جامعة حمة لخضر - الـــوادي -

كلية العلوم والتكنولوجيا قسم الرياضيات

سنة ثانية رياضيات 2020-2021 مقياس: التحليل العددي 1

حل سلسلة تمارين 2 (التكامل والإشتقاق العددي)

التمرين 1:

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	1	0.92387953	0.70710678	0.38268343	0

- باستعمال طريقة شبه المنحرف $h=\frac{\pi/2-0}{4}=\frac{\pi}{8}$

$$I_T(f)=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_4)+2\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\big)\right]$$
$$=\frac{\pi}{16}[1+0+2(0.92387953+0.70710678+0.38268343)]=0.98711579$$

- باستعمال طريقة سيمسون $h=\frac{\pi/2-0}{4}=\frac{\pi}{8}$

$$I_S(f)=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_4)+4\big(f(x_1)+f(x_3)\big)+2f(x_2)\right]$$
$$=\frac{\pi}{24}[1+0+4(0.92387953+0.38268343)+2\times 0.70710678]=1.0001345$$

- المقارنة بين القيمة الحقيقة و هذه القيم إذا كانت $f(x)=cos(x)$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx=[sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$E_T=|1-0.98711579|=0.01288421 \quad ,E_S=|1-1.0001345|=0.01345$$

نلاحظ ان طريقة سيمسون أعطت نتيجة أدق من طريقة شبه المنحرف.

التمرين 2: نقوم بقياس التسارع γ خلال 80 ثانية الأولى

$x\ (s)$	0	5	10	15	02	25	30
$\gamma\ (m/s^2)$	20	21.63	23.44	25.47	27.75	30.33	33.29

أولا لدينا التسارع γ هو مشتق السرعة V أي أن $\gamma=V'$ أي

$$\int_0^{30} V'(s)ds=\int_0^{30}\gamma(s)ds \Rightarrow V(30)-V(0)=\int_0^{30}\gamma(s)ds$$

حساب السرعة في اللحظة $t=30\ s$ باستعمال طريقة شبه المنحرف: نعتبر $V(0)=0$ و لدينا $h=5$

$$V_T(30)=\int_0^{30}\gamma(s)ds=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_6)+2\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\big)\right]$$

$$=\frac{5}{2}[20+33.29+2(21.63+23.44+25.47+27.75+30.33)]=776.325\ m/s$$

حساب السرعة في اللحظة $t=30\ s$ باستعمال طريقة سيمسون:

$$V_s(30) = \int_0^{30} \gamma(s)ds = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_6) + 2\big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)\big) + 4\big(f(x_2) + f(x_4)\big)\right]$$

$$= \frac{5}{3}[20 + 33.29 + 4(21.63 + 25.47 + 30.33) + 2(23.44 + 27.75)] = 775.65\ m/s.$$

التمرين 3: حساب قيمة التكامل $I = \int_0^{\pi}(\sin x)^2 dx$ باستعمال طريقة شبه المنحرف

1- من أجل $n = 5$ أي $h = \frac{\pi}{5}$

x	0	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$	π
$f(x)$	0	0.3454915028	0.9045084971	0.9045084971	0.3454915028	0

$$I_5(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_5) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\big)\right]$$
$$= \frac{\pi}{10}[0 + 0$$
$$+ 2(0.3454915028 + 0.9045084971 + 0.9045084971 + 0.3454915028)]$$
$$= 1.570796326670$$

2- من أجل $n = 10$. $h = \frac{\pi}{10}$

$$I_{10}(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_{10})$$
$$+ 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9)\big)]$$
$$= \frac{h}{2}\Bigg[f(0) + f(\pi)$$
$$+ 2\Bigg(f\left(\frac{\pi}{10}\right) + f\left(\frac{2\pi}{10}\right) + f\left(\frac{3\pi}{10}\right) + f\left(\frac{4\pi}{10}\right) + f\left(\frac{5\pi}{10}\right) + f\left(\frac{6\pi}{10}\right) + f\left(\frac{7\pi}{10}\right) + f\left(\frac{8\pi}{10}\right)$$
$$+ f\left(\frac{9\pi}{10}\right)\Bigg)\Bigg]$$
$$= \frac{\pi}{20}[0 + 0$$
$$+ 2(0.09549150281 + 0.3454915028 + 0.65450849719 + 0.9045084971 + 1$$
$$+ 0.9045084971 + 0.65450849719 + 0.3454915028 + 0.09549150281)]$$
$$= 1.57079632673$$

3- حساب القيمة الحقيقية للتكامل

$$I = \int_0^{\pi}(\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi}\frac{\cos(2x) + 1}{2}dx = \left[\frac{1}{4}sin(2x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} = 1.57079632679$$

نلاحظ أن $I_{10}(f)$ أدق من $I_5(f)$.

التمرين 4: إيجاد n عدد المجالات الجزئية الضرورية للمجال $[-\pi, \pi]$ للحصول على دقة 0.5×10^{-3} إذا استعملنا طريقة سيمسون لحساب التكامل $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\, dx$.

لدينا

$$E_S = \left|\int_a^b f(x)dx - S_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4$$

بحيث $M_4=\max_{[-\pi,\pi]}|f^{(4)}(x)|=\max_{[-\pi,\pi]}|\cos(x)|=1$ حتى يكون $E_S\le 0.5\times 10^{-3}$ يكفي أن يتحقق

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4\le 0.5\times 10^{-3}\Rightarrow\frac{(\pi+\pi)^5}{180n^4}1\le 0.5\times 10^{-3}\Rightarrow\frac{(2\pi)^5}{180\times 0.5}\times 10^3\le n^4$$

$$\Rightarrow\sqrt[4]{\frac{(2\pi)^5}{180\times 0.5}\times 10^3}\le n\Rightarrow 18.16\le n$$

يكفي أخذ $n=[18.16]+2=20$.

التمرين 5: ليكن لدينا الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

1- حساب التكامل $I(b)=\int_0^b f(x)dx=\int_0^b\frac{1}{x^2+1}dx=[arctg(x)]_0^b=arctg(b)$.
2- استنتاج القيم $I(0.2)=0.1973955598$, $I(0.4)=0.3805063771$, $I(0.6)=0.5404195002$, $I(0.8)=0.6747409422$, $I(1)=0.7853981634$.
3- من أجل القيمة $b=0.2$ وباستعمال طريقة شبه المنحرف من أجل $n=4$.
- حساب التكامل $I(0.2)$. $h=\frac{0.2}{4}=0.05$

x_i	0	0.05	0.1	0.15	0.2
$f(x_i)$	1	0.9975062344	0.9900990099	0.9779951100	0.9615384615

$$I_4(f)=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_5)+2\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\big)\right]$$
$$=\frac{0.05}{2}[1+0.9615384615$$
$$+2(0.9975062344+0.9900990099+0.9779951100)]=0.19731847925$$

لاحظ $I(0.2)-I_4(f)=0.1973955598-0.19731847925=0.00007708055$

أكمل بنفس الطريقة بقية التكاملات.

التمرين 6: نرمز بـ $I(f)=\int_{-1}^1 f(t)dt$ و $J(f)=\omega_1 f(-1)+\omega_2 f(0)+\omega_3 f(1)$

1- حتى يتساوى التكامل العددي مع التكامل الحقيقي يكفي أن تكون $f(t)$ كثير حدود من الدرجة أقل أو تساوي 2 أي $f(t)=1$ أو $f(t)=t$ أو $f(t)=t^2$
- الحالة الأولى $f(t)=1$: $J(f)=\omega_1 f(-1)+\omega_2 f(0)+\omega_3 f(1)=\omega_1+\omega_2+\omega_3$

$$I(f)=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^1 1dt=[t]_{-1}^1=2$$

$$J(f)=I(f)\Leftrightarrow\omega_1+\omega_2+\omega_3=2\qquad(1)$$

- الحالة الثانية $f(t)=t$: $J(f)=\omega_1 f(-1)+\omega_2 f(0)+\omega_3 f(1)=-\omega_1+\omega_3$

$$I(f)=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^1 tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^1=0$$

$$J(f) = I(f) \Leftrightarrow -\omega_1 + \omega_3 = 0 \qquad (2)$$

- الحالة الثالثة $f(t) = t^2$: $J(f) = \omega_1 f(-1) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f(1) = \omega_1 + \omega_3$

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$J(f) = I(f) \Leftrightarrow \omega_1 + \omega_3 = \frac{2}{3} \qquad (3)$$

بحل جملة المعادلات (1) (2) و (3) نجد $\omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{3}$ و $\omega_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ أي

$$J(f) = \frac{1}{3}\big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\big)$$

وهي طريقة سيمسون.

التمرين7:

x_i	y_i	$\Delta y(x_i)$	$\Delta^2 y(x_i)$	$\Delta^3 y(x_i)$	$\Delta^4 y(x_i)$
0.8	0				
		0.992			
0.9	0.992		-0.985		
		0.007		0.979	
1.0	0.999		-0.006		-0.966
		0.001		0.013	
1.1	1.000		0.007		
		0.008			
1.2	1.008				

لدينا $h = 0.1\,, x_0 = 0.8$

$$\frac{df}{dx}(0.8) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(x_0)\right]$$
$$= \frac{1}{0.1}\left[0.992 - \frac{1}{2}(-0.985) + \frac{1}{3}(0.979) - \frac{1}{4}(-0.966)\right]$$
$$= 20.52333333$$

من أجل $h = 0.1\,, x = 0.9$ فإن $s = 1$ لأن $(x = x_0 + sh)$. نعوض في القانون

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\Big(\Delta f(x_0) + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{6}(3s^2 - 6s + 2)\Delta^3 f(x_0)$$
$$+ \frac{1}{24}(4s^3 - 18s^2 + 22s - 6)\Delta^4 f(x_0)\Big) \qquad (**)$$

$$\frac{df}{dx}(0.9) = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{0.1}\Big(0.992 + \frac{1}{2}(-0.985) - \frac{1}{6}(0.979)$$
$$+ \frac{1}{12}(-0.966)\Big) = 2.55833333$$

<u>التمرين 8</u>: بنفس طريقة التمرين السابق.

<u>التمرين 9</u>: نحتاج أيضا إلى جدول الفروق غير المقسومة

x_i	y_i	$\Delta y(x_i)$	$\Delta^2 y(x_i)$	$\Delta^3 y(x_i)$	$\Delta^4 y(x_i)$
0	0	1	2	0	0
1	1	3	2	0	
2	4	5	2		
3	9	7			
4	16				

لدينا $h = 1 , x_0 = 0$ لدينا

$$\frac{d^2 f}{d^2 x} = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f(x) + \frac{1}{6}(6s-6)\Delta^3 f(x) + \frac{1}{24}(12s^2 - 36s + 22)\Delta^4 f(x) + \frac{1}{120}(20s^3 - 120s^2 + 210s - 100)\Delta^5 f(x) + \cdots\right)$$

لما $x = 0 = x_0$ تكون $s = 0$ فنصل على $f''(x_0)$ كما يلي

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f(x_0) - \Delta^3 f(x) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(x) - \frac{5}{6}\Delta^5 f(x) + \cdots\right)$$

$$f''(0) = \frac{1}{1}\left(2 - 0 + \frac{11}{12} \times 0\right) = 2$$

لما $x = 2$ تكون $s = 2$ فنصل على $f''(2)$ كما يلي

$$\frac{d^2 f}{d^2 x}(2) = \frac{1}{1}\left(\Delta^2 f(x) + \frac{1}{6}(6 \times 2 - 6)\Delta^3 f(x) + \frac{1}{24}(12 \times 4 - 36 \times 2 + 22)\Delta^4 f(x)\right)$$

$$= \frac{1}{1}\left(2 + \frac{1}{6}(6 \times 2 - 6) \times 0 + \frac{1}{24}(12 \times 4 - 36 \times 2 + 22) \times 0\right) = 2$$

نلاحظ أن الدالة الحقيقية هي $f(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2$ بالتالي القيمة التقريبية للمشتق تساوي القيمة الحقيقية.إذا كانت $y(x) = x^2$ قارن بين القيم الحقيقية والتقريبية.