حل السلسلة الأولى

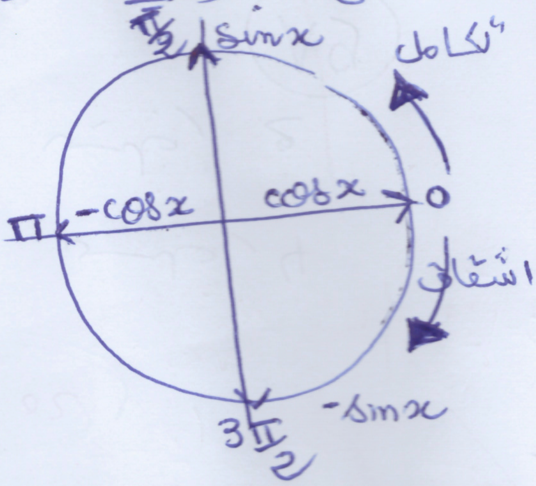
(الحركيات)

- التمرين ① :

$$r(t) = 3\cos(2t)\vec{i} + 3\sin(2t)\vec{j} + (8t-4)\vec{k}.$$

① شعاع السرعة : $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$



$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \\ z = (8t-4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \\ \dot{y} = \\ \dot{z} = \end{cases}$$

$$f(t) = \cos g(t) \Rightarrow g' \cos'(gt) = f'(t)$$

شعاع التسارع = $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -6\sin 2t \\ \dot{y} = 6\cos 2t \\ \dot{z} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -12\cos 2t \\ \ddot{y} = -12\sin 2t \\ \ddot{z} = 0. \end{cases}$$

$$\vec{v} = -6\sin 2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{a} = -12\cos 2t\,\vec{i} - 12\sin 2t\,\vec{j} + 0$$

② طول المسار:

$$t = 1s \Rightarrow r_{t_1} = 3\cos 2\,\vec{i} + 3\sin 2\,\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$t = 4s \quad r_{t_2} = 3\cos 8\,\vec{i} + 3\sin 8\,\vec{j} + 26\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

طبيعة الحركة =

إيجاد معادلة :

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \\ z = 8t-4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9\cos^2 2t \\ y^2 = 9\sin^2 2t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9(\sin^2 2t + \cos^2 2t)$$

حيث :

في المستوى (xoy) المسار عبارة عن دائرة نصفها R.

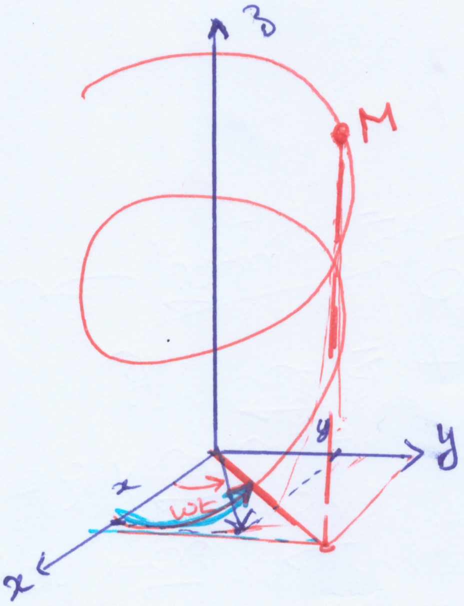
ومركزها $C: (0,0)$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$z = 8t-4$$

و انسحابية ووفق المحور z ، $z=8t-4$ حركة متغيرة

فالمسار الكلي اسطواني أولوليني. وفق $\vec{Oz}$



تمرين ②:

$$\vec{A}=2\vec{i}+3\vec{j}$$

تحويل الى الاحداثيات القطبية: (r,θ)

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{3}{2}$$

$$\vec{OM}=\sqrt{13}\,\vec{u_\theta}$$

تمرين 03:

$r=2a\cos\theta$

$\theta=\omega t$

شعاع الموضع:

$$\vec{OM}=r\vec{u_r}$$

$$\vec{r}=\vec{OM}=2a\cos\omega t\,\vec{u_r}$$

- الجاذبية:

$$\vec{v}=v_r\vec{u_r}+v_\theta\vec{u_\theta}=\dot{r}\vec{u_r}+r\dot{\theta}\vec{u_\theta}=-2a\omega\sin\omega t\vec{u_r}+2a\cos\omega t\vec{u_\theta}$$

$$\vec{v}=\sqrt{(2a\omega)^2\sin^2\omega t+(2a\omega)^2\cos^2\omega t}=2a\omega$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{u_r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

$$\begin{cases} \dot{r}=-2a\omega\sin\omega t \\ \ddot{r}=-2a\omega^2\cos\omega t \\ \dot{\theta}=\omega \\ \ddot{\theta}=0 \end{cases}$$

$$=(-2a\omega^2\cos\omega t-2a\omega^2\cos\omega t)\vec{u_r}$$

$$+$$

$$(2(-2a\omega\sin\omega t)\cdot\omega)\vec{u_\theta}$$

$$=-4a\omega^2\cos\omega t\,\vec{u_r}-4a\omega^2\sin\omega t$$

$$a=4a\omega^2$$

ملاحظة: $\vec{OM}\in(xoy)$

$$\vec{u_r}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{OM}=2a\cos\omega t(\cos\omega t\vec{i}+\sin\omega t\vec{j})=2a\cos^2\omega t\,\vec{i}+2a\cos\omega t\sin\omega t\,\vec{j}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{OM}}{dt}=2a\cdot2\cdot\cos\omega t\cdot(-\omega\sin\omega t)\vec{i}+[2a\cos\omega t\cos\omega t\cdot(\omega)+$$

$$(2a\omega\sin\omega t\cdot\sin\omega t)]\vec{j}$$

$$=4a\omega\cos\omega t\sin\omega t\,\vec{i}+2a\omega[\cos^2\omega t-\sin^2\omega t]\vec{j}$$

$\vec{v} = \cancel{4}\, a\omega \cdot \frac{\sin 2\omega t}{\cancel{2}}\, \vec{i} + 2a\omega \cos 2\omega t\, \vec{j}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(2a\omega)^2 (\sin^2 2\omega t + \cos^2 2\omega t)}$

$|v| = 2a\omega$.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4 \cdot a \cdot \omega^2 \cos 2\omega t\, \vec{i} - 4a\omega^2 \sin 2\omega t\, \vec{j}$

$a = 4a\omega^2$

النتيجة: تختلف القيم الشعاعية لسرعة، التسارع لكن تبقى لها نفس القيمة مهما اختلف المعالم الدراسة.

التمرين 4: $\vec{OM} = 3\cos 2t\, \vec{i} + 3\sin 2t\, \vec{j} + (8t-4)\vec{j}$

معادلة المسار: لولبي (في السابق)

الاحداثيات الاسطوانية:

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \\ z = 8t-4 \end{cases}$$

$\vec{OM} = \rho \vec{u_\rho} + z\vec{k}$.

$\vec{OM} = 3\vec{u_\rho} + (8t-4)\vec{k}$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3^2\cos^2 2t + 3^2 \sin^2 2t} \\ \rho = 3 \\ \theta = 2t \\ \theta = \cancel{\arctan \frac{3\sin 2t}{3\cos 2t}} \end{cases}$$

$\cancel{\theta = \arctan 1}$

$\cancel{\theta = \frac{\pi}{4}}$

$\vec{v} = \cancel{\dot{\rho}\vec{u_\rho}} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{k}$

$= 3 \cdot 2 \cdot \vec{u_\theta} + 8\vec{k} = 6\vec{u_\theta} + 8\vec{k}$

$v = \sqrt{6^2 + 8^2}$ m/s.

$\vec{a} = -3 \cdot 4\vec{u_r} = -12\vec{u_\rho}$ $\quad a = 12$ m/s²

تمرين 5 :

$$x = a\left(\frac{t^3}{3} + t\right)$$

$$y = a\left(\frac{t^3}{3} - t\right)$$

$$z = at^2.$$

$\vec{v}$

$\vec{a}$.

$\vec{v}, \vec{ox}$.

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}. \quad 1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t^2+1) \\ \dot{y} = a(t^2 - 1) \\ \dot{z} = 2a\cdot t \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\left(a(t^2+1)\right)^2 + \left(a(t^2-1)\right)^2 + (2at)^2}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}.$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = a(2t) \\ \ddot{y} = a(2t) \\ \ddot{z} = 2a. \end{cases}$$

$$a = \sqrt{(a(2t))^2 + (a2t)^2 + (2a)^2}$$

$$\vec{v}.\vec{ox} \Rightarrow \vec{v}.\vec{i} = |v|.|i|.\cos\theta(\vec{v}, \vec{ox}).$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{ox}) = \frac{a(t^2+1)}{\sqrt{(a(t^2+1))^2 + (a(t^2-1))^2 + (2at)^2}}$$