جامعة الشهيد حمه لخضر -الوادي-

كلية العلوم الدقيقة | المستوى : سنة ثانية رياضيات السداسي الثالث

قسم الرياضيات | السنة الدراسية : 2021/2020

حلول السلسلة رقم 01 في التحليل العددي

التمرين الأول: إيجاد كثير حدود لاجرانج الذي يستقطب الدالة $f(x)$:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}=\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(0-\frac{\pi}{6}\right)\left(0-\frac{\pi}{4}\right)\left(0-\frac{\pi}{3}\right)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{144}{\pi^4}\left(x^2-\frac{5\pi}{12}x+\frac{\pi^2}{24}\right)\left(x^2-\frac{5\pi}{6}x+\frac{\pi^2}{6}\right)=\frac{144}{\pi^4}\left(x^4-\frac{15\pi}{12}x^3+\frac{25}{36}\pi^2x^2+\frac{\pi^4}{144}\right)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}=\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}-0\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1292}{\pi^4}\left(x^2-\frac{\pi}{4}x\right)\left(x^2-\frac{5\pi}{6}x+\frac{\pi^2}{6}\right)=-\frac{1292}{\pi^4}\left(x^4-\frac{13}{12}\pi x^3+\frac{9}{24}\pi^2x^2-\frac{1}{24}\pi^2x\right)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}=\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{2304}{\pi^4}\left(x^2-\frac{\pi}{6}x\right)\left(x^2-\frac{5\pi}{6}x+\frac{\pi^2}{6}\right)=\frac{2304}{\pi^4}\left(x^4-\pi x^3+\frac{11}{36}\pi^2x^2-\frac{1}{36}\pi^2x\right)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}=\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1296}{\pi^4}\left(x^2-\frac{\pi}{6}x\right)\left(x^2-\frac{3\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8}\right)=-\frac{1296}{\pi^4}\left(x^4-\frac{11}{12}\pi x^3+\frac{1}{4}\pi^2x^2-\frac{1}{48}x\right)$$

$$L_4(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}=\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{144}{\pi^4}\left(x^2-\frac{\pi}{6}x\right)\left(x^2-\frac{7\pi}{12}x+\frac{\pi^2}{12}\right)=\frac{144}{\pi^4}\left(x^4-\frac{9\pi}{12}x^3+\frac{13}{72}\pi^2x^2-\frac{\pi^3}{72}x\right)$$

$$P_4(x)=\sum_{i=0}^{i=4}f(x_i)\,L_i(x)=0\times L_0(x)+\frac{1}{2}L_1(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}L_2(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}L_3(x)+L_4(x)$$

$$P_4(x)=0\times L_0(x)-\frac{1}{2}\times\frac{1292}{\pi^4}\left(x^4-\frac{13}{12}\pi x^3+\frac{9}{24}\pi^2x^2-\frac{1}{24}\pi^3x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2304}{\pi^4}\left(x^4-\pi x^3+\frac{11}{36}\pi^2x^2-\frac{1}{36}\pi^3x\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1296}{\pi^4}\left(x^4-\frac{11}{12}\pi x^3+\frac{1}{4}\pi^2x^2-\frac{\pi^3}{48}x\right)+\frac{144}{\pi^4}\left(x^4-\frac{9\pi}{12}x^3+\frac{13}{72}\pi^2x^2-\frac{\pi^3}{72}x\right)$$

$$P_4(x) = \frac{x^4}{\pi^4}\left[-646 + 1152\sqrt{2} - 646\sqrt{3} + 144\right] + \frac{x^3}{\pi^3}\left[\frac{13}{24} - 1152\sqrt{2} + \frac{11}{24}\sqrt{3} - 108\right]$$

$$+\frac{x^2}{\pi^2}\left[-\frac{1938}{8} + 352\sqrt{2} - 162\sqrt{3} + 26\right] + \frac{x}{\pi}\left[27 - 32\sqrt{2} + 13.5 - 2\right]$$

تحقق ثم أكمل الحسابات.

التمرين الثاني : إيجاد كثير حدود لاجرانج الذي يستقطب الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ في النقط $-2, -1, 0, 1, 2$

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1/5	1/2	1	1/2	1/5

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(x+1)(x)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2)(-2-1)(-2-2)} = \frac{1}{24}(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x+2)(x)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(2)(1)(-1)(-2)} = \frac{1}{4}(x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1)(1-2)} = -\frac{1}{6}(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x)$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2)(2-1)} = \frac{1}{24}(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)$$

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{i=4} f(x_i)\, L_i(x) = \frac{1}{5} \times L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + L_2(x) + \frac{1}{2}L_3(x) + \frac{1}{5}L_4(x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 1$$

التمرين الثالث : إثبات أن المجموعة $[x_0, x_n]$, $\forall x \in$, $\left(L_i(x)\right)_{i=0}^{n}$ مستقلة خطيا. أي

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, L_i(x) = 0\,, \forall x \in [x_0, x_n] \Rightarrow \alpha_i = 0\,, \forall i = 0, \dots n.$$

بما أن $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, L_i(x) = 0$ من أجل كل x من المجال $[x_0, x_n]$ يعني أنها صحيحة من أجل $x = x_0$ بالتالي نحصل على

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, L_i(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 L_0(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

لأن $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j \end{cases}$, أي أن $L_0(x_0) = 1$. و هكذا نأخذ في كل مرة x تساوي أحد النقط x_j فنجد

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j L_j(x_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

- إثبات أن $\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{i=n}} L_i(x) = 1$ من أجل $x \in [x_0, x_n]$.

نلاحظ أنه يمكننا كتابة $\sum_{i=0}^{i=n} L_i(x) = \sum_{i=0}^{i=n} 1.\, L_i(x)$. باعتبار الدالة $f(x) = 1$ بالتالي $f(x_i) = 1, i = 1, \dots, n$

ومنه العبارة $\sum_{i=0}^{i=n} 1.\, L_i(x)$ يمثل كثير الحدود الذي يقرب الدالة $f(x) = 1$ في النقط $x_i,\ \ i = 1, \dots, n$ لكننا نعلم أنه إذا أردنا تقريب كثير حدود بكثير حدود يساويه أو أعلى منه في الدرجة فإنه يطابقه أي أن:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} 1.\, L_i(x) = f(x) = 1$$

التمرين الرابع : لدينا من أجل $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ومن عبارة الخطأ

$$\exists \xi \in [x_0, x_n] \quad , \quad |f(x) - P_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

فإن دقة التقريب يمكن حسابها كالتالي

$$|f(x) - P_4(x)| = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{i=0}^{4} (x - x_i)$$
$$\leq \frac{\max_{[0,64]}|f^{(5)}(x)|}{5!} (x-0)(x-1)(x-8)(x-27)(x-64)$$

حساب $f^{(5)}(x)$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{3}.\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{5}{3} x^{-\frac{8}{3}}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3} x^{-\frac{11}{3}}(x) \Rightarrow f^{(5)}(x) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3}.\frac{11}{3} x^{-\frac{14}{3}} = \frac{880}{243} \frac{1}{x^{\frac{14}{3}}}$$

ومنه $max_{[0,64]}|f^{(5)}(x)| = \frac{880}{243} \frac{1}{64^{\frac{14}{3}}} = 1.34907632 \times 10^{-8}$

ومنه $|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{\max_{[0,64]}|f^{(5)}(x)|}{5!} |64-0||64-1||64-8||64-27||0-64|$

$$\leq \frac{1.34907632 \times 10^{-8}}{120} 64 \times 63 \times 56 \times 37 \times 64 = 0.0600109$$

التحقيق

x_i	0	1	8	27	64
$f(x_i)$	0	1	2	3	4

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}=\frac{(x-1)(x-8)(x-27)(x-64)}{(-1)(-8)(-27)(-64)}$$
$$=\frac{1}{13824}(x^4-100x^3+2555x^2-16280x-13824)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}=\frac{(x)(x-8)(x-27)(x-64)}{(1-0)(1-8)(1-27)(1-64)}=-\frac{1}{11466}(x^4-99x^3+2456x^2-13824x)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}=\frac{(x)(x-1)(x-27)(x-64)}{(8-0)(8-1)(8-27)(8-64)}=\frac{1}{59584}(x^4-92x^3+1819x^2-1728x)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}=\frac{(x)(x-1)(x-8)(x-64)}{(27)(27-1)(27-8)(27-64)}=-\frac{1}{-493506}(x^4-73x^3+584x^2-512x)$$

$$L_4(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}=\frac{(x)(x-1)(x-8)(x-27)}{(64)(64-1)(64-8)(64-27)}=\frac{1}{8354304}(x^4-36x^3+251x^2-216x)$$

$$P_4(x)=\sum_{i=0}^{i=4}f(x_i)\,L_i(x)=0.L_0(x)+1.L_1(x)+2.L_2(x)+3.L_3(x)+4.L_4(x)$$

$$P_4(x)=-0.000072338x^4+0.0072337963x^3-0.1856084247x^2+1.17766203704x$$

$$P_4(1)=0.99921507064$$

لتكن $x=5\Rightarrow P_4(5)=2.1071128552$ ولدينا $\sqrt{5}=2.2360679774997896964091736687313$ أي $P_4(5)-\sqrt{5}=0.129\le 0$

التمرين الخامس : لتكن $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ الفرق المقسوم من الرتبة n للنقط $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$

- إثبات أن $(*)$ $\quad f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{j=n}(x_i-x_j)}$:.

حسب لاجرانج فإن كثير الحدود الذي يستقطب الدالة f المعرفة بالنقط $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ يكتب بالشكل التالي

$$P_L(x)=\sum_{i=0}^{i=n}L_i(x)f(x_i)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots\dots(x_0-x_n)}$$
$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots\dots(x_1-x_n)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots\dots(x_2-x_n)}$$
$$+\cdots\cdots\cdots+f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots\dots(x_n-x_{n-1})}$$

من جهة أخرى حسب نيوتن فإن $P_n(x)$ يكتب على الشكل التالي

$$P_N(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\cdots$$

$$\cdots+f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

بما أن كثير الحدود التقريبي وحيد فإن $P_L(x) = P_N(x)$ بالتالي معامل x^n في كل من العبارتين متساو. أي $(*)$ صحيحة.

- من خلال $(*)$ نجد $f[x_0] = f(x_0)$ و $f[x_0, x_1] = f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$
- هذه الطريقة لا تعتمد على التراجع بل نستطيع مباشرة حساب القيمة من خلال النقط وقيم الدالة عندها أما الطريقة العادية لحساب الفروق المقسومة فيجب حساب كل القيم التي تسبقها حسب قانون التراجع أما فيما يخص عدد العمليات الحسابية فهي أكثر من الطريقة العادية .
- إثبات أن كثيرات حدود لاجرانج تحقق $L_i(x) = \frac{V(x)}{(x-x_i)V'(x_i)}$ بحيث $V(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

لدينا $V'(x) = \sum_{k=0}^{k=n}\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)$ ومنه $V'(x_i) = \sum_{k=0}^{k=n}\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_i - x_j) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i - x_j)$

أي نحصل على $L_i(x) = \frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)} = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{(x-x_i)\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)} = \frac{V(x)}{(x-x_i)V'(x_i)}$.

التمرين السادس:

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
0.0	60.0				
		17.71428571			
0.7	72.4		-3.36734693		
		13		-0.04859086	
1.4	81.5		-3.46938775		3.1584062076
		8.14285714		3.10981534	
2.1	87.2		3.06122448		
		12.42857142			
2.8	95.9				

$$P(x) = y_0 + \delta y_0(x - x_0) + \delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+\delta^4 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$= 60 + 17.71428571x - 3.36734693\, x(x - 0.7) - 0.04859086x(x - 0.7)(x - 1.4)$$
$$+3.1584062076x(x - 0.7)(x - 1.4)(x - 2.1)$$

$$\mathrm{P}(x) = 3.1584062076\mathrm{x}^4 - 13.31389693\mathrm{x}^3 + 13.758503335\mathrm{x}^2 + 13.523809543\mathrm{x} + 60.$$

نلاحظ أن $\mathrm{P}(0.7) = 72.3999999977$.

$$f(0.9) \approx \mathrm{P}(0.9) = 75.6822157409$$

- كتابة قانون نيوتن للفروق المقسومة وغير المقسومة المتأخرة.

$$P(x) = y_4 + \delta y_4(x - x_4) + \delta^2 y_4 (x - x_4)(x - x_3) + \delta^3 y_4(x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)$$

$$+\delta^4 y_4 (x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

- إيجاد كثير الحدود الذي يقرب هذه الدالة باستعمال طريقة نيوتن للفروق المقسومة المتأخرة.
-

$$P(x) = 95.9 + 12.42857142(x-2.8) + 3.06122448 \ (x-2.8)(x-2.1) + 3.10981534(x-2.8)(x-1.4)(x-0.7)$$

$$+3.1584062076(x-2.8)(x-2.1)(x-1.4)(x-0.7)$$

$$\mathrm{P}(x) = 3.1584062076\mathrm{x}^4 - 13.31389693\mathrm{x}^3 + 13.758503335\mathrm{x}^2 + 13.523809543\mathrm{x} + 60.$$

(نلاحظ أن النتيجة متساوية)

التمرين السابع:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1.00	0.76578939			
		0.02957739		
1.02	*0.79536678*		-0.002656	
		0.02692139		0.0009687
1.04	*0.82228817*		-0.0016873	
		0.02523409		
1.06	*0.84752226*			

-

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h.1!}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2.2!} \ (x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{h^3.3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P(x) = 0.76578939 + \frac{0.02957739}{0.02}(x-1) - \frac{0.002656}{(0.02)^2.2!} \ (x-1)(x-1.02) + \frac{0.0009687}{(0.02)^3.3!}(x-1)(x-1.02)(x-1.04)$$

$$P(x) = 20.18125x^3 - 65.074625x^2 + 71.1669145x - 25.50774961$$

نلاحظ أن $P(1) = 0.76578989$

- إيجاد القيمة التقريبية لـ $f(1.03)$: $f(1.03) \approx P(1.03) = 0.809094313$
- إذا كانت $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ فإن $f(1.03) = 3(1.03)e^{1.03} - e^{2\times 1.03} = 0.80932336$
- تقدير للخطأ المرتكب: $|f(1.03) - P(1.03)| = 0.80932336 - 0.809094313 = 0.0002293059$

التمرين الثامن: العلاقة تربط بين الفروق المقسومة المتقدمة وغير المقسومة المتقدمة وبرهنها.

حسب التمرين السابق لدينا

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{\Delta^k y_0}{h^k.k!}$$

بحيث $f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\delta^k y_0$. يمكن إستعمال البرهان بالتراجع.

التمرين التاسع:

1- كثير حدود لاجرانج الذي يستقطب الدالة $f(x)=x^n$ معرفة على المجال $[0,1]$ في النقط $x_i=\frac{i}{n}, i=0,1,\dots,n$

هو $P(x)=x^n$ - لأن كثير الحدود المستقطب من نفس درجة $f(x)$.

2- بالنسبة لـ $f(x)=x^{n+1}$: لدينا من عبارة الخطأ

$$\exists\xi\in[x_0,x_n]\quad,\quad |f(x)-P_n(x)|=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

لكن $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$ بالتالي

$$|f(x)-P_n(x)|=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\ =\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$P_n(x)=\ f(x)-\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\ =x^{n+1}-\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\ .$$

لتمرين العاشر: ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ و كثير حدود P_n من الدرجة أقل أو تساوي n يستقطب الدالة $f(x)$ في النقط $x_0,x_1,\dots,x_n$ نريد حساب الخطأ في النقطة θ أي حساب $e_n(\theta)=f(\theta)-P_n(\theta)$. $P(x)=P_n(x)-\pi_n(x)\frac{f(\theta)-P_n(\theta)}{\pi_n(\theta)}$

1- إثبات أن P يستقطب الدالة $f(x)$ في النقط في النقط $x_0,x_1,\dots,x_n,\theta$.

$$P(x_i)=P_n(x_i)-\pi_n(x_i)\frac{f(\theta)-P_n(\theta)}{\pi_n(\theta)}=P_n(x_i)=f(x_i)\,, i=0,\dots,n$$

لأن $\pi_n(x_i)=0$ و $P_n(x)$ يستقطب $f(x)$.

تبقى النقطة $x=\theta$:

$$P(\theta)=P_n(\theta)-\pi_n(\theta)\frac{f(\theta)-P_n(\theta)}{\pi_n(\theta)}=f(\theta)$$

2- استنتاج $P(t)-P_n(t)$ بدلالة $f[x_0,x_1,\dots,x_n,t]$: لدينا من السؤال السابق

$$P(t) = P_n(t) - \pi_n(t)\frac{f(\theta) - P_n(\theta)}{\pi_n(\theta)} \qquad (1)$$

ومن عبارة كثير حدود نيوتن لدينا

$$P(t) = P_n(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \theta]\pi_n(t) \Rightarrow P(t) - P_n(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \theta]\pi_n(t) \qquad (2)$$

3- استنتاج الخطأ $e_n(\theta) = f(\theta) - P_n(\theta)$.

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, \theta]\pi_n(t) = \pi_n(t)\frac{f(\theta)-P_n(\theta)}{\pi_n(\theta)}$$ أي $$f[x_0, x_1, \dots, x_n, \theta] = \frac{f(\theta)-P_n(\theta)}{\pi_n(\theta)}$$

$$f(\theta) - P_n(\theta) = \pi_n(\theta).\, f[x_0, x_1, \dots, x_n, \theta]$$