعتبر $n=1$ فيكون لدينا $x_0=a$، $x_1=b$ و $h=b-a$

هذه الطريقة تعتمد على تقريب التابع f بكثير حدود من الدرجة الأولى بيانه يمر بالنقطتين $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$

وبالتالي يكون I مقربا إلى مساحة شبه المنحرف $ABCD$ حيث $A(a,0)$، $B(b,0)$، $C(b,f(b))$، $D(a,f(a))$

وعندئذ نكتب

$$I\simeq\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

وبالتالي:

$$I\simeq\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

وهذه الصيغة تدعى صيغة شبه المنحرف البسيطة

2.1.2. طريقة شبه المنحرف المركبة

الهدف من هاته الطريقة هو تقليل الخطأ المرتكب في طريقة شبه المنحرف البسيطة حيث نكتب

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

ونطبق طريقة شبه المنحرف البسيطة على كل تكامل فنجد :

$$\boxed{I \simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i) + f(b)\right]}$$

وهذه الصيغة تسمى صيغة شبه المنحرف المركبة

مثال تطبيقي

لنعتبر التكامل

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. أوجد القيمة المضبوطة لـ I

2. أوجد قيمة تقريبية لـ I باستعمال صيغة شبه المنحرف المركبة مع أخذ الخطوة $h = 0{,}1$ وأخذ النتائج بأربع أرقام بعد الفاصلة

3. استنتج قيمة تقريبية لـ $\ln 2$

الحل:

1. إيجاد القيمة المضبوطة لـ I

لدينا،
$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$
$$= \ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2. إيجاد قيمة تقريبية لـ I بصيغة شبه المنحرف المركبة مع اعتبار الخطوة $h=0,1$

لنسمي $f(x) = \frac{1}{1+x}$ نكتب

$$I \simeq \frac{h}{2}\left[f(0) + 2\sum_{i=1}^{i=9} f(0,i) + f(1)\right]$$
$$= \frac{0,1}{2}\left[1 + 2\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,8} + \frac{1}{1,9}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$= 0,05\left[1 + 2(0,9090 + 0,8333 + 0,7692 + 0,7142 + 0,6666 + 0,6250 + 0,5882 + 0,5555 + 0,5263) + 0,5\right]$$
$$= 0,6937$$

ومنه $I \simeq 0,6937$

3. استنتاج قيمة تقريبية لـ $\ln 2$

واضح من الإجابة على السؤالين 1 و 2 يمكننا استنتاج أنّ: $\ln 2 \simeq 0,6937$

2.2. طريقة سيمسون

2.2.1. طريقة "سيمسون البسيطة

نعتبر $n=2$ فيكون لدينا، $x_0=a$ ، $x_1=\frac{a+b}{2}$ ، $x_2=b$

مع $h=\frac{b-a}{2}$

في هذه الطريقة نقرب التابع f بكثير حدود من الدرجة الثانية بيانه يمر بالنقط $(a, f(a))$ ، $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ و $(b, f(b))$ عندئذ يكون تقريب التكامل I كما يلي

$$I \simeq \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

ومنه:

$$\boxed{I \simeq \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

وهذه الصيغة تسمى صيغة سيمسون البسيطة

2.2.2. طريقة سيمسون المركبة:

الهدف من هاته الطريقة هو تقليل الخطأ المرتكب في طريقة سيمسون البسيطة وباعتبار n عدد زوجي

نكتب

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\cdots\cdots+\int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

ونطبق طريقة سيمسون البسيطة على كل تكامل فنجد

$$I \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{i=\frac{n-2}{2}} f(x_{2i+1}) + f(b)\right]$$

وهذه الصيغة تسمى صيغة سيمبسون المركبة.

مثال تطبيقي:

نطبق صيغة سيمبسون المركبة على التكامل السابق

$$I \simeq \frac{h}{3}\Big[f(0) + 4\big(f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)\big) + 2\big(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8)\big) + f(1)\Big]$$

$$= \frac{0,1}{3}\left[1 + 4\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9}\right) + 2\left(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{0,1}{3}\Big[1,5 + 4(0,9090 + 0,7692 + 0,6666 + 0,5882 + 0,5263) + 2(0,8333 + 0,7142 + 0,6250 + 0,5555)\Big]$$

$$= \frac{0,1}{3}\left[1,5 + 13,8372 + 5,4560\right]$$

ومنه $I \simeq 0,6931$

نعلم أن مدور $\ln 2$ إلى 10^{-4} هو $0,6931$ وبالتالي فإن صيغة سيمبسون المركبة أفضل من صيغة شبه المنحرف المركبة