

Chapitre 3 : DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides *en mouvement*. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

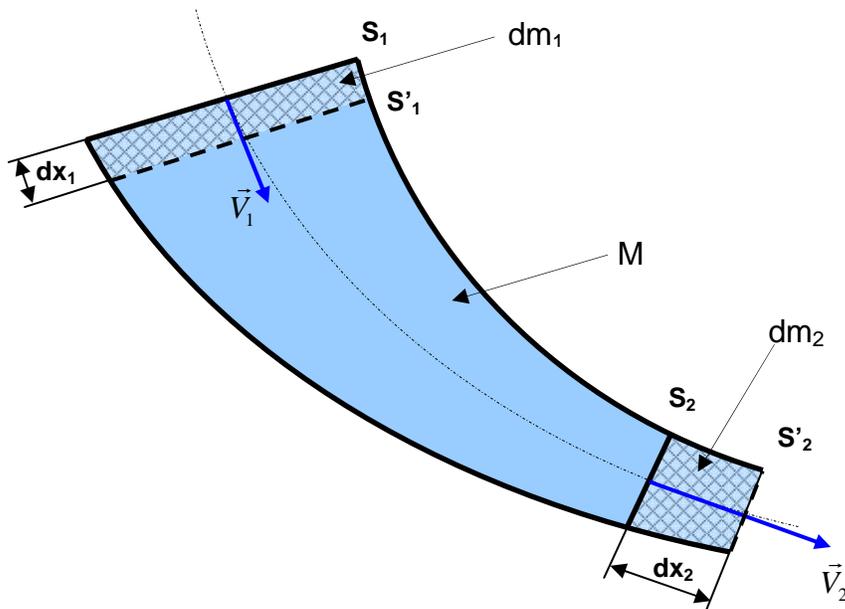
- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

2 ECOULEMENT PERMANENT

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace. L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

3 EQUATION DE CONTINUITE

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,
- \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 ,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1+ M)$

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M+ dm_2)$.

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$$dm_1 = dm_2 \text{ Donc } \rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2 \text{ ou encore } \rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2,$$

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2} \quad (1)$$

4 NOTION DE DEBIT

4.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$\boxed{q_m = \frac{dm}{dt}}$$

où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s)

en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \quad (2)$$

avec :

$$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \|\vec{V}_1\| : \text{Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers } S_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \|\vec{V}_2\| : \text{Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers } S_2$$

D'après (2) :

$$q_m = \rho \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho \cdot S_2 \cdot V_2$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (3)$$

où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m³)

S : Section de la veine fluide en (m²)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

4.2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,

- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation (3) et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$ on peut écrire également que

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} \text{ soit}$$

$$q_v = S \cdot V$$

4.3 Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$q_m = \rho \cdot q_v$$

5 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT SANS ECHANGE DE TRAVAIL

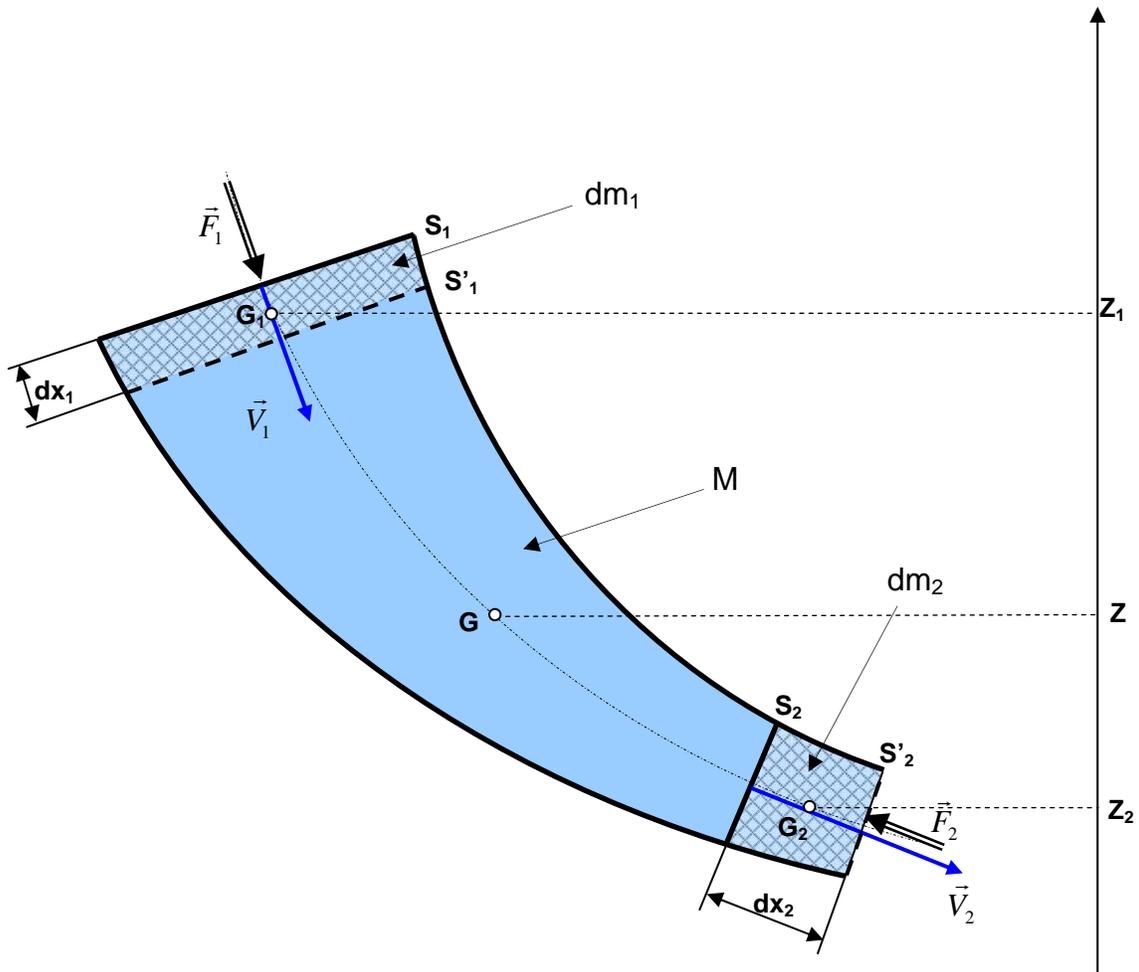
Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe \vec{Z} vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .



A l'instant t le fluide de masse ($dm_1 + M$) est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie

$$\text{mécanique est : } E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse ($M+dm_2$) est compris entre S'_1 et S'_2 . Son

$$\text{énergie mécanique est : } E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm \cdot V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{\text{Forces de pression}} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 \Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2$$

$$\text{en simplifiant on obtient : } dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0} \quad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg)

D'après la relation (4) on peut alors écrire :

$$\boxed{\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g \cdot z_1}$$

6 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT AVEC ECHANGE DE TRAVAIL

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2 . Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$$

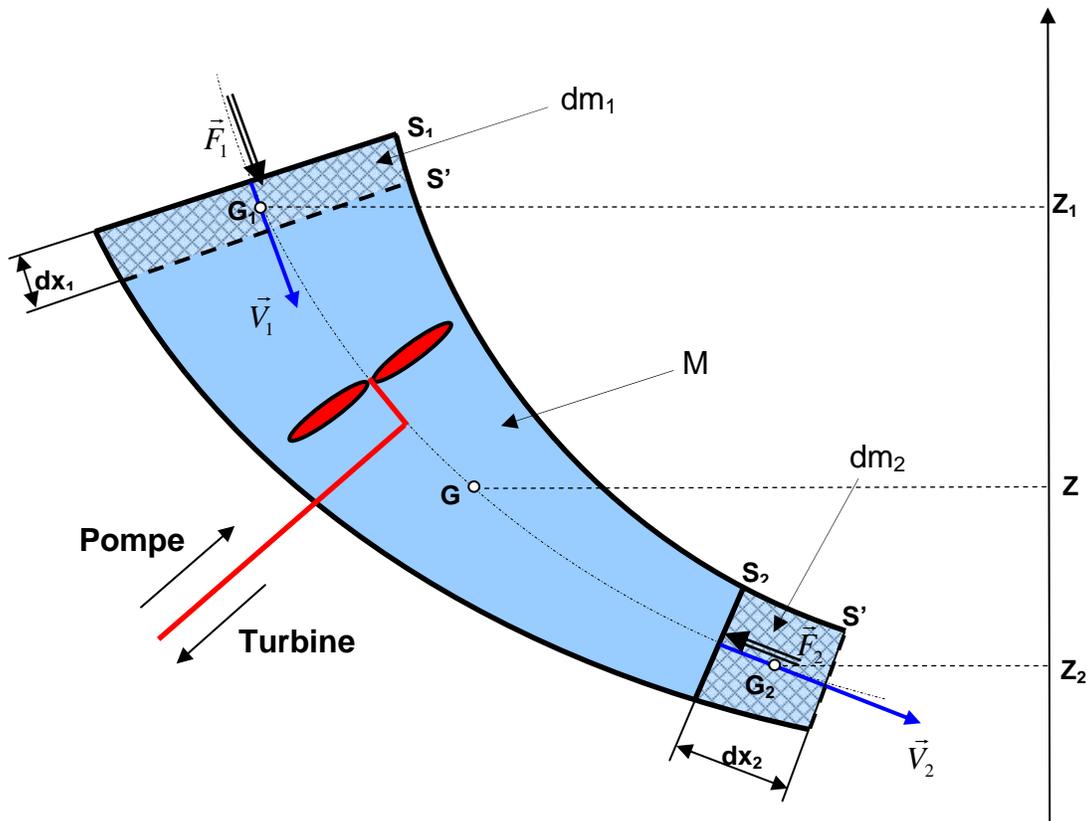
- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$$

Entre les instant t et $t'=(t+dt)$, le fluide a échangé un travail net $W_{net} = P_{net} \cdot dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$



A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm \cdot V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. », en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$$E'_{mec} - E_{mec} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt$$

$$E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + P_{net} \cdot dt \text{ en simplifiant on aura :}$$

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2 + P_{net} \cdot dt \text{ Par conservation}$$

de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

on aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}} \quad (5)$$

7 THEOREME D'EULER :

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} ; \text{ avec } \vec{P} = m\vec{V}_G : \text{ quantité de mouvement.}$$

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

Enoncé

La résultante ($\sum \vec{F}_{ext}$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse \vec{V}_1 et sort par S_2 à une vitesse \vec{V}_2 .

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}$$

Résumé

* Relation Fondamentale de Hydrostatique : $P = P_0 + \int \rho g \cdot h$

* Equation de Continuité : Par Conservation de la masse :

$$S_1 \bar{V}_1 = S_2 \bar{V}_2$$

* Débit massique : $q_m = \frac{dm}{dt}$ en $\frac{kg}{h}$ ou $\frac{kg}{s}$

* Débit volumique : $q_v = \frac{dV}{dt}$ en $\frac{m^3}{h}$ ou $\frac{Litres}{s}$

* Relation entre q_m et q_v : $q_m = \rho q_v$

* THEOREME DE BERNOULLI : Cas d'un écoulement sans échange de Travail :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0$$

* THEOREME DE BERNOULLI : Cas d'un écoulement avec échange de Travail :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \frac{P_{net}}{q_m} = \frac{P_g}{s}$$

* Cas d'une Pompe le rendement :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$$

Puissance absorbée

* Cas d'une Turbine le rendement :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$$