قسم الرياضيات	جـــامعة الشهيد حمة لخضر-	مقياس: الجبر 1
سنة أولـــى رياضيات وإعلام آلي	الـوادي كلية العلوم الدقيـقة	2021/2020

حلول سلسلة أعمال موجّهة رقم: 02 (العلاقات والتّطبيقات)

حاول حل التمارين بنفسك قبل لاطلاع على الحلول

تمرين1: نستخدم تعاريف الصورة المباشرة والعكسية لمجموعة بتطبيق

1) ليكن $y \in F$.

$y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B; y = f(x)$ (حسب تعريف الصورة المباشرة لمجموعة بتطبيق)

$\Rightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(A))$ (لأن $x \in A$ و $x \in B$ في آن واحد)

$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$ (حسب تعريف التقاطع).

ومنه $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2) ليكن التطبيق : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعتان $A = \{-2, -\sqrt{3}, 0,1\}$ و $B = \{0,1,2, \sqrt{5}\}$. لدينا $f(A) = \{0,1,3,4\}$ و $f(B) = \{0,1,4,5\}$

$f(A \cap B) = \{0,1\}$ و $f(A) \cap f(B) = \{0,1,4\}$ نلاحظ أن $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

3) بالتعريف نعلم أن $f^{-1}(F) = \{x \in E; f(x) \in F\}$ ومنه $f^{-1}(F) \subset E$. من جهة أخرى وحسب تعريف التطبيق $\forall x \in E; f(x) \in F$ و منه فإن $\mathrm{E} \subset f^{-1}(F)$ وبالتالي $f^{-1}(F) = E$.

4) نفرض أن $A \subset B$ ونبرهن أن $f(A) \subset f(B)$. ليكن $y \in F$

$y \in f(A) \Longrightarrow \exists x \in A; y = f(x)$ (حسب تعريف الصورة المباشرة لمجموعة بتطبيق)

$\Longrightarrow \exists x \in B; y = f(x)$ (لأن $A \subset B$)

$\Longrightarrow y \in f(B)$ (حسب تعريف الصورة المباشرة لمجموعة بتطبيق).

ومنه $f(A) \subset f(B)$.

5. ليكن $x \in E$

$x \in f^{-1}(C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D$ (حسب تعريف الصورة العكسية لمجموعة بتطبيق)

$\Leftrightarrow (f(x) \in C) \vee (f(x) \in D)$ (حسب تعريف الاتحاد).

$\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(C)) \vee (x \in f^{-1}(D))$ (حسب تعريف الصورة العكسية لمجموعة بتطبيق)

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ (حسب تعريف الاتحاد).

اذا $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

تمرين2: ليكن $x, x' \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow \sqrt{2x-3} + 1 = \sqrt{2x'-3} + 1$$ (بطرح 1 من الطرفين)

$$\Longrightarrow \sqrt{2x-3} = \sqrt{2x'-3}$$ (بتربيع الطرفين)

$$\Longrightarrow 2x - 3 = 2x' - 3$$ (بإضافة 3 للطرفين)

$$\Longrightarrow 2x = 2x'$$ (بقسمة الطرفين على2)

$$\Longrightarrow x = x'$$

ومنه التطبيق f متباين.

ليكن $y \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) \Longrightarrow y = \sqrt{2x-3} + 1$$
$$\Longrightarrow y - 1 = \sqrt{2x-3}$$

بما أن $\sqrt{2x-3} \geq 0$ فالمعادلة الأخيرة ليس لها حلول اذا كان $y < 1$. ومنه فالتطبيق f ليس غامرا لأن قيم $y < 1$ ليس لها سوابق .

ملاحظة : التطبيق $k: \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[\to [1; +\infty[$ حيث $k(x) = \sqrt{2x-3} + 1$ غامر ومتباين وبالتالي تقابلي.

التطبيق $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث $h(x,y) = \frac{x-y}{2}$ ليس متباينا لأن: $h(7,5) = h(8.5, 6.5) = \frac{2}{2} = 1$ و $(7,5) \neq (8.5, 6.5)$.

ليكن $s \in \mathbb{R}$.

$$s = h(x,y) \Longrightarrow s = \frac{x-y}{2} \Longrightarrow x - y = 2s \Longrightarrow x = 2s + y$$

ومنه: $\forall s \in \mathbb{R}, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ s = h(x,y)$ حيث $(x,y) = (2s+t, t),\ t \in \mathbb{R}$ اذا h غامر.

التطبيق : $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ والمعرف بـ $g(x,y) = (x+y, xy)$.

نلاحظ أن $g(x,y) = g(y,x)$ لأن الجمع والضرب تبديليان في $\mathbb{R}$ ولكن $(x,y) \neq (y,x)$ في حالة $x \neq y$ليس ومنه التطبيق g ليس متباينا .

ليكن $(s,p) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = (s,p) \Longrightarrow \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

x, y هما اذا هما حلي المعادلة من الدرجة الثانية $X^2 + sX + p = 0$ والتي لا يكون لها حلولا حقيقية اذا كان $\Delta = s^2 - 4p < 0$ وكمثال مضاد من أجل $s = 2$ و $r = 3$ ليس للجملة السابقة حل وبالتالي التطبيق ليس غامرا .

تمرين03 : 1) ليكن $y, y' \in F$. بما أن f غامر فإنه يوجد على الأقل $x, x' \in E$ بحيث $y = f(x)$ و $y' = f(x')$.

$$g(y) = g(y') \Rightarrow g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$ (حسب تعريف التطبيق المركب)

$$\Rightarrow x = x'$$ (لأن $g \circ f$ متباين)

$$\Rightarrow f(x) = f(x')$$ (لأن f تطبيق)

$$\Rightarrow y = y'$$

ومنه g متباين.

2) ليكن $y \in F$ و $z = g(y) \in G$. بما أن $g \circ f$ غامر فإنه يوجد $x \in E$ بحيث : $(g \circ f)(x) = z$ ومنه نجد: $z = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y)$ وبما أن g متباين فإن $y = f(x)$.

اذا f غامر (هنا أثبتنا أن سابقة y بالتطبيق f هي نفسها سابقة $g(y)$ بالتطبيق الغامر $g \circ f$).

3) $\Leftarrow$ نفرض أن f متباين . من التمرين 1 فرع 1) أثبتنا أن $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ مهما يكن التطبيق f. بقي إثبات أن $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

$$y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow \big(y \in f(A)\big) \wedge \big(y \in f(B)\big)$$ (حسب تعريف التقاطع)

$$\Rightarrow \exists x \in A, \exists x' \in B;\ \ y = f(x) = f(x')$$ (حسب تعريف الصورة المباشرة لمجموعة بتطبيق)

$$\Rightarrow x = x'$$ (لأن التطبيق متباين)

$$\Rightarrow \exists x \in A \cap B;\ y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A \cap B)$$ (حسب تعريف الصورة المباشرة لمجموعة بتطبيق)

ومنه : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ اذا $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

$\Rightarrow$ نفرض أن $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ونثبت أن f متباين.

ليكن x, x' عنصران من E بحيث $f(x) = f(x')$. نضع : $A = \{x\}$ و $B = \{x'\}$ لدينا حسب المعطيات

$f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = \{f(x)\}$ ومنه $f(\{x\} \cap \{x'\}) \neq \emptyset$ وبالتالي فإنه يوجد على الأقل

$y \in f(\{x\} \cap \{x'\})$ أي أنه $\exists a \in \{x\} \cap \{x'\};\ y = f(a)$ ولا يمكن أن يتحقق ذلك الا في حالة $a = x = x'$

اذا f متباين.

تمرين4: 1) ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$. $f(2 + \alpha) = (2 + \alpha)^2 - 4(2 + \alpha) + 5 = \alpha^2 + 1$ و

$f(2-\alpha)=(2-\alpha)^2-4(2-\alpha)+5=\alpha^2+1$. نأخذ $\alpha=1$ في المساواة السابقة فنجد $f(1)=f(3)$ و $3\neq 1$ ومنه f ليس متباينا .

2) لدينا $\forall x\in\mathbb{R};\ \ f(x)=(x-2)^2+1\geq 1$. ومنه المعادلة $y=f(x)$ لا تقبل حلا اذا كان $y<1$ ومنه التطبيق f ليس غامرا .

3) ليكن x,x' عددان حقيقيان من المجال $[2;+\infty[$.

$$g(x)=g(x')\Rightarrow (x-2)^2+1=(x'-2)^2+1$$ (بإضافة -1 للطرفين)

$$\Rightarrow (x-2)^2=(x'-2)^2$$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$$\Rightarrow x-2=x'-2$$ (لأن $x-2,x'-2$ موجبان)

$$\Rightarrow x=x'$$

اذا g متباين.

ليكن $y\geq 1$ أي من مجموعة الوصول.

$$y=g(x)\Rightarrow (x-2)^2+1=y$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=y-1$$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين الموجبين)

$$\Rightarrow x-2=\sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{y-1}+2$$

ومنه g غامر. g متباين وغامر فهو تقابلي وتطبيقه العكسي هو$g^{-1}:[1;+\infty[\rightarrow[2;+\infty[$ حيث : $g^{-1}\,(x)=\sqrt{x-1}+2$.

تمرين5 : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $(x^3+2)(x^2+1)=(x^2+1)(x^3+2)$ لأن الضرب تبديلي في $\mathbb{R}$ ومنه $\forall\in\mathbb{R};\ \mathcal{R}(x,x)$ اذا العلاقة $\mathcal{R}$ انعكاسية.

ليكن $x,y\ \in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{R}(x,y)\Rightarrow\ (x^3+2)(y^2+1)=(x^2+1)(y^3+2)$$ (حسب تعريف العلاقة $\mathcal{R}$)

$$\Rightarrow (y^2+1)(x^3+2)=(y^3+2)(x^2+1)$$ (لأن الضرب تبديلي)

$$\Rightarrow (y^3+2)(x^2+1)=(y^2+1)(x^3+2)$$ (لأن العلاقة = تناظرية)

$$\Rightarrow \mathcal{R}(y,x)$$ (حسب تعريف العلاقة $\mathcal{R}$)

ومنه $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{R}(x,y) \Rightarrow \mathcal{R}(y,x)$ اذا $\mathcal{R}$ تناظرية.

ليكن $x,y,z \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y,z) \Rightarrow \begin{cases}(x^3+2)(y^2+1)=(x^2+1)(y^3+2)\\(y^3+2)(z^2+1)=(y^2+1)(z^3+2)\end{cases}$$

بضرب المساواتين طرفا لطرف نجد:

$$(x^3+2)(y^2+1)(y^3+2)(z^2+1)=(x^2+1)(y^3+2)(y^2+1)(z^3+2)$$

اذا كان $y^3+2 \neq 0$ فينتج أن $(x^3+2)(z^2+1)=(x^2+1)(z^3+2)$ ومنه $\mathcal{R}(x,z)$.

اذا كان $y^3+2=0$ فإن $z^3+2=x^3+2=0$ لأن z^2+1 ، y^2+1 و x^2+1 تختلف عن 0 ومنه

$(x^3+2)(z^2+1)=(x^2+1)(z^3+2)=0$ ومنه $\mathcal{R}(x,z)$. اذا $\mathcal{R}$ علاقة متعدية

$\mathcal{R}$ انعكاسية وتناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ.

بصفة عامة صنف تكافؤ عنصر $a \in \mathbb{R}$ هو $\dot{a}=\{x\in\mathbb{R};\ \mathcal{R}(x,a)\}$

$$\mathcal{R}(x,a) \Leftrightarrow (x^3+2)(a^2+1)=(x^2+1)(a^3+2)$$
$$\mathcal{R}(x,0) \Leftrightarrow x^3-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0)\vee(x=2)$$

$$\dot{0}=\{0,2\}$$

<u>تمرين6</u>: لنثبت أن $\mathcal{H}$ علاقة تكافؤ. $x\mathcal{H}y \Leftrightarrow sin^2x+cos^2y=1$

لدينا: $\forall x\in\mathbb{R};\ sin^2x+cos^2x=1$ ومنه $\forall x\in\mathbb{R}; x\mathcal{H}x$ ومنه $\mathcal{H}$ انعكاسية.

من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}$;

$$x\mathcal{H}y \Rightarrow sin^2x+cos^2y=1$$ (تعريف العلاقة $\mathcal{H}$)

$$\Rightarrow (1-cos^2x)+(1-sin^2y)=1$$ (من خواص الدوال المثلثية)

$$\Rightarrow -sin^2y-cos^2x=-1$$

$$\Rightarrow sin^2y+cos^2x=1$$

$$\Rightarrow y\mathcal{H}x$$ (تعريف العلاقة $\mathcal{H}$)

اذا العلاقة تناظرية.

ليكن $x,y,z \in \mathbb{R}$

$$x\mathcal{H}y \ \wedge. y\mathcal{H}z \Rightarrow \begin{cases}sin^2x+cos^2y=1\\sin^2y+cos^2z=1\end{cases}.$$ بالجمع طرفا لطرف نجد

$$sin^2x + \underbrace{cos^2y + sin^2y}_{=1} + cos^2z = 2$$

ومنه $sin^2x + cos^2z = 1$ اذا العلاقة متعدية وبالتالي في علاقة تكافؤ.

صنف تكافؤ العدد $\frac{\pi}{6}$ مثلا هو:

$$\dot{\frac{\pi}{6}} = \left\{x \in \mathbb{R};\ sin^2x + cos^2\frac{\pi}{6} = 1\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}, 7\frac{\pi}{6}, 11\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

$$sin^2x + cos^2\frac{\pi}{6} = 1 \Leftrightarrow sin^2x = 1 - cos^2\frac{\pi}{6} = sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow sinx = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}, 7\frac{\pi}{6}, 11\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

تمرين7: 1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ; x - x = 0 = 0 + 0\sqrt{3}$ ومنه $\mathcal{B}$ علاقة انعكاسية.

ليكن $x, y\ \in \mathbb{R}$

$$x\mathcal{B}y\ \wedge y\mathcal{B}x \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}; x - y = n + m\sqrt{3} \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}; y - x = n' + m'\sqrt{3} \end{cases}$$

بجمع المساواتين طرفا لطرف نجد : $0 = (n + n') + (m + m')\sqrt{3}$ ومنه $0 = (n + n') = (m + m')$

(لأنه مجموع عددين موجبين) . وبالتالي ولنفس السبب فإن: $0 = n = n' = m = m$ اذا $x = y$ ومنه العلاقة $\mathcal{B}$ ضد تناظرية .

ليكن $x, y, z\ \in \mathbb{R}$

$$x\mathcal{B}y\ \wedge y\mathcal{B}z \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}; x - y = n + m\sqrt{3} \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}; y - z = n' + m'\sqrt{3} \end{cases}$$

بجمع المساواتين طرفا لطرف نجد : $x - z = \left(\underbrace{n + n'}_{n''}\right) + \left(\underbrace{m + m'}_{m''}\right)\sqrt{3}$

ومنه $x\mathcal{B}z$ لأن $n'', m'' \in \mathbb{N}$. اذا العلاقة متعدية. بما أن العلاقة $\mathcal{B}$ انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية في علاقة ترتيب.

2) من أجل $x = 2 + \sqrt{5},\ y = 2$ نجد أن $x - y = \sqrt{5}\ ; y - x = -\sqrt{5}$ لا يمكن كتابتهما بالشكل $n + m\sqrt{3}$ لأن الأول سالب أما الثاني فنفرض: $\sqrt{5} = n + m\sqrt{3}$ ومنه: $n = \sqrt{5} - m\sqrt{3}$ وهذا غير ممكن لأن $n \in \mathbb{N}$ اذا : $x\mathcal{B}y\ \wedge y\mathcal{B}x$ وبالتالي فإن $\mathcal{B}$ علاقة ترتيب جزئي .