جامعة الشهيد حمه لخضر- الوادي -

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

سنة ثانية رياضيات.

دروس في التحليل العددي 1

الأستاذة : دودي نجاة

السنة الدراسية : 2021/2020

برنامج مادة التحليل العددي 1

الفصل الأول : حساب الأخطاء:

التمثيل العشري للأعداد الحقيقية - الجزء الصحيح لعدد عشري - خطأ التدوير خطأ الإقتطاع.

الفصل الثاني : الإستقطاب والتقريب :

طريقة لاجرانج - طريقة نيوتن - خطأ التقريب - التقريب بمفهوم أقل التربيعات.

الفصل الثالث: التكامل العددي :

صيغة شبه المنحرف - صيغة نيوتن – صيغة سيمسون – دراسة الأخطاء.

الفصل الرابع: الإشتقاق العددي

الفصل الخامس: حل المعادلات الجبرية :

طريقة المنصفات (الديكوتوميا) - طريقة النقطة الثابتة - طريقة نيوتن-رافسون.

الفصل الأول : تحليل الأخطاء

مقدمة: التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات العامة و هو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي, ويستخدم عادة في إيجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية, حيث النتيجة التي نحصل عليها تكون تقريبية, وبما أننا نحصل على نتائج تقريبية فهذا يعني وجود خطأ علينا حسابه إلا أننا لو استطعنا حساب الخطأ لاستطعنا إيجاد الحل الحقيقي الأمر الذي يعني إيجاد تقريب لهذا الخطأ (القيمة التي لا يتجاوزها الخطأ) إذا تتلخص مهمة التحليل العددي في إيجاد الحل التقريبي لمسألة ما وتقويم الخطأ.

1-1- التمثيل العشري لعدد حقيقي:

وهو التعبير على الصورة التالية $r = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a_i}{10^i}$ بحيث $a_1, a_2, a_3, \dots \dots$ أعداد صحيحة تحقق الشرط $0 \leq a_i \leq 9$ و a_0 عدد حقيقي غير سالب وليس بالضرورة أن يكون بين 0 و 9.

العدد r غالبا ما يكتب بالشكل $r = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \dots$ ويسمى a_0 الجزء الصحيح للعدد r .

$a_1, a_2, a_3, \dots \dots$ هي خانات تشكل الجزء الكسري لـ r.

مثال 1-1: $r = 43{,}6352$ أي $r = \frac{43}{10^0} + \frac{6}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{2}{10^4}$.

1-2- الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

تعريف 1-1: إذا كان x عدد حقيقي, الجزء الصحيح لـ x هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .
أي من أجل كل حقيقي $x \in [n, n+1[$, العدد الصحيح n يسمى الجزء الصحيح لـ x و نكتب:

$$n = [x] \text{ أو } n = E(x)$$

مثال 1-2: $x = -3.75 \Rightarrow E(x) = -4$ **,** $x = 2.25 \Rightarrow E(x) = 2$

$x = -5.14 \Rightarrow E(x) = -6$ **,** $x = 5.14 \Rightarrow E(x) = 5$ **.**

خصائص:

1- $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) \leq x < E(x) + 1$

2- $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < E(x) \leq x$

3- $\forall x \in \mathbb{Z},\ E(x) = x$

-4 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\le y\Rightarrow E(x)\le E(y)$

-5 $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\ E(n+x)=n+E(x)$

-6 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y)\le E(x+y)$.

1-3- التقريب:

1-3-1- التدوير: هو واحد من أهم مصادر الأخطاء وهو استعمال المدورة بدلا من القيمة المضبوطة.

قاعدة التدوير: إذا كان لدينا عدد $x=0,x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$ و أردنا الإكتفاء بـ $n-1$ رقم بعد الفاصلة أي أن العدد المدور $x_0=0,x_1x_2x_3\ldots\tilde{x}_{n-1}$ و $\tilde{x}_{n-1}$ يحدد بالشكل التالي:

- إذا كان x_n أكبر من أو يساوي 5 فإن $\tilde{x}_{n-1}=x_n+1$.
- إذا كان x_n أقل من 5 فإن $\tilde{x}_{n-1}=x_n$.

1-3-2- الإقتطاع: تستعمل الآلات الحاسبة غالبا قاعدة الإقتطاع وهو الاكتفاء بإظهار عدد منته بعد الفاصلة. مثلا لدينا العدد $x=0.064286$ تظهر فقط $\tilde{x}=0.06428$.

مثال 1-3: نستعمل أيضا الإقتطاع في سلاسل تايلور على سبيل المثال:

$\forall x\in IR$, $exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ نختزل العدد بحساب $z=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ من أجل $n\in IN$ بالتالي يكون خطأ الإقتطاع

$$E=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad (l'erreur\ troncature)$$

1-4- أنواع الأخطاء:

$(l'erreur\ absolue)$ يبين الخطأ مدى دقة وسرعة الطريقة المستخدمة ومن بين أنواعه:

1-4-1- الخطأ المطلق: لتكن قيمة x^* تقريبية للقيمة الحقيقية x يعرف الخطأ المطلق كمايلي:

$$\Delta x=|x-x^*|\le\varepsilon_x$$

وهكذا نحصل على المتباينة:

$$x^*-\varepsilon_x\le x\le x^*+\varepsilon_x$$

أي القيمة $x^*+\varepsilon_x$ تمثل قيمة تقريبية لـ x بالزيادة.

أما $x^*-\varepsilon_x$ تمثل قيمة تقريبية لـ x بالنقصان.

مثال 1-4: لتكن $x=3,257$ ولتكن القيمة التقريبية لـ x و $x^*=3,26$ فإن

$$\Delta x = |x - x^*| = |3,257 - 3,26| = 0,003$$

ملاحظة: لتكن $x = 71$ و القيمة التقريبية لـ x هي $x^* = 72$ فإن

$$\Delta x = |71 - 72| = 1$$

و لتكن $y = 1000$ و القيمة التقريبية لـها هي $y^* = 999$ فإن

$$\Delta y = |1000 - 999| = 1.$$

نلاحظ أن الخطأ الثاني يعتبر صغير نسبيا بالنسبة للقيمة $y = 1000$ لكن نفس الخطأ يعتبر أكبر نسبيا بالنسبة $x = 71$.

لهذا السبب أنشيء ما يسمى بالخطأ النسبي.

1-4-2- الخطأ النسبي: يعرف الخطأ النسبي بالعلاقة:

$$E_r = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

مثال 1-5: في المثال السابق $E_r{}^1 = \frac{1}{71} = 0.014$ بالنسبة لـ x

أما بالنسبة لـ y فإن $E_r{}^2 = \frac{1}{1000} = 0.001$.

1-4-3- خصائص الخطأ المطلق و الخطأ النسبي: لتكن x^* القيمة التقريبية لـ x و y^* قيمة تقريبية لـ y بحيث: $\Delta x = |x - x^*|$ و $\Delta y = |y - x^*|$, لدينا الخصائص التالية:

أ- $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$

- $E_r(x + y) = \frac{1}{|x+y|}\left(xE_r(x) + yE_r(y)\right)$

ب- $\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$

- $E_r(x - y) = \frac{1}{|x-y|}\left(xE_r(x) + yE_r(y)\right)$

ت- $\Delta(x.y) = y^*\Delta x + x^*\Delta y$

- $E_r(x.y) = E_r(x) + E_r(y)$

ث- $\Delta(x/y) = \frac{x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}\right)$

- $E_r(x/y) = E_r(x) - E_r(y)$

الفصل الثاني : الاستقطاب والتقريب

مسألة: ليكن لدينا دالة $f(x)$ تمر بالنقط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ يعني أن هذه الدالة تعرف قيمها في النقط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n+1)$ نقطة.

نريد إيجاد دالة بسيطة على شكل كثير حدود يمر بالنقط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

أي نبحث عن كثير حدود $P(x)$ يحقق $P(x_i) = y_i, i = 0,1, \dots, n$ بالتالي السؤال المطروح:

- هل يوجد كثير حدود يحقق المطلوب.
- ماهي درجته (إن وجد)
- هل هو وحيد أم لا

2-1- الوجود والوحدانية:

كثير الحدود $P(x)$ يكتب على الشكل $P(x) = \sum_{i=0}^{i=m} a_i x^i$ ويحقق $P(x_i) = y_i, i = 0,1, \dots, n$ أي لدينا $(n+1)$ معادلة بالتالي يجب أن يكون عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات ومنه فإن $P(x)$ يكون من الدرجة n.

من هنا يجب الإجابة على الأسئلة التالية:

- ماهي شروط وجود ووحدانية $P(x)$.
- ماهو شكل $P(x)$.
- ما هو تقدير الخطأ بين $f(x)$ و $P(x)$ أي ?> $|f(x) - P(x)|$.

لدينا $P(x_i) = y_i\ ,\ i = 0, \dots, n$ أي

$$y_i = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x_i^j\ ,\ i = 0, \dots, n \qquad (P)$$

نظرية 2-1: المسألة (P) تقبل حلا وحيدا إذا وفقط إذا كانت النقط $(x_i)_{i=0}^{i=n}$ منفصلة مثنى مثنى.

البرهان: الجملة (P) تكتب بالشكل التالي:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \cdots + a_nx_1^n = y_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

هذه الأخيرة تشكل $(n+1)$ معادلة و $(n+1)$ مجهول وهي معاملات كثير الحدود $P(x)$:
$\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ لكن مصفوفة هذه الجملة هي:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \dots\dots\dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \dots\dots\dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \dots\dots\dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \dots\dots\dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

لدينا محدد هذه الجملة $\det(V) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(x_i - x_j\right) \neq 0$ (محدد Vondermonde).

ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا أي كثير الحدود موجود ووحيد.

2-2- كتابة كثير الحدود في أساس لاجرانج:

تعريف 2-2: لتكن نقطة لتكن $(x_i)_{i=0}^{i=n}$ $(n+1)$ نقطة منفصلة مثنى مثنى. نسمي أساس لاجرانج المتعلق بالنقط $x_i \,, i = 0, \dots, n$ كثير الحدود الذي يكتب بالشكل التالي:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad , i = 0, \dots, n$$

أي

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots\dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots\dots (x_0 - x_n)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots\dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots\dots (x_1 - x_n)}$$
$$\vdots$$
$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots\dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots\dots (x_n - x_{n-1})}$$

واضح من التعريف

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

فرضية 2-3: المجموعة تشكل أساس لـ P_n وكثير الحدود الذي يستقطب الدالة $f(x)$ في النقط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ يكتب على الشكل التالي:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} y_i L_i(x)$$

البرهان: سنبرهن أن $P(x)$ يستقطب الدالة في النقط المعطاة أي

$$P(x_j) = f(x_j) = y_j \,, j = 0, \dots, n$$

لدينا $L_j(x_\mathrm{i}) = 0$ لما $i \neq j$ و $L_j(x_\mathrm{j}) = 1$ بالتالي $\sum_{i=0}^{i=n} y_i L_i(x_j) = y_j L_j(x_j) = y_j$

ومنه $P(x_j) = y_j$ (الشطر الأول من النظرية يبرهن في الأعمال الموجهة).

مثال 2-1: لتكن الدالة المعطاة حسب الجدول التالي:

x_i	2	3	4	5
$f(x_i)$	3	2	-1	-6

- أوجد كثير حدود لاجرانج الذي يستقطب هذه الدالة في النقط المعطاة.

الحل: إيجاد كثيرات حدود لاجرانج الموافقة للنقط x_i:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{(2 - 3)(2 - 4)(2 - 5)}$$
$$= -\frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 47x - 60).$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 4)(x - 5)}{(3 - 2)(3 - 4)(3 - 5)}$$
$$= \frac{1}{2}(x^3 - 11x^2 + 38x - 40)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{(4 - 2)(4 - 3)(4 - 5)}$$
$$= -\frac{1}{2}(x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(5 - 2)(5 - 3)(5 - 4)}$$
$$= \frac{1}{2}(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$$

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$
$$= -x^2 + 4x - 1.$$

2-3- كتابة كثير الحدود في أساس نيوتن:

2-3-1- الفروق المقسومة المتقدمة:

ليكن لدينا (x_i, y_i) ونريد إيجاد $P(x)$ الذي تحقق $P(x_i) = y_i \;\; i = 0, \dots, n$

حالة $n = 1$: أي إيجاد المستقيم الذي يمر بالنقط $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ والذي يعطى بالشكل:

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 + x_0}$$

حالة $n = 2$: أي إيجاد كثير الحدود من الدرجة الثانية (قطع مكافىء) يمر بالنقط

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

بالتالي نضيف عبارة للصيغة بحيث تكون معدومة عند النقط x_0, x_1 كالتالي:

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 + x_0}(x - x_0) + a(x - x_0)(x - x_1) \qquad (1)$$

و a يطلب البحث عنها حتى يتحقق $P(x_2) = y_2$, بعد الحساب نجد أن

$$a = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$$

تعريف 2-4: (الفروق المقسومة) من أجل النقط $i = 0, \dots, n$, (x_i, y_i) نعرف

$$y[x_i] = y_i$$

$$\delta y[x_i, x_j] = \frac{y[x_j] - y[x_i]}{x_j - x_i} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

$$\delta^2 y[x_i, x_j, x_k] = \frac{y[x_j, x_k] - y[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\delta^n y[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}] = \frac{y[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}] - y[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}]}{x_{i_n} - x_{i_0}}.$$

نظرية 2-5: كثير الحدود الذي يستقطب الدالة $f(x)$ في النقط $(x_i, y_i) \;\; i = 0, \dots, n$ بحيث x_i نقط منفصلة مثنى مثنى وحيد و يكتب على الشكل التالي:

$$P(x) = y[x_0] + \delta y[x_0, x_1](x - x_0) + \delta^2 y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \delta^3 y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$+\cdots\cdots+\delta^n y[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

البرهان: نبرهن بالتراجع:
من أجل $n=1$ و $n=2$ برهنت سابقا.
نفرض

$$P_1(x)=y[x_0]+\delta y[x_0,x_1](x-x_0)+\delta^2 y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots\cdots+\delta^{n-1} y[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2}).$$

كثير الحدود الذي يستقطب $f(x)$ في $n-1$ نقطة.
بالتالي كما في (1) كثير الحدود الذي يستقطب $f(x)$ في n نقطة يجب أن يأخذ الشكل التالي:
$$P_2(x)=P_1(x)+a(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$
بحيث a يطلب تعيينها حتى يتحقق $P_2(x_n)=y_n$
لبرهان أن $a=\delta^n y[x_0,x_1,\dots,x_n]$ نعتبر كثير الحدود

$$P^*(x)=y[x_1]+\delta y[x_1,x_2](x-x_1)+\delta^2 y[x_1,x_2,x_3](x-x_1)(x-x_2)$$
$$+\cdots\cdots+\delta^{n-1} y[x_1,x_1,\dots,x_n](x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-2}).$$
الذي يمر بالنقط $(x_i,y_i)\ i=1,\dots,n$
ثم نفرض

$$q(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\big((x_n-x)P_1(x)+(x-x_0)P^*(x)\big)$$

$q(x)$ يحقق:

$$q(x_0)=\frac{1}{x_n-x_0}\big((x_n-x_0)P_1(x_0)+(x_0-x_0)P^*(x_0)\big)=P_1(x_0)=y_0$$

من أجل $i=1,\dots,n-1$

$$q(x_i)=\frac{1}{x_n-x_0}\big((x_n-x_i)P_1(x_i)+(x_i-x_0)P^*(x_i)\big)$$
$$=\frac{1}{x_n-x_0}\big((x_n-x_i+x_i-x_0)y_i\big)=y_i$$

من أجل $i=n$

$$q(x_n)=\frac{1}{x_n-x_0}\big((x_n-x_n)P_1(x_i)+(x_n-x_0)P^*(x_n)\big)=P^*(x_n)=y_n$$

أي $q(x)$ يستقطب f في النقط $(x_i,y_i)\ i=0,\dots,n$ وبما أن كثير الحدود المستقطب وحيد فإن
$q(x)=P_2(x)$
بمقارنة معاملات المركبة x^n في كثيري الحدود $P_2(x)$ و $q(x)$ نجد:

$$a = \frac{1}{x_n - x_0}\left(\delta^{n-1}[x_1, \dots, x_n] + \delta^{n-1}[x_0, \dots, x_{n-1}]\right) = \delta^n[x_0, \dots, x_n]$$

خلاصة: تحسب الفروق المقسومة المتقدمة لـ$k+1$ نقطة كمايلي:

$$\begin{cases} y[x_i] = y_i \\ \delta y[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{y[x_{i+1}] - y[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ \delta^2 y[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{y[x_j, x_k] - y[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta^k y[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, x_{i+k+1}] = \dfrac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, x_{i+k+1}] - y[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} \end{cases}$$

2-3-2- طريقة لحساب الفروق المقسومة

مثال 2-2:

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$
0	-1					
		1				
2	1		3/8			
		5/2		-77/120		
4	6		-17/6		167/960	
		-6		3/4		-287/9600
5	0		5/3		-1/8	
		2/3		-1/4		
8	2		1/6			
		3/2				
10	5					

$$P(x) = -1 + 1(x-0) + \frac{3}{8}(x-0)(x-2) - \frac{77}{120}(x-0)(x-2)(x-4)$$

$$+\frac{167}{960}(x-0)(x-2)(x-4)(x-5)$$

$$-\frac{-287}{9600}(x-0)(x-2)(x-4)(x-5)(x-8)$$

مثال 2-3:

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$
2	3			
		-1		
3	2		-1	
		-3		0
4	-1		-1	
		-5		
5	-6			

$$P(x) = 3 - 1(x-2) - 1(x-2)(x-3) + 0(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$= -x^2 + 4x - 1.$$

2-4- دراسة خطأ التقريب:

لدينا الفرضية التالية

فرضية 2-6: لتكن f دالة من الصنف C^{n+1} على المجال I يحوي النقط $(x_i)_{i=0}^{n}$ المنفصلة مثنى مثنى والمرتبة ترتيبا تصاعديا فإنه من أجل $x \in [x_0, .., x_n]$ يوجد على الأقل ξ_x من $[x_0, .., x_n]$ تحقق:

$$\delta^{n+1} y[x, x_0, .., x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

البرهان:

نحتاج أولا لبرهان العلاقة التالية

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots\cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$
$$+ f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (2)$$

نستعمل البرهان بالتراجع:

لدينا من أجل $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f(x_0) + (x - x_0) f[x, x_0]$$ محققة

نفرض القضية صحيحة من أجل n أي:

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$
$$+f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (3)$$

لبرهان صحة القضية من أجل $n + 1$ نحتاج إلى العلاقة التالية:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x}$$

$$\Rightarrow f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] - (x_{n+1} - x) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

نعوض هذه الأخيرة في (3) نجد:

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$
$$+\{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] - (x_{n+1} - x) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]\} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

ومنه نستنتج:

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$
$$+f[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i)$$

وهو المطلوب.

برهان الفرضية:

ليكن $P_n(x)$ كثير الحدود الذي يستقطب الدالة $f(x)$ في النقط $x_i, i = 0, \dots, n$

لدينا

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots\cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

ومن العلاقة (3) لدينا:

$$f(x) = P_n(x) + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

نعرف الدالة:

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

لدينا حسب عبارة $F(t)$ فإن $F(t)$ تنعدم في $(n+2)$ نقطة وهي $x, x_0, x_1, \dots, x_n$

نعيد ترتيب هذه النقط ترتيبا تصاعديا حسب وضع x وليكن الترتيب الجديد بعد إعادة التسمية $z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$

نطبق نظرية رول على الدالة F بين كل نقطتين z_i و z_{i+1} لأن F تنعدم عند كل النقط $(z_i)_{i=0}^{n+1}$ فإنه يوجد $(n+1)$ نقطة $\xi_i^{(1)}, i = 1, \dots, n+1$ يحقق $F'\left(\xi_i^{(1)}\right) = 0$

F' تحقق من جديد نظرية رول بين كل نقطتين $\xi_i^{(1)}$ و $\xi_{i+1}^{(1)}$ أي يوجد n نقطة $\xi_i^{(2)}, i = 1, \dots, n$ تحقق $F''\left(\xi_i^{(2)}\right) = 0$

و هكذا نطبق نظرية رول $n+1$ مرة متتابعة إلى أن نحصل على $\xi = \xi^{n+1}$ تحقق $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ ومنه نجد

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](n+1)!$$

$$\Rightarrow f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

لأن $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$.

نتيجة: نستنتج من النظرية السابقة أن خطأ التقريب يعطى بالعلاقة

$$\exists \xi \in [x_0, x_n] \quad , \quad |f(x) - P_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

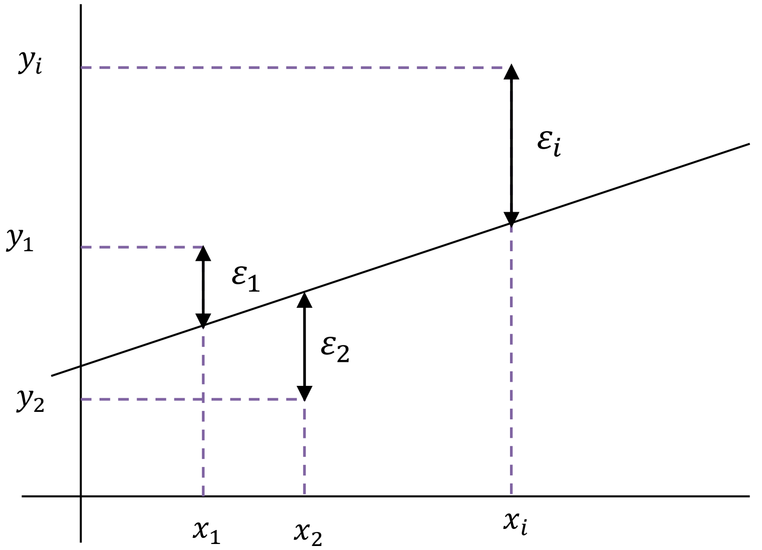
2-5- التقريب بمفهوم أقل التربيعات:

لتبسيط هذا المفهوم سنقوم بإنشاء مسألة بسيطة.

الهدف من المسألة هو إيجاد معادلة المستقيم $y(x) = \alpha x + \beta$ الذي يمثل أقرب مستقيم للنقط المعطاة (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$.

بالتالي الهدف هو البحث عن معادلة المستقيم الذي مجموع المسافات بينه وبين النقط المعطاة أصغر ما يمكن.

طريقة أقل التربيعات تتمثل في إيجاد أقل قيمة ممكنة لمجموع مربعات الأخطاء بين القيمة $y(x_i)$ و y_i . أي



$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ بحيث $\hat{y}_i = \alpha x_i + \beta$

إذا جمعنا ε_i فإننا لا نحصل على القيمة الحقيقية التي تمثل مجموع المسافات بين النقط والمستقيم.

ولتفادي هذه المشكلة نقوم بجمع مربعات ε_i

ليكن $S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2$ وحتى تكون أقل ما يمكن يجب أن يتحقق $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$ و $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$

لدينا

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (\alpha x_i + \beta)\right)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - (\alpha x_i + \beta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

وبما أن:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\ ,\qquad \bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n},\qquad \overline{XY}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n},\overline{X^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n}$$

ومنه نحصل على المعادلة التالية:

$$\overline{XY}-\alpha\overline{X^2}-\beta\bar{X}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial\beta}=-2\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(\alpha x_i+\beta)\big)=0$$

$$\Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n}y_i-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\beta=0$$

$$\Rightarrow n\bar{Y}-\alpha n\bar{X}-n\beta=0$$

$$\Rightarrow \beta=-\alpha\bar{X}+\bar{Y} \tag{5}$$

نعوض (5) في (4) نجد

$$\overline{XY}-\alpha\overline{X^2}-(-\alpha\bar{X}+\bar{Y})\bar{X}=0$$

$$\Rightarrow \alpha\big((\bar{X})^2-\overline{X^2}\big)=\bar{X}.\bar{Y}-\overline{XY}$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha=\frac{\bar{X}.\bar{Y}-\overline{XY}}{(\bar{X})^2-\overline{X^2}}\ ,\beta=-\alpha\bar{X}+\bar{Y}.}$$

مثال 2- 4: ليكن لدينا النقط الثلاث التالية $(n=3)$

$$(1,2)\ ,(2,1)\ ,(4,3)$$

حساب $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\overline{XY}$ و $\overline{X^2}$.

$$\bar{X}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}\ ,\bar{Y}=\frac{2+1+3}{3}=2$$

$$\overline{XY}=\frac{\sum x_iy_i}{\mathrm{n}}=\frac{2+2+12}{3}=\frac{16}{3}\ ,\overline{X^2}=\frac{1+4+16}{3}=\frac{21}{7}=7$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\bar{X}.\bar{Y} - \overline{XY}}{(\bar{X})^2 - \overline{X^2}} = \frac{\frac{7}{3} \times 2 - \frac{16}{3}}{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 7} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{14}{9}} = \frac{3}{7}$$

$$\beta = -\alpha\bar{X} + \bar{Y} = -\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} + 2 = 1$$

ومنه معادلة المستقيم هي $y = \frac{3}{7}\, x + 1$.

ملاحظة : يمكن إستبدال المستقيم $y = \alpha\, x + \beta$ حسب وضعية النقط بدالة أخرى لكن غالبا ما نختار دوال كثير حدود من درجات صغيرة لتسهيل الحسابات كأن نختار كثير الحدود من الدرجة الثانية $y = ax^2 + bx + c$ ونقوم بالبحث بنفس الطريقة عن a, b, c .

الفصل الثالث : التكامل العددي

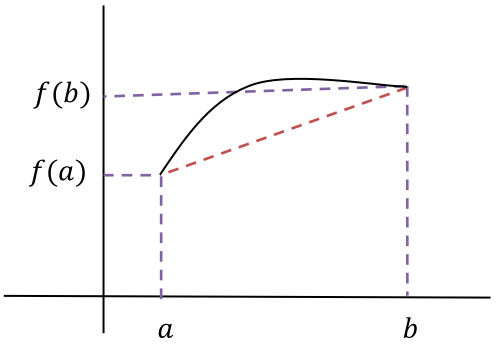
تمهيد: التكامل العددي يستعمل غالبا لإيجاد القيمة التقريبية لتكامل دالة لا تعرف دالتها الأصلية أو في حالة معرفة قيم الدالة في نقط معينة $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

تقنية التكامل العددي أو التكامل العادي تعتد على إيجاد المساحة المحددة بالنحني الممثل للدالة f ومحور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ بحيث a و b طرفي التكامل.

وفيما يلي أهم الطرق لحساب القيمة التقريبية لتكامل محدود لدالة $f(x)$

3 -1- طريقة شبه المنحرف

3-1-1- طريقة شبه المنحرف البسيطة



نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على مجال $[a, b]$

طريقة شبه المنحرف البسيطة تعتمد على

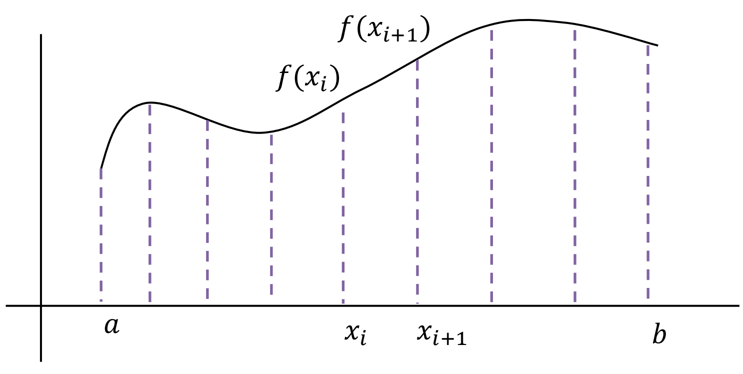
إيجاد مساحة شبه المنحرف الذي قاعدته الكبرى

و الصغرى وارتفاعه $b - a$ أي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

3-1-2- طريقة شبه المنحرف المركبة

تعتمد على تقسيم المجال $[a, b]$ إلى n مجال جزئي $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ ثم نجمع كل مساحات أشباه المنحرف.



لدينا:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

أما $\int_a^b f(x)dx$ فيصبح

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$
$$= \frac{x_1 - x_0}{2}\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \frac{x_2 - x_1}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots$$
$$+ \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}\big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

إذا كانت التجزئة منتظمة

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_{i+1} - x_i = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

فإن

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\big) + f(x_n)\right]$$
$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right]$$

مثال 3-1: ليكن لدينا $I = \int_1^3 lnx\,dx$

القيمة الحقيقية للتكامل $I = \int_1^3 lnx\,dx = [xlnx - x]_1^3 = 3ln3 - 3 + 1 = 1{,}2958$

القيمة التقريبية باستعمال طريقة شبه المنحرف لما $n = 4$ $h = \frac{1}{2}$

$$x_0 = 1\,, \qquad x_1 = 1 + h = \frac{3}{2}\,, x_2 = 1 + 2h = 2\,,\ x_3 = 1 + 3h = \frac{5}{2}\,, x_4 = 3$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(1) + f(3) + 2\left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\right] = 1{,}2821$$

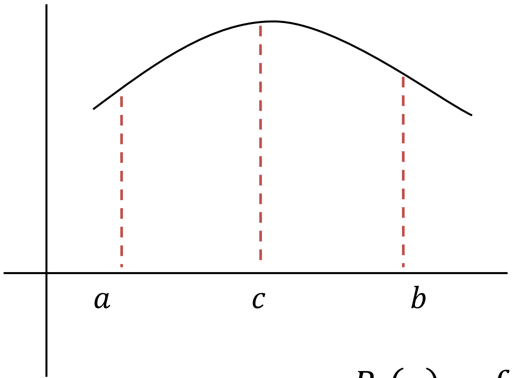
3-1-3- خطأ التقريب: لدينا خطأ تقريب تكامل دالة $f(x)$ على مجال $[a,b]$ هوتكامل خطأ تقريب هذه الدالة بكثير حدود أي $\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| = \int_a^b |f(x) - P_n(x)|dx$
ومن هنا يمكن أن نبرهن

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

بحيث $M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$ و $T_n(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right]$

2-3- طريقة سيمسون

3-2-1- طريقة سيمسون البسيطة



لإجراء تكامل بطريقة سيمسون نحتاج ثلاث نقط

$$x_0 = \mathrm{a}\,, x_1 = \frac{\mathrm{b-a}}{2}\ \ , x_2 = \mathrm{b}$$

نقرب منحني الدالة $f(x)$ بدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية الذي يمر بالنقط الثلاث بحيث:

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f(c)L_1(x) + f(b)L_2(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_2(x)dx$$

$$= f(a)\int_a^b L_0(x)dx + f(c)\int_a^b L_1(x)dx + f(b)\int_a^b L_2(x)dx$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Rightarrow \int_a^b L_0(x)dx = \frac{b-a}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow \int_a^b L_1(x)dx = 4\frac{(b-a)}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow \int_a^b L_2(x)dx = \frac{b-a}{6}$$

بالتالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(b) + f(c)]$$

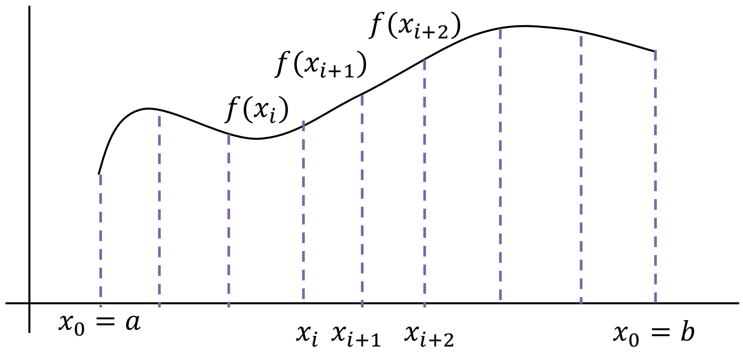
ملاحظة: إذا كان لدينا ثلاث نقط $x_i\,, x_{i+1}\,, x_{i+2}$ بحيث $h = x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ فإن العلاقة تصبح

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

3-2-2- طريقة سيمسون المركبة

تعتمد هذه الطريقة على كتابة التكامل بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$



و هذا باعتبار x_i هو منتصف القطعة $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ بالتالي يصبح التكامل كالتالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_1)\big) + \frac{h}{2}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \cdots + \frac{h}{2}\big(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1})\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right)\right)$$

بالتالي يجب أن يكون n عدد زوجي حتى نستطيع حساب التكامل بواسطة هذه الطريقة على كامل المجال $[a, b]$.

مثال 3-2: أوجد $\int_{0.2}^{0.8} lnx\, dx$ من أجل خطوة $h = 0.1$

الحل:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	-1.609437	-1.203972	-0.916290	-0.693147	-0.510825	-0.356674	-0.2231435

$$\int_{0.2}^{0.8} lnx\, dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_6) + 2\big(f(x_2) + f(x_4)\big) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)\big)\right]$$

$$\approx \frac{0.1}{3}[-1.609437 - 0.2231435 + 2(-0.916290 - 0.510825) + 4(-1.203972 - 0.693147 - 0.356674)]$$

$$= -0.45673275$$

الحل الحقيقي:

$$\int_{0.2}^{0.8} lnx\,dx = [xlnx - x]_{0.2}^{0.8} = -0.45662717$$

$$E = |0.45662717 - 0.45673275| = 0.0001$$

3-2-3- خطأ طريقة سيمسون

يمكن أن نبرهن أيضا أن خطأ طريقة سيمسون يعطى بالعلاقة التالية

$$E_S = \left|\int_a^b f(x)dx - S_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$$

بحيث $M_4 = \max_{[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|$ و

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1})\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right)\right)$$

الفصل الرابع : الإشتقاق العددي

مقدمة: نفرض أنه لدينا دالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة وقابلة للإشتقاق على مجال I. نعرف مشتق الدالة f عند نقطة $x_0 \in I$ كمايلي:

فروق منتهية متقدمة $\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (D.F.P)$

فروق منتهية متأخرة $\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \quad (D.F.R)$

فروق منتهية مركزية $\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} \quad (D.F.C)$

لما $h>0$ صغيرة

$$\left|f'(x)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|=o(h)$$
$$\left|f'(x)-\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right|=o(h)$$
$$\left|f'(x)-\frac{f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}\right|=o(h^2)$$

4-1- حساب المشتق من خلال الفروق غير المقسومة لنيوتن

نفرض أنه لدينا $f(x)$ دالة معطاة بقيمها في $(n+1)$ نقطة مختلفة $x_0,x_1,\dots,x_n$ نريد إيجاد القيمة التقريبية لـ $f'(x^*)$ و $f''(x^*)$ بحيث x^* نقطة كيفية.

4-1-1 حساب $f'(x^*)$

نعتبر $(x_i,f(x_i))$ معطاة بحيث $x_i=x_0+ih$; $i=0,1,\dots,n$ و h الخطوة.

من خلال كثير حدود نيوتن التقريبي لـ $f(x)$ لدينا

$$P_n(x)=f[x_0]+\frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

لتكن $x=x_0+sh$

$$f(x)=f(x_0+sh)=$$

$$f[x_0] + s\Delta f(x_0) + \frac{1}{2!}s(s-1)\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3!}s(s-1)(s-2)\Delta^3 f(x_0) + \frac{1}{4!}s(s-1)(s-2)(s-3)\Delta^4 f(x_0) + \frac{1}{5!}s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\Delta^5 f(x_0)$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{1}{n!}s(s-1)(s-2)\ldots\big(s-(n-1)\big)\Delta^n f(x_0) \qquad (*)$$

لدينا $s = \frac{x-x_0}{h} > 0$ و $\frac{df}{dx} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\frac{df}{ds}$ باشتقاق بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\Big(\Delta f(x_0) + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{6}(3s^2-6s+2)\Delta^3 f(x_0)$$

$$+ \frac{1}{24}(4s^3 - 18s^2 + 22s - 6)\Delta^3 f(x_0)$$

$$+ \frac{1}{120}(5s^4 - 40s^3 + 105s^2 - 100s + 24)\Delta^5 f(x_0)\Big) \qquad (**)$$

لما $x = x_0$ فإن $s = 0$ بالتالي

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\Big(\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(x_0) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(x_0) + \cdots\Big)$$

4-1-2 حساب $f''(x^*)$

نشتق $(**)$ بالنسبة لـ s: $\frac{d^2f}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{h^2}\frac{d^2f}{d^2s}$

$$\frac{d^2f}{d^2x} = \frac{1}{h^2}\Big(\Delta^2 f(x) + \frac{1}{6}(6s-6)\Delta^3 f(x) + \frac{1}{24}(12s^2 - 36s + 22)\Delta^4 f(x) + \frac{1}{120}(20s^3 - 120s^2 + 210s - 100)\Delta^5 f(x) + \cdots\Big)$$

لما $x = x_0$ تكون $s = 0$ فنحصل على $f''(x_0)$ كما يلي

$$f''^{(x_0)} = \frac{1}{h^2}\Big(\Delta^2 f(x_0) - \Delta^3 f(x) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(x) - \frac{5}{6}\Delta^5 f(x) + \cdots\Big)$$

ملاحظة:

نأخذ العلاقة $(**)$ لكن بوجود نقطتين فقط فنجد

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(DF Décentré)}$$

مثال: لتكن لدينا دالة معرفة حسب الجدول التالي

x_i	1	2	3	4
y_i	1	8	27	64

أحسب القيمة التقريبية لـ $f'(1)$.

الحل:

x_i	y_i	$\Delta y(x_i)$	$\Delta^2 y(x_i)$	$\Delta^3 y(x_i)$
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		
4	64			

لدينا $h = 1 , x_0 = 1$

$$\frac{df}{dx}(1) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0)\right] = 7 - \frac{1}{2}(12) + \frac{1}{3}6 = 3$$

القيمة الحقيقية: $f'^{(x)} = 3x^2 = 3$

نلاحظ أن القيمتان متساويتان.

مثال 02:

x_i	y_i	$\Delta y(x_i)$	$\Delta^2 y(x_i)$	$\Delta^3 y(x_i)$	$\Delta^4 y(x_i)$	$\Delta^5 y(x_i)$
3.0	-14					
		3.968				
3.2	-10.032		0.768			
		4.736		-0.464		
3.4	-5.296		0.304		2.048	
		5.040		1.584		-5.120
3.6	-0.256		1.888		-3.072	
		6.928		-1.488		
3.8	6.672		0.400			
		7.323				
4.0	14					

حساب لدينا $f'(3.0)$ و $f''(3.0)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(x_0) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(x_0)\right]$$

$$f'(3.0) = \frac{1}{0.2}\left[3.968 - \frac{1}{2}(0.768) + \frac{1}{3}(-0.464) - \frac{1}{4}(2.048) + \frac{1}{5}(-5.120)\right]$$
$$= 9.4667$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(x_0) - \Delta^3 f(x_0) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(x_0) - \frac{5}{6}\Delta^5 f(x_0)\right]$$

$$f''(3.0) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[0.768 - 0.464 + \frac{11}{12}(2.048) + \frac{5}{6}(-5.120)\right] = 184.4$$

سؤال: ماذا لو طلب $f'(3.2)$

الجواب: لدينا لما $x = 3.2$. فإن $x = x_0 + sh$ فإن $s = 1$ بالتالي نعود للعلاقة (**) ونأخذ $s = 1$

$$f'(3.2) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) + \frac{1}{2}(1)\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{6}(-6)\Delta^3 f(x_0) + \frac{1}{24}(2)\Delta^4 f(x_0) + \frac{1}{120}(-6)\Delta^5 f(x_0)\right]$$

$$f'(3.0) = \frac{1}{0.2}\left[3.968 + \frac{1}{2}(0.768) - (-0.464) + \frac{1}{12}(2.048) - \frac{1}{20}(-5.120)\right]$$
$$= 26.213333$$