القياس و المكاملة

المستوى : ثالثة رياضيات

حول نظرية فوبيني.

التمرين الأول:

أثبت أن التابع

$$f(x,y)=e^{-y}\sin(2xy)$$

كمول على $[0,1]\times]0,+\infty[$ نسبة إلى قياس لوبيغ و أحسب

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\sin^2(y)\,dy.$$

التمرين الثاني:

ليكن $(\mathbb{N}^2,\mathcal{P}(\mathbb{N}^2),\mu\otimes\mu)$ الفضاء المقاس حيث μ قياس العد على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ و $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{R}$ التابع المعرف كما يلي:

$$f(m,n)=\begin{cases}1,\ m=n;\\ -1,\ m=n+1;\\ 0,\ m\neq n\wedge m\neq n+1.\end{cases}$$

1. أحسب

$$\int_{\mathbb{N}}\Big(\int_{\mathbb{N}}f(m,n)\,d\mu(m)\Big)d\mu(n)\ \wedge\ \int_{\mathbb{N}}\Big(\int_{\mathbb{N}}f(m,n)\,d\mu(n)\Big)d\mu(m)$$

حيث $\mu(m)$ هو قياس العد على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(N))$ بالنسبة للمتغير m و $\mu(n)$ هو قياس العد على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(N))$ بالنسبة للمتغير n.

2. هل $f\in L^1(\mathbb{N}^2,\mu\otimes\mu)$ ؟

حل التمرين الأول:

التابع $|f|$ موجب و هو قيوس لأنه مستمر. إذن حسب نظرية تونلّي:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times]0,+\infty[}|f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^1|e^{-y}\sin(2xy)|\,dx\Big)dy\\ &= \int_0^{+\infty}e^{-y}\Big(\int_0^1|\sin(2xy)|\,dx\Big)dy\\ &\leq \int_0^{+\infty}e^{-y}\Big(\int_0^1\,dx\Big)dy\\ &= \int_0^{+\infty}e^{-y}dy=[-e^{-y}]_0^{+\infty}=1<+\infty\end{aligned}$$

و منه $f\in L^1([0,1]\times]0,+\infty[,\mu)$ حيث μ قياس لوبيغ على $[0,1]\times]0,+\infty[$.

حساب I. بما أنّ f كمول على $[0,1]\times]0,+\infty[$ يمكن تطبيق نظرية فوبيني لنجد

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^1e^{-y}\sin(2xy)\,dx\Big)dy}_{K}=\underbrace{\int_0^1\Big(\int_0^{+\infty}e^{-y}\sin(2xy)\,dy\Big)dx}_{L}.$$

من جهة لدينا

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} e^{-y}\Big(\int_0^1 \sin(2xy)\,dx\Big)dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y}[-\frac{1}{2y}\cos(2xy)]_{x=0}^{x=1}\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}(\frac{1-\cos(2y)}{2})\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\sin^2(y)\,dy\,(=I). \end{aligned}$$

من جهة أخرى، بإستعمال التكامل بالتجزئة مرتين بالنسبة للمتغير y نجد:

$$\forall x\in[0,1]: \quad \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,dy = \frac{2x}{1+4x^2}$$

و منه

$$L = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}[\ln(1+4x^2)]_0^1 = \frac{\ln 5}{4}.$$

إذن

$$I = \frac{\ln 5}{4}.$$

حل التمرين الثاني:

1. من أجل $n\in\mathbb{N}$ مثبت $f(.,n)$ هو تابع من $\mathbb{N}$ في $\mathbb{R}$ و منه (أنظر التمرين الأخير من السلسلة الثالثة):

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} f(m,n) = f(n,n)+f(n+1,n) = 1-1 = 0.$$

إذن

$$\int_{\mathbb{N}}\Big(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(m)\Big)d\mu(n) = 0.$$

من جهة أخرى، من أجل $m\in\mathbb{N}$ مثبت:

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(m,n).$$

لاحظ أنه دوما لدينا $f(m,n)=0$ إلا في حالة $m=n$ و $m=n+1$. إذن إذا كان $m=0$ فإنّ n لا يمكنه أن يأخذ $n=m-1=0-1=-1$ و بالتالي

$$\int_{\mathbb{N}} f(0,n)\,d\mu(n) = f(0,0) = 1$$

و إذا كان $m>0$ فإنّ

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(n) = f(m,m-1)+f(m,m) = -1+1 = 0.$$

إذن

$$\int_{\mathbb{N}}\Big(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(n)\Big)d\mu(m) = \sum_{m\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(n) = 1.$$

2. بما أنّ

$$\int_{\mathbb{N}}\Big(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(m)\Big)d\mu(n) = 0 \neq 1 = \int_{\mathbb{N}}\Big(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(n)\Big)d\mu(m)$$

نستنتج من نظرية فوبيني أنّ $f\notin L^1(\mathbb{N}^2,\mu\otimes\mu)$.