Chapitre 4

Approximation par D.F de problème elliptique

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann.
Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Cas particulier : l'équation de Laplace

Si f = 0, on obtient une équation de Laplace :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

4.1 Introduction du modèle

Le problème modéle est le suivant :

L'équation de Poisson avec le condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x) \quad x \in \Omega \in \mathbb{R}^n \\ \\ u = g \qquad sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

4.2 Problème continu en D1

$$(P_c) \begin{cases} -u^{''}(x) = f(x) \qquad a < x < b \\ \\ u(a) = u(b) = g \end{cases}$$

4.2.1 L'existence et l'unicité de la solution continue

Pour $f \in C^0([0,1])$, $\exists! u \in C^2([0,1])$ (solution classique) de (P_c) (voir [2]).

4.2.2 Principe du maximum continu

Proposition 4.1. *[2]*

Soit $f \in C^0([0,1])$, *et* $u \in C^2([0,1])$ *la solution de* (P_c), *Alors :*

1 $f \geqslant 0 \Rightarrow u \geqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

2 $f \leqslant 0 \Rightarrow u \leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

3 $f = 0$ *alors :* $\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u$

4 $f \geqslant 0$ *et* $\inf_{\partial\Omega} u \geqslant 0$ *Alors* $u \geqslant 0$ *dans* Ω

4.3 Problème discret en D1

On discrétise l'intervalle continue $[a, b]$, en un nombre finie des points x_i :

Déscrétisation uniforme

$x_i - x_{i-1} = h = x_{i+1} - x_i \quad (h$: le pas de discrétisation)

En utilisant le différence finie centrée, le problème approché (P_h) s'écrit dans ce cas de la façon suivant :

Trouver les u_i tel que :

$$(P_h)\begin{cases} -\frac{u_{i+1-2u_i+u_{i-1}}}{h^2} = f_i \qquad i = 1...N \\ u_0 = u_{N+1} = g \end{cases}$$

$\Omega_h = \left\{ x_i = ih; \quad 1 \leq i \leq N \right\}$

on peut écrire le système précédent sous forme matricielle, où les inconnues sont regroupes dans le vecteur $u_h = (u_1, u_2...u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ qui vérifie :

$$A_h U_h = b$$

A_h matrice de taille $N \times N$ est donnée par :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \\ \vdots \\ \\ f_N \end{pmatrix}$$

A_h : matrice carrée tridiagonale.

Proposition 4.2. *[4]*

Pour que le problème (P_h) admet une solution discrète unique il faut et il suffit que la matrice A_h soit symétrique et définie positive.

L'existence et l'unicité de la solution discrète du problème (P_h)

1- **La matrice A_h est symétrique :**

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} = A_h^t$$

A_h est symétrique car $A_h^t = A_h$ (clair)

2- **La matrice $A_h$est définie positive :**

$\forall X \in \mathbb{R}^N \quad X^t A_h X > 0$

On pose N=5

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3 - x_4, -x_3 + 2x_4 - x_5, -x_4 + x_5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + (-x_2 + 2x_3 - x_4)x_3 + (-x_3 + 2x_4 - x_5)x_4 + (-x_4 + x_5)x_5$

$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 - x_3x_4 - x_3x_4 + 2x_4^2 - x_4x_5 - x_4x_5 + 2x_5^2$

$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2 - 2x_4x_5 + 2x_5^2$

$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_5)^2 + x_1^2 + x_5^2 > 0$

donc A_h est définie positive.

Généralisation :

pour $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$; $X \in \mathbb{R}^N$

$$X^tAX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & \cdots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, \cdots, -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}, \cdots, -x_{N-1} + 2x_N) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_N \end{pmatrix}$$

$= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + \cdots + (-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1})x_i + \cdots + (-x_{N-1} + 2x_N)x_N$

$$= 2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^{N} x_{i+1}^2$$

$$= x_1^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + x_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_{i+1}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i^2 - 2x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_1^2 + x_N^2 > 0$$

Alors $X^tA_hX > 0$ donc A_h défini positive

A_h est symétrique et défini positive, alors d'aprés la proposition (3.3.1) le problème (P_h) admet une solution discrète unique.

4.3.1 Consistance :

Proposition 4.3. *[2]*

(P_h) est consistance par rapport à (P_c) et on a : si $u \in C^4([0,1])$:

$$\|R_hU\|_{h,\infty} \leqslant \frac{1}{12}\|U^{(4)}\|_\infty h^2$$

$$\begin{aligned}\left|-u''(x) + \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}\right| &= \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\theta_1) + u^{(4)}(\theta_2)) \\ \|R_hU\|_{h,\infty} &\leqslant \frac{h^2}{24} \times 2\max(u^{(4)}(\theta_1), u^{(4)}(\theta_2)) \\ &\leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty\end{aligned}$$

Poson : $c = \frac{1}{12}\|u^{(4)}\|_\infty$

Alors : $\|R_hU\|_{h,\infty} \leqslant Ch^2$

Consistance d'ordre 2.

4.3.2 Principe du maximum discret

Proposition 4.4. *[2]*

Une matrice A est monotone si et seulement si :

$$(AX \geqslant 0 \Longrightarrow X \geqslant 0)$$

Proposition 4.5. *[2]*

Si $f \geqslant 0$, alors la solution U_h du problème (P_h) vérifie :

$$U_h \geqslant 0$$

Le monotone de la matrice A_h, nous assure le principe du maximum discret :

$$A_hU_h = b$$

Si $b \geqslant 0 \Longrightarrow A_hU_h \geqslant 0 \Longrightarrow U_h \geqslant 0$

4.3.3 Stabilité

Soient u solution de (P_c) : $LU = f$ dans Ω et U_h solution de (P_h) :$L_hU_h = f$ dans Ω
on a : $LU - L_hU_h = 0$ dans Ω_h
Donc : $LU - L_hU + L_hU - L_hU_h = 0$
d'où : $R_hU + L_h(U - U_h) = 0$
où R_hU est l'erreur de consistance on obtient :

$$R_hU = L_h(U_h - U) \text{ dans } \Omega_h$$

On a : $\|R_h\|_{h,\infty} \leqslant Ch^2$
Si U est suffisamment régulière on veut savoir si $U - U_h$ est petite quad R_h est petite $(h \longrightarrow 0)$ c'est la notion de stabilité.
On va montrer que le problème (P_h) est stable pour la norme discéte du maximun
(la norme de la convergence uniforme).

Proposition 4.6. *[2]*
Si la matrice A_h est monotone, alors la solution U_h du problème (P_h) vérifie :
$A_hU_h = b$ *par conséquent on a :*
$\|U_h\|_{h,\infty} = \|U_h\|_\infty = \|A_h^{-1}b\|_\infty \leqslant \|A_h^{-1}\|\|f\|_\infty$
on a : $\|A_h^{-1}\| \leqslant \frac{1}{8}$
Donc : $\|U_h\|_{h,\infty} \leqslant \frac{1}{8}\|f\|_\infty$

4.3.4 Convergence

Théorème 4.1. *[2]*

Soit $f \in C^2([0,1])$

on note U *la solution de* (P_c) *et* U_h *la solution de* (P_h). *Alors il existe une constante* $C > 0$ *indépendant de* h *telle que :*

$$\|U - U_h\|_{h,\infty} \leqslant C\|f^{(2)}\|_\infty h^2$$

Remarque 4.1.

En particulièr, la matrice de discrétisation de $(-u^{''})$ *avec conditions aux limites de Newman homogènes :*

$$\begin{cases} -u^{''}(x) = f(x) \quad a < x < b \\ \\ \quad u^{'}(a) = u^{'}(b) = 0 \end{cases}$$

donne une matrice A_h *qui est symétrique et positive, mais non définie, d'où l'unicité n'est pas vérifiée.*

4.4 Problème continu en D2

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,on considère le problème continu suivant :

Trouver $u(x, y)$ qui vérifie :

$$(P_c) \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \quad u = g \quad\quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où f est une fonction donnée régulière dans Ω.

Le problème (P_c) admet une solution exacte unique.

On considère :

- un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (rectangulaire)
- une fonction $f \in C^1(\Omega)$ et une fonction $g \in (\partial\Omega)$.

4.4.1 L'existence et l'unicité de la solution continue

Théorème 4.2. *[8]*
Pour $f \in C^1(\Omega)$ *le problème* (P_c)*. Admet une solution unique* u *régulière .*

4.4.2 Principe du maximum continu

Proposition 4.7. *[6]*
Soit $f \in C^0([0,1])$*, et* $u \in C^2([0,1])$ *la solution de* (P_c)*, Alors :*

1 $f \geqslant 0 \Rightarrow u \geqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

2 $f \leqslant 0 \Rightarrow u \leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

3 $f = 0$ *alors :* $\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u$

4 $f \geqslant 0$ *et* $\inf_{\partial\Omega} u \geqslant 0$ *Alors* $u \geqslant 0$ *dans* Ω

4.5 Problème discret en D2

Un schéma à 5 points pour le Laplacien :
choisissant : $\Omega =]0,a[\times]0,b[$
pas discrétisation : $\Delta x = \dfrac{a}{N+1}$; $\Delta y = \dfrac{b}{M+1}$
tel que : $x_i = i\Delta x, \quad i = 0...N+1$

$y_j = j\Delta y, \quad j = 0...M+1$

on défini Ω_h le maillage intérieur à Ω par :

$$\Omega_h = \Big\{P_{i,j} = (x_i, y_j) \qquad , i = 1...N, j = 1...M\Big\}$$
$$\partial\Omega_h = \Big\{P_{i,j} = (x_i, y_j) \qquad , avec \quad i = 0\, ou\, N+1, j = 0\, ou\, M+1\Big\}$$

Le problème approché (discret)

S'écrit alors : trouve $u_h = u_h(x_i, y_j)$ tell que :

$$(P_h)\begin{cases} -\Delta_h u_h = f(x_i, y_j) \qquad dans \quad \Omega \\ \\ u_h = 0 \qquad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Δ_h est le schéma de différence finie pour Δ :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

Notre problème devient :

$$\frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j)$$

pour $1 \leq i \leq N\,;\, 1 \leq j \leq M$

avec le conditions aux limites :

$u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0\,;\, 0 \leq j \leq M+1$

$u_{i,0} = u_{i,M+1} = 0\,;\, 0 \leq i \leq N+1$

Le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{N\times M}; b \in \mathbb{R}^{N\times M}$

$u_h = (u_{1,1}, u_{2,1}, \cdots, u_{N,1}, u_{N,2}, \cdots, u_{N,M})^t$

$b = (f(x_1, y_1), \cdots, f(x_N, y_M))^t$

où $u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$

La matrice A_h est une matrice de taille $NM \times NM$ tridiagonale par blocs.

Donnons défini la forme de la matrice ce A_h (pour simplifier) dans le cas

d'un maillage uniforme :

où $\Delta x = \Delta y = h$ on a :

$\frac{1}{h^2}(4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = f_{i,j}$

$j = 1, \quad i = 1 \cdots N$

$$\begin{cases} i = 1 & \frac{1}{h^2}(4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0}) = f_{1,1} \\ i = 2 & \frac{1}{h^2}(4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0}) = f_{2,1} \\ \vdots & \\ i = N & \frac{1}{h^2}(4u_{N,1} - u_{N+1,1} - u_{N-1,1} - u_{N,2} - u_{N,0}) = f_{N,1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} D_N & -I_N & & & \\ -I_N & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -I_N \\ & & & -I_N & D_N \end{pmatrix}$$

I_N : la matrice identité de taille $N \times N$

D_N : matrice carrée $(N \times N)$ donnée par :

$$D_N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad I_N = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice tridiagonale par blocs,puisque la matrice D_N est une matrice symétrique définie positive donc inversible.alors la matrice A_h est inversible donc le système $A_h u_h = b$ admet une solution unique.

4.5.1 Consistence

Pour $u \in C^4(\Omega)$ on obtient au point $P_{i,j} = (x_i, y_j) \in \Omega_h$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta x^2}{24}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y_j)\Big]$$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta y^2}{24}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_4)\Big]$$

$x_i \leq \theta_1 \leq x_{i+1}, x_{i-1} \leq \theta_2 \leq x_i, y_j \leq \theta_3 \leq y_{j+1}, y_{j-1} \leq \theta_4 \leq y_j$
on a : $R_h u = \Delta u(x_i, y_j) - \Delta_h u(x_i, y_j)$
donc $\| R_h u \|_{h,\infty} \leq \frac{h^2}{6} M_4(u)$
où $M_4(u) = max\Big(\Big\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big\|_\infty, \Big\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big\|_\infty\Big)$
L'erreur de consistence est donc d'ordre 2.

4.5.2 Stabilité

Proposition 4.8. *[6]*
A_h est un matrice symétrique définie positive et de plus monotone alors :
$A_h^{-1} \geq 0$ *et* $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2)$
donc

$$A_h u_h = b \Rightarrow u_h = A_h^{-1} b$$

$$\begin{aligned}\|u_h\|_\infty &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|b\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2)\|f\|_\infty\end{aligned}$$

4.5.3 Convergence

On note u la solution de (P_c) ($u \in C^4(\Omega)$) et u_h la solution de (P_h).Il existe une constante $C > 0$ indépendante de la tellque :

$$\|u - u_h\|_{h,\infty} \leq C M_4(u) h^2$$

avec $M_4(u) = max(\|.\|_\infty, \|.\|_\infty)$ et $C = \dfrac{a^2+b^2}{96}$

Remarque 4.2.

Maillage non uniforme $\Delta x \neq \Delta y$

Notre problème (P_h) devient :

$$\frac{-u_{i+1,j}+2u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{-u_{i,j+1}+2u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y^2}=f(x_i,y_j)$$

pour $1 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq M$

avec les conditions aux limites :

$u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0\,; \quad 0 \leq j \leq M+1$

$u_{i,0} = u_{i,M+1} = 0\,; \quad 0 \leq i \leq N+1$

Le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{N\times M}; b \in \mathbb{R}^{N\times M}$

$u_h = (u_{1,1}, u_{2,1}, \cdots, u_{N,1}, u_{N,2}, \cdots, u_{N,M})^t$

$B = (f(x_1,y_1), \cdots, f(x_N,y_M))^t$

où $u_{i,j} = u_h(x_i,y_j)$

La matrice A_h est une matrice de taille $NM \times NM$ tridiagonale par blocs.

Donnons la forme de la matrice A_h (pour simplifier) dans le cas d'un maillage non uniforme :

où $\Delta x \neq \Delta y$

on pose $\Delta x = h$ et $\Delta y = k$ on a :

$\frac{1}{h^2}(2u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i-1,j})+\frac{1}{k^2}(2u_{i,j}-u_{i,j+1}-u_{i,j-1}) = f_{i,j}$

$j = 1, i = 1 \cdots N$

$$\begin{cases} i=1 & \frac{1}{h^2}(2u_{1,1}-u_{2,1}-u_{0,1})+\frac{1}{k^2}(2u_{1,1}-u_{1,2}-u_{1,0})=f_{1,1} \\ i=2 & \frac{1}{h^2}(2u_{2,1}-u_{3,1}-u_{1,1})+\frac{1}{k^2}(2u_{2,1}-u_{2,2}-u_{2,0})=f_{2,1} \\ \vdots & \\ i=N & \frac{1}{h^2}(2u_{N,1}-u_{N+1,1}-u_{N-1,1})+\frac{1}{k^2}(2u_{N,1}-u_{N,2}-u_{N,0})=f_{N,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i=1 & (\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2})u_{1,1}-\frac{1}{h^2}u_{2,1}-\frac{1}{h^2}u_{0,1}-\frac{1}{k^2}u_{1,2}-\frac{1}{k^2}u_{1,0}=f_{1,1} \\ i=2 & (\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2})u_{2,1}-\frac{1}{h^2}u_{3,1}-\frac{1}{h^2}u_{1,1}-\frac{1}{k^2}u_{2,2}-\frac{1}{k^2}u_{2,0}=f_{2,1} \\ \vdots & \\ i=N & (\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2})u_{N,1}-\frac{1}{h^2}u_{N+1,1}-\frac{1}{h^2}u_{N-1,1}-\frac{1}{k^2}u_{N,2}-\frac{1}{k^2}u_{N,0}=f_{N,1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} D_N & -I_N & & & \\ -I_N & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -I_N \\ & & & -I_N & D_N \end{pmatrix}$$

I_N : la matrice identité de taille $N\times N$

D_N : matrice carrée $(N\times N)$ donnée par :

$$D_N=\begin{pmatrix} \frac{2h^2}{k^2}+2 & -\frac{h^2}{k^2} & & & \\ -\frac{h^2}{k^2} & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -\frac{h^2}{k^2} \\ & & & -\frac{h^2}{k^2} & \frac{2h^2}{k^2}+2 \end{pmatrix} \qquad I_N=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice tridiagonale par blocs, puisque la matrice D_N est une matrice symétrique définie positive donc inversible. alors la matrice A_h est inversible donc le systéme $A_h u_h = b$ admet une solution unique.

4.6 *Applications*

Pour montrer l'analogie entre le problème continue et son analogie discret, on va donner deux applications, la première application concerne un problème mal posé au cas continue ou on va avoire la même résultat au cas discret.
La deuxième concerne la résolution numérique de l'équation de Poisson en dimension deux, en appliquant le schéma à 5 points.

4.6.1 Première application

Soit le problème (P) :

$$(P)\begin{cases} -u'' = 1 & \text{dans }]0,1[\\ \quad u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) (P) est mal posé.

$-u'' = 1 \Longrightarrow u'' = -1 \Longrightarrow u' = -x + c_1 \Longrightarrow u = \dfrac{-x^2}{2} + c_1 x + c_2$

$u'(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

$u'(1) = 0 \Longrightarrow -1 + c_1 = 0 \Longrightarrow c_1 = 1$

donc le problème (P) dmet une infini de solution.

donc le problème (P) mal posé.

On va montre que le problème (P_h) est aussi mal posé numériquement.

$$(P_h)\begin{cases} -\Big(\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\Big) = 1 & \text{dans }]0,1[\\ \quad u'(0) = u'(N+1) = 0 \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq 4$

avec le condition aux limites :

Nous utilisons :

2) $u'_i = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} \Longrightarrow u'_0 = \dfrac{u_1 - u_0}{h} = 0 \Longrightarrow (u_1 - u_0)4 = 0 \Longrightarrow u_0 = u_1$

3) $u'_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h} \Longrightarrow u'_{N+1} = \dfrac{u_N - u_{N-1}}{h} = (u_N - u_{N-1})4 = 0 \Longrightarrow u_3 = u_4$

le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{3\times 3}, b \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$u_h = (u_1, u_2, u_3)^t$

$b = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$

où $u_i = u(x_i)$

4) $-(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) = h^2 \Longrightarrow -(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) = \dfrac{1}{16}$

la forme matricielle :

$1 \leq i \leq N$

$$\begin{cases} i=1 & -u_2 - u_0 + 2u_1 = \frac{1}{16} \\ i=2 & -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i=3 & -u_4 - u_2 + 2u_3 = \frac{1}{16} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i=1 & -u_2 - u_1 + 2u_1 = \frac{1}{16} \\ i=2 & -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i=3 & -u_3 - u_2 + 2u_3 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textbf{le système linéaire :} \\ A_h U_h = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Existence et unicité

Pour que le problème P_h admet une solution

1 A_h symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_h^t$$

donc A_h symétrique

2 A_h n'est pas définie car :

$$X^t AX = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0$$

pour $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$: $X^t AX = 0$

Donc : la matrice A_h est symétrique et positive mais non définie.

Alors : d'aprés la proposition (3.3.1) le problème P_h n'admet pas une solution discréte unique d'où : le problème (P_h) est aussi mal posé.

4.7 Deuxième application

Soit l'équation de Laplace en D2 avec les conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 9 \\ u(x,1) = x\,;\, u(1,y) = y \\ u(0,y) = u(y,0) = 0 \end{cases}$$

Choisissant $n = m = 3$ et $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$

1 **La matrice de discrétisation :**

Notre problème devient :

$$-\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta y^2} = 9$$

$u_{i,m+1} = i$, $u_{n+1,j} = j \quad 0 \leq i \leq n$

$u_{0,j} = u_{j,0} = 0 \quad 0 \leq j \leq m$

on a $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$ et $m = n = 3$ où $\Delta x = h$ et $\Delta y = k$

$$\Omega_{h,k} = \begin{Bmatrix} x_i = ih & 0 \leq i \leq 3 \\ y_i = jk & 0 \leq j \leq 3 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} = 9\Delta x^2$

$\Rightarrow -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} = 1$

La forme matricielle :

$$\begin{cases} i=1,\ j=1 & -u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} + 4u_{1,1} = 1 \\ i=1,\ j=2 & -u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,3} - u_{1,1} + 4u_{1,2} = 1 \\ i=2,\ j=1 & -u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} + 4u_{2,1} = 1 \\ i=2,\ j=2 & -u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,3} - u_{2,1} + 4u_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} = 1 \\ -u_{2,2} - u_{1,1} + 4u_{1,2} = 1 \\ -u_{1,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} = 1 \\ -u_{1,2} - u_{2,1} + 4u_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Le système linéaire :

$$A_h u_h = b.$$

Où

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'existence et unicité de la solution discrète du $(P_h$:

1) La matrice A_h est symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = A_h^t$$

Donc A_h symétrique car : $A_h^t = A_h$

2) La matrice A_h est définie positive :

$\forall X \in \mathbb{R}^N \qquad X^t A_h X > 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$

Donc A_h est défini positive, alors (P_h) admet la solution unique.

Exercices

Exercice 1

Soit le problème (P) pour une fonction $u(x)$ définie sur un intervalle $[0,4]$:

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = f(x) \quad x \in]0,4[\\ u(0) = \alpha \\ u(4) = \beta \end{cases}$$

où $c \geq 0, f \in C([0,4],\mathrm{R})$ et la fonction u de classe C^4.

1. Exprimer le problème discret (P_h) associé à (P),en utilisant le schéma aux différences finies centrées.

   On supposera que le maillage est uniforme et de pas $\triangle x = h = 1$.

2. Mettre(P_h) sous forme matricielle :

   $$AU_h = b$$

   .

   Déterminer la matrice A et les vecteurs : U_h, b

3. Montrer que le problème (P_h), admet une solution unique.

Chapitre 5

Approximation par D.F de problème parabolique

5.1 Le problème continu D1

Soit le problème parabolique en dimension un suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in]0,1[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t \in]0,T[\end{cases} \tag{5.0}$$

Remarque 5.1. *(P) est le problème de la chaleur ou : $f = 0$ et $V = 1$, avec les condition homogène ; $Q_T =]0,1[\times]0,T[$*

Théorème 5.1. *Si $u_0 \in C(]0,1[,R)$, alors le problème (P) admet une solution unique et $u \in C^2(Q_T, R) \cap C(\bar{Q}_T, R)$.*

Proposition 5.1. *(Principe du maximum)*
Soit u la solution de (P) alors :

1 Si $u_0(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$,alors :
$u(x,t) \geq 0 \qquad (x,t) \in Q_T$

2 $\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(]0,1[)}$

5.1.1 Schéma aux différences finies

On discrétise d'une façon uniforme les intervalles d'espace et du temps :

$$x_i = \Delta h \qquad t = 1, \cdots, M+1$$

$$t^n = n\Delta t \qquad n = 0, \cdots, N$$

$$h = \Delta x = \frac{1}{M+1}; \Delta t = \frac{T}{N}$$

on cherche alors une approximation $U_i^n \backsimeq u(x_i, t^n)$

de la solution exacte aux noueds P_i^n . Un schéma aux différences finies est dit schéma à un pas si u_i^{n+1} ne dépendent que de U_j^n .

Pour la discrétisation du problème (P) on a trois possibilités pour $(\dfrac{\partial u}{\partial t})$:

Schéma centrée : "le plus naturel"

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} : \qquad instable \quad et \quad inutilisable. \tag{5.0}$$

Schéma décentrée (en avant)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} \qquad onobtient, \tag{5.0}$$

Le schéma d'Euler explicite,

explicite : calcule directe de U^{n+1} en fonction de U^n, le plus simple mais stable sous condition.

Schéma décentrée (en arriérer)

$$\frac{u_i^{n} - u_i^{n-1}}{\Delta t} \qquad on \;\; obtient \tag{5.0}$$

le schéma d'Euler implicite,

implicite : on doit passer par un système linéaire pour trouver U^{n+1} en fonction de u^n.

plus compliqué mais toujours stable. On va étudier les deux schémas d'Euler.

5.1.2 Consistance

Proposition 5.2. *Supposons que la solution u du problème (p) est c^2/t et c^4/x.Alors les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espaces, telle que $|R_n u_i^1| \leqslant c((\Delta t) + h^2$.*

5.1.3 Schéma d'Euler explicite

$$(P_h)\begin{cases} -\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad i = 1, ..., M+1 \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \qquad n = 1, ..., N \end{cases}$$

Stabilité

Proposition 5.3. *Sous la condition :*$\dfrac{\Delta}{t} h^2 \leqslant \frac{1}{2}$
le schéma explicite du problème (P_h) *est stable en norme* $\| \bullet \|_\infty$.
la condition $(\dfrac{\Delta}{t} h^2 \leqslant \frac{1}{2})$ *s'appelle condition de C.F.L(Courant, Friedrichs, Lewy, 1928).*

Démonstration. poson : $r = \dfrac{\Delta t}{h^2}$ □

Le problème(P_h)

$$u_i^{n+1} = (1 - 2r)u_i^n + u_{i+1}^n + ru_{i-1}^n$$

le membre à droite de cette équation est une combinaison convexe (car $r \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2r \leqslant 1$)

.

On en déduit :

$$|U_i^{n+1}| = |(1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n + ru_{i-1}^n| \leqslant (1-2r)|u_i^n| + r|u_{i+1}^n| + r|u_{i-1}^n|$$

passant en$\| \bullet \|_\infty$:

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leqslant (1-2r+r+r)\|U^n\|_\infty$$
$$Donc : \|U^{n+1}\|_\infty \leqslant \|U^n\|_\infty.$$

par récurrence on obtient : $\|U^n\|_\infty \leqslant \|U^0\|_\infty$, u^0 : donnée
c'est le principe du maximum discret.

5.1.4 Convergence

Théorème 5.2. *Sous la condition* $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$*, le schéma explicite de*(P_h) *est convergente en norme* $\|_\infty$

Étude matricielle de la stabilité

on a :

$$U_i^{n+1} = (1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n + ru_{i-1}^n$$

on obtient la forme matricielle suivant :

$$U^{n+1} = [I - rA]U^n$$
$$U^{n+1} = CU^n$$

stabilité pour : $\|c\| \leqslant 1$. ou A est la matrice tridiagonale symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.0}$$

les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_K = 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)} \qquad K = 1, ..., M \tag{5.0}$$

$M+1$: le nombre d'intervalles de discrétisation

Poson : $C = I - rA$ les valeurs propres de C sont

$\mu_k = 1 - r\lambda_k$ Au lieu de la norme $\| \bullet \|_\infty$, on va utiliser la norme euclidienne, car :

La norme euclidienne d'une matrice symétrique est égale à son rayon spectral.

Donc :

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\| &\leqslant \|I - rA\|.\|U^n\|_2 \\ &\rho(I - rA).|u^n\|_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho(I - rA) = \max|1 - 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)}|$$

La condition de stabilité

$\|c\| \leqslant 1$ se traduit donc par :

$$\max|1 - 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)}| \leqslant 1$$

d'où :

$$4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)} \leqslant 2$$

alors :

$$r \leqslant \frac{1}{2} : \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

5.1.5 Convergence

Théorème 5.3. *Sous la condition* $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$, *le schéma explicite de* $(P_h) estconvergenteennorme \|_\infty$.

Conclusion

Le schéma d'Euler explicite es simple (pas de système linéaire à résoudre) mais il y a une condition de stabilité à respecter, ce qui limite le pas de tempe pour un pas h donné .

5.2 Schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad i = 1, ..., M+1 \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \qquad n = 1, ..., N \end{cases}$$

ce schéma est dit implicite car le calcule de la solution au pas de temps $(n+1)$ nécessite la résolution d'un système linéaire.

consistance :(fait)

5.2.1 Stabilité du schéma

de la même manière, on a :

$$u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{h^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^n$$

peson : $r = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, on obtient :

$$(1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} - ru_{i-1}^{n+1}) = u_i^n$$

La même analyse matricielle conduit au résultat suivant :

$$[I + rA]U^{n+1} = U^n$$

ou : la matrice d'itération c égale à : $c = (I + \frac{\Delta t}{h^2}A)^{-1}$ ses valeurs propres sont : $\mu_k = \frac{1}{1 + r\lambda_k}$ passant au norme :

$$\|U^{n+1}\|_2 \leqslant \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{h^2}\lambda_k}\|U^n\|_2$$

avec :

$$\lambda_1 = 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)}$$

on a :

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{h^2}\lambda_k} < 1, \forall k,$$

ce qui entraine la stabilité inconditionnelle du schéma implicite.

5.2.2 Convergence

Soit $\exp^{(n)}$ l'erreur de discrétisation, définie par

$$\exp^{(n)} = U^n_{ex} - U^n_{app} \qquad c'estdire$$
$$\exp^{(n)}_i = u(ih, n\exp^{(n)}) - U^n,$$

Théorème 5.4. *Le schéma implicite est convergente (d'ordre 1 en tempe et 2 en espace), tell que :*

$$\| \exp^{n+1} \|_\infty \leqslant \| \exp^0 \|_\infty + TC(\Delta t + h^2),$$

Démonstration. sous condition sur le pas de temps et d'espace. □

Conclusion

Le schéma d'Euler implicite nécessite la résolution d'un système linéaire, mais il es inconditionnellement stable :
Il n'y a pas de restriction sur les pas de temps et d'espace.On peut prendre des pas de tempes assez grands.

5.3 Autres schémas

5.3.1 Schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Big[\dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}\Big] \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \text{donnée : C.I} \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \qquad \forall n \text{ C. au l} \end{cases}$$

5.3.2 θ-Schéma

$(\theta \in [0,1])$

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} = \theta \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + (1-\theta) \times \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \text{donnée : C.I} \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \qquad \forall n \text{ C. au l} \end{cases}$$

Si$(\theta = 0) \Rightarrow t.exp)$

Si$(\theta = 1) \Rightarrow t.imp)$

si$(\theta = \frac{1}{2}) \Rightarrow t.C - N$

Remarque 5.2. *La condition C.F.L se varie selon l'équation étudier.*

Exercices

Exercice 1

Supposons que $u \in C^{2,4}([0,T],[0,1])$ est solution de l'équation de la chaleur.

1. Montrer que l'erreure de consistance pour le schéma explicite est d'ordre 1 en temps et 2 en espace telque :

$$\|R_h u\| \leq C(\triangle t + \triangle x^2)$$

2. Notons que $e^n(u)$ le vecteur de l'erreur au temps t^n, avec : $e_i^n(u) = u_i^n - u(t^n, x_i)$
Supposons que la condition C.F.L est verifiée montrer que :

$$\|e^n(u)\|_\infty \leq CT(\triangle t + \triangle x^2)$$

textbfExercice 2

Etudier la stabilité du schéma de Crank-Niclson pour l'équation de la chaleur.

Exercice 3 (le problème de transport)

Soit le problème (P) pour une fonction $u(t,x)$ définie sur $[0,T] \times [0,L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Et $u(0,x) = u_0(x)$

1. Montrer que le problème (P_h), en différences finies progressive en temps et régressive en espace est stable sous la condition C.F.L.

2. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle.

3. Trouver l'erreure de consistance.

4. Montrer qu'il existe une constante C tel que : $\|e^n\| \leq Cn\triangle t(\triangle t + \triangle x)$.

Exercice 4

On considère l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial u}{\partial t} - (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0.$

sur un domaine $[0, T] \times \Omega$, On suppose que sur la frontière, la fonction vaut : $u(t, x, y) = 0$, avec la condition initiale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

1. Exprimer le schéma explicite .

2. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle.

3. Etudier la stabilité.

Exercice 5

Soit le problème (P)suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \ c > 0 \\ u(x, 0) = 0 \quad x \leq 0 \\ u(x, 0) = 1 \quad x > 0 \end{cases}$$

On suppose que (P) admet une solution unique u suffisamment régulière, pour approcher la solution u de (P), on considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c(\alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \times \triangle x} + \beta \frac{u_{i+2}^n + u_{i-2}^n}{4 \times \Delta x}) = 0,$$

où $x_i = i\triangle x$, $i \in \mathbb{Z}$ et $t^n = n\triangle t$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez α et β pour que le schéma soit d'ordre un en temps et 4 en espace.

2. On pose : $\alpha = 1$ et $\beta = 0$

   Etudier la stabilité du schéma, en utilisant le principe du maximum.

Exercice 6 Soit le problème (P) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\quad a > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

On suppose que (P) admet une solution unique $u \in C^{2,4}([0,T],[0,1])$.

Pour approcher la solution u de (P),on considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\times\triangle x} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad i = 0, ..., M \\ \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad n = 1, ..., N \end{cases}$$

1. Déterminer l'erreure de consistance du schéma .

2. Etudier la stabilité en norme L^∞.

3. Notons que $e^n(u)$ le vecteur de l'erreur au temps t^n, avec : $e_i^n(u) = u_i^n - u(t^n, x_i)$

   Montrer que :

   $$\|e^n(u)\|_\infty \leq C_2(\triangle t + \triangle x^2)$$

4. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle, en déduire la matrice d'itération.