1- المتتالية الحقيقية:

تعريف:

نسمي متتالية حقيقية كلّ دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

نرمز عادة للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو اختصارا بـ (u_n) عوضا عن $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ، $n\mapsto u(n)$ ونسمي العدد الحقيقي u_n (أي صورة العدد n بهذه الدالة) الحد العام لهذه المتتالية.

أمثلة:

1) متتالية معرفة بحدّها العام: $u_n=(-1)^n$ ، $u_n=\sqrt{n}$ ، $u_n=\dfrac{1}{n+2}$ ، $u_n=\sin(n+1)$ ، $u_n=\sum_{k=0}^{k=n}2^k$

2) متتالية معرفة بعلاقة تدريجية تربط بين عدد من حدودها: أ) $u_{n+1}=2u_n-1,\ u_0=1$ $(u_0=1,u_1=-1,u_2=-3,\dots)$

ب) $u_{n+1}=2u_{n+1}-u_{n-1},\ u_1=1,\ u_2=0$ ، $(u_1=1,\ u_2=0,u_3=-1,\ u_4=-2,\dots)$.

ملاحظة: يمكن تعريف متتالية ابتداء من رتبة معيّنة فقط.

2- المتتاليات المحدودة:

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى إذا تحقق: $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل إذا تحقق: $\exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq m$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل أي إذا تحقق: $\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq M$

أو إذا تحقق: $\exists M\in\mathbb{R},\exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \leq u_n\leq M$

نتيجة: تكون متتالية حقيقية محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة في آن واحد من الأعلى ومن الأسفل.

أمثلة: 1) المتتالية $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$ محدودة من الأسفل بـ 0 و من الأعلى بـ 1 لأنّ: $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq\dfrac{n^2}{n^2+1}\leq 1$

2) المتتالية $u_n=\sqrt{n}$ محدودة من الأسفل بـ 0 وغير محدودة من الأعلى لأنّ: $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq\sqrt{n}$

3) المتتالية $u_n=(-1)^n$ محدودة لأنّ: $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|=|(-1)^n|=1\leq 2$

ملاحظة: لإثبات أنّ متتالية حقيقية محدودة نستعمل البرهان بالتراجع.

مثال: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية معرفة كما يلي: $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$: $u_0=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ لنثبت أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq 2$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0\leq 2$. نفرض أنّ $u_n\leq 2$ و نبرهن أنّ $u_{n+1}\leq 2$

لدينا $u_n\leq 2\Rightarrow u_n+2\leq 4\Rightarrow\sqrt{u_n+2}\leq 2\Rightarrow u_{n+1}\leq 2$ و منه $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq 2$

من جهة أخرى لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$ إذا $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 2$ ونقول أنّ (u_n) محدودة.

3- المتاليات الرتيبة:

تعاريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

◆ (u_n) **متزايدة** إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \le u_{n+1}$ و (u_n) متناقصة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \ge u_{n+1}$

و نقول أنّ (u_n) ثابتة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = u_{n+1}$

◆ إذا كانت المتراجحة تامة > أو (<) نقول أن المتالية متزايدة تماما أو (متناقصة تماما) .

◆ إذا كانت المتالية (u_n) متزايدة فقط أو متناقصة فقط أي لا تغيير اتجاهها على $\mathbb{N}$ نقول أنها متالية رتيبة.

أمثلة: 1) المتالية $u_n = \frac{1}{n+2}$ متناقصة 2) المتالية $u_n = \sqrt{n}$ متزايدة 3) المتالية $u_n = (-2)^n$ غير رتيبة.

ملاحظة: لدراسة رتابة (اتجاه تغيّر) متالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ و يمكن مقارنة $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ بـ: 1 إذا كانت حدود المتالية موجبة.

4- تقارب وتباعد المتاليات الحقيقية:

تعاريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

◆ (u_n) **متقاربة** إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: . $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: \ (n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon) ...(*)$

و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$

◆ **نهاية** (u_n) هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذا تحقق ما يلي: $\forall A > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}: (n \ge n_0 \Rightarrow u_n > A)$

◆ **نهاية** (u_n) هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ إذا تحقق ما يلي: $\forall A > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}: (n \ge n_0 \Rightarrow u_n < -A)$

◆ نقول عن متالية حقيقية إنها متباعدة عندما لا تكن متقاربة أو بعبارة أخرى إذا كانت لا تملك نهاية أو نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$

ونكتب: (u_n) متباعدة إذا تحقق ما يلي: $\forall l \in \mathbb{R}, \ \exists \varepsilon > 0, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ (n \ge n_0 \wedge |u_n - l| \ge \varepsilon)$

ملاحظات:

1) تعيين طبيعة متالية حقيقية (u_n) يعني إثبات تقاربها وتباعدها .

2) إنّ اختيار الرتبة n_0 في التعاريف السابقة متعلق بـ: ε (في حالة النهاية المنتهية) و بـ: A (في حالة النهاية غير المنتهية)

3) تبقى التعاريف السّابقة صحيحة إذا استبدلنا في الطرف الثاني للاستلزام > أو < بـ: ≤ أو ≥.

أمثلة: 1) لنثبت أن المتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرّفة بحدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ متقاربة نحو العدد 0 .

لنثبت أنّ : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: \ (n \ge n_0 \Rightarrow |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon)$

ليكن $\varepsilon > 0$ حسب بديهية أرخميدس فإنّه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^*$ يحقّق: $n_0 \times \varepsilon > 1$ أي $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ وبالتّالي: $\forall n \ge n_0: \ \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

2) لنثبت أن المتالية (u_n) المعرّفة بحدها العام $u_n = \frac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو العدد 3 .

لنثبت أنّ : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: \ (n \ge n_0 \Rightarrow |\frac{3n}{n+2} - 3| = \frac{6}{n+2} < \varepsilon)$

ليكن $\varepsilon > 0$ لدينا $\frac{6}{n+2} < \frac{6}{n}$. من أجل $\frac{6}{n} < \varepsilon$ أي $n > \frac{6}{\varepsilon}$ يكفي أن نختار $n_0 = [\frac{6}{\varepsilon}] + 1$ وبالتالي: $\forall n \ge n_0 : \frac{6}{n+2} < \varepsilon$

3) لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها العام $u_n = 2n^2 + 3$ متباعدة. لنثبت باستعمال التعريف أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

نثبت أنّ: $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \ge n_0 \Rightarrow 2n^2 + 3 > A)$

ليكن $A > 0$. لدينا $2n^2 + 3 > 2n^2$ من أجل $2n^2 > A$ أي $n > \sqrt{\frac{A}{2}}$ يكفي أن نختار $n_0 = [\sqrt{\frac{A}{2}}] + 1$ وبالتالي: $\forall n \ge n_0 : 2n^2 + 3 > A$

مبرهنة: (وحدانية النهاية) إذا تقاربت متتالية حقيقية فإن نهايتها وحيدة.

برهان: ط1: نبرهن بالخلف لتكن l و l' نهايتين مختلفتين لمتتالية متقاربة (u_n) نفرض أن $l < l'$. ولنختر في التعريف السابق $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$.

ومن ثمّ فإن: $\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \ge n_2 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ كذلك $\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \ge n_1 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon$

وعندما نضع $n_0 = \max(n_1, n_2)$ نستنتج : $n \ge n_0 \Rightarrow l' - \frac{l'-l}{2} < u_n < l + \frac{l'-l}{2}$ أي : $n \ge n_0 \Rightarrow \frac{l'+l}{2} < u_n < \frac{l'+l}{2}$

وفي العلاقة السابقة تناقض واضح. ومنه المطلوب.

ط2: لتكن l و l' نهايتين لمتتالية متقاربة (u_n) وبالتالي:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \ge n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ كذلك $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : n \ge n_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$

بوضع $n_0 = \max(n_1, n_2)$ ومن أجل $n \ge n_0$ لدينا: $|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \le |u_n - l| + |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ومنه نستنتج أنّه من أجل كل $\varepsilon > 0$: $|l - l'| < \varepsilon$ وبالتالي: $|l - l'| = 0$ و منه $l = l'$

نظرية: كلّ متتالية حقيقية متقاربة هي متتالية محدودة. والعكس غير صحيح.

البرهان: للتأكد من ذلك نفرض أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو عدد l أي: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

ثم نختار في هذه العلاقة $\varepsilon = 1$ مثلا، فيكون: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - l| < 1$ ومنه: $n \ge n_0 \Rightarrow |u_n| < 1 + |l|$

ليكن K حادّا من الأعلى لـ: $\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{n_0-1}|\}$ و $M = \max\{1+|l|, K\}$. لاحظ عندئذ أن: $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \le M$ وهو المطلوب.

نتيجة: كلّ متتالية حقيقية غير محدودة هي متتالية متباعدة.

أمثلة:

1) المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \frac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0 . ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة $(*)$: $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. فهي محدودة $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{2}$

2) المتتالية المعرفة بـ: $u_n = -\frac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو -3 . ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة $(*)$: $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. فهي محدودة $\forall n \in \mathbb{N} : -3 < -\frac{3n}{n+2} \le 0$

3) المتتالية $u_n = (-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة) . يمكن تبرير ذلك بالخلف، نفرض وجود نهاية وحيدة l لهذه المتتالية تحقق العلاقة:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)...(*)$$

من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ لدينا $\forall n \ge n_0 : \ |u_{n+1} - u_n| = 2 \le |u_{n+1} - l| + |u_n - l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وهذا تناقض.

4) المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \sqrt{n}$ غير محدودة فهي متباعدة لأنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ $(\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ n \ge n_0 \Rightarrow \sqrt{n} > A)$

يكفي أن نأخذ: $n_0 = [A]^2 + 2$.

5- عمليات حول المتتاليات:

مبرهنة 1: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين متقاربتين حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ عندئذ لدينا

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha l + \beta l', (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = l\times l'$ 3) عندما يكون $l'\neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = |l|$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ 6) إذا كان ابتداء من رتبة معينة $u_n \le v_n$ فإن $l \le l'$.

مثال: لنحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث: $u_n = \frac{2n^3 - n^2 + 1}{n^3 - 4}$. لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3}{n^3}\times\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{4}{n^3}} = \frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{4}{n^3}}$

ونعلم أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k}{n^p} = 0, k\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{N}^*$ و بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

نتيجة: نستخلص من الخاصية 6) أن: $u_n \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le 0$, $u_n \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ge 0$

تحذير : إذا كان $u_n > 0$ ابتداء من أول رتبة أو ابتداء من رتبة معينة فهذا يؤدي إلى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ge 0$ و لا يؤدي بالضرورة إلى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$.

مثال: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n = \frac{1}{n} > 0$ لكن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

مبرهنة 2: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين لدينا

إذا كانت (u_n) محدودة و نهاية (v_n) تؤول إلى الصفر فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = 0$

البرهان:

(u_n) محدودة هذا يعني: $\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le M$ ....(1)

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ هذا يعني: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\ge n_0 \Rightarrow |v_n|<\varepsilon)$..........(2)

من (1) و (2) لدينا $|u_n\times v_n| = |u_n|\times|v_n| \le \varepsilon M = \varepsilon' > 0$

ومنه يكون: $\forall\varepsilon'>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\ge n_0 \Rightarrow |u_n v_n|<\varepsilon')$ و بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = 0$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ نضع $u_n = \sin n$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n| = |\sin n|\le 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

بما أنّ (u_n) محدودة و نهاية (v_n) تؤول إلى الصفر فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = 0$

مبرهنة 3: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين لدينا:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty$ 2) إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\neq 0$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n} = 0$

3) $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l\in\mathbb{R})\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \pm\infty$ 4) $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \pm\infty$

5) $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l\in\mathbb{R}^*)\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = \varepsilon.\infty$ حيث ε هي إشارة l .

مثال: إذا كان $a>1$ فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ لأنّ: $\forall n\in\mathbb{N}: a^n > n(a-1)$. أمّا إذا كان $a\in]-1,1[$ فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

مبرهنة 4: (نظرية الحصر):

إذا كانت لدينا ثلاث متتاليات حقيقية تحقق: $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim v_n = \lim w_n = l\ (l \in \mathbb{R})$ فإن:

(u_n) متقاربة و لها نفس النهاية l .

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$. إنّ تقارب المتتاليتين (v_n) و (w_n) نحو k يؤدي إلى وجود عددين طبيعيين n_1 و n_2 بحيث

$n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$ و $n \geq n_2 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$. نضع $n_0 = \max(n_1, n_2)$ وبالتالي:

$n \geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon < v_n - l \leq u_n - l \leq w_n - l < \varepsilon$. و هذا مكافئ ل : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ ومنه تقارب (u_n) نحو l .

مثال: لنحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{-1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ و بما أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$

مبرهنة 5: لتكن (u_n) متتالية حقيقية و l عددا حقيقيا .

إذا وجد n_0 عددا طبيعيا ثابتا بحيث $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l < 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

البرهان: لدينا $\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| = \left|\frac{u_{n_0+1} u_{n_0+2} \ldots\ldots u_{n-1} u_n}{u_{n_0} u_{n_0+1} \ldots\ldots u_{n-1}}\right| = \left|\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right| \times \left|\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\right| \times \ldots\ldots \times \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|$

حسب الفرضية يكون $\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| < l \times l \times \ldots\ldots \times l = l^{n-n_0}$ ومنه $\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| < l^{n-n_0} < 1$ إذا $\forall n \geq n_0 : 0 < |u_n| < |u_{n_0}| l^{n-n_0}$

بما أنّ $0 < l < 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} l^{n-n_0} = 0$ ومنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ و بالتالي يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

ملاحظات:

1) إذا كان $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > l > 1$ فإنّ المتتالية (u_n) متباعدة.

2) إذا كان $l = 1$ لا نستطيع الحكم على تقارب أو تباعد المتتالية (u_n) .

مثال: لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} :\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a a^n}{(n+1) n!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$ ويكون $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$

من أجل $\varepsilon = 1$ يوجد n_0 عددا طبيعيا ثابتا بحيث $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ وبالتالي حسب النظرية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

6- تقارب المتتاليات الرتيبة:

نظرية:

1. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو $\sup(u_n)$.
2. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو $\inf(u_n)$.

برهان: نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى. وبالتالي فإنّ $\sup u_n$ موجود .

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \sup u_n - \varepsilon < u_{n_0} \leq \sup u_n < \sup u_n + \varepsilon \ldots.\ (1)$$

من تزايد المتتالية نجد : $n \ge n_0 \;\Rightarrow\; u_n \ge u_{n_0} \;....\; (2)$.

من (1) و (2) نستنتج أنّ: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow \sup u_n - \varepsilon < u_{n_0} \le u_n \le \sup u_n < \sup u_n + \varepsilon$

التي يمكن اختصارها في الكتابة: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow \sup u_n - \varepsilon < u_n < \sup u_n + \varepsilon$

ونستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $\sup u_n$.

يمكن البرهان بطريقة مماثلة على الجزء المتبقي من النظرية.

أمثلة:

1) المتتالية $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى لأنّ: $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1)$ و بالتالي متقاربة نحو 1 $\lim\limits_{\infty} u_n = \sup(u_n) = 1$

2) المتتالية $v_n = -1 + \dfrac{1}{2^n}$ متناقصة ومحدودة من الأسفل لأنّ: $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > -1)$ وبالتالي متقاربة نحو -1 $\lim\limits_{\infty} v_n = \inf(v_n) = -1$

7- المتتاليات الجزئية (المستخرجة):

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية. نسمي متتالية جزئية (مستخرجة) من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كل متتالية (v_n) حدها العام v_n يساوي $u_{f(n)}$ حيث: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيق متزايد تماما .

أمثلة:

1) لتكن المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ المتتالية المعرفة بـ: $v_n = u_{2n} = \dfrac{1}{(2n)^2} = \dfrac{1}{4n^2}$ مستخرجة من المتتالية (u_n) .

2) لتكن المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \dfrac{(1-(-1)^n)}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ المتتاليتان المعرفتان بـ: $v_n = u_{2n} = \dfrac{2}{(2n)^2} = \dfrac{1}{2n^2}$ و $w_n = u_{2n+1} = 0$ مستخرجتان من المتتالية (u_n) .

نظرية1: كل متتالية مستخرجة من متتالية حقيقية متقاربة هي كذلك متقاربة نحو نفس النهاية و العكس غير صحيح.

برهان: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية متقاربة نحو عدد l و (v_n) متتالية مستخرجة من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{f(n)}$ حيث: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيق متزايد تماما . لنثبت أنّ (v_n) متقاربة نحو l .

لدينا $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; n \ge n_0 \;\Rightarrow\; |u_n - l| < \varepsilon ...(I)$

من جهة أخرى لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} f(k) - f(k-1) \ge 0 + \sum\limits_{k=1}^{k=n} 1 = n$

ومنه $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} :\; f(n) \ge f(n_0) \ge n_0 \;\Rightarrow\; |v_n - l| = |u_{f(n)} - l| < \varepsilon$

العكس غير صحيح فمثلا المتتالية (v_n) المستخرجة من $u_n = (-1)^n$ حيث $v_n = u_{2n} = 1$ متقاربة لكن $u_n = (-1)^n$ متباعدة.

ملاحظات:

1) يمكن أن نبرهن بالمثل بأنّه، إذا كانت متتالية تؤول إلى $+\infty$ $(-\infty)$ فإنّ كل متتالية جزئية من هذه المتتالية تؤول كذلك إلى $+\infty$ $(-\infty)$.

2) باستعمال العكس النقيض للاستلزام في النظرية السابقة نحصل على شرط كاف لتباعد متتالية:

إذا كانت لمتتاليتين جزئيتين من (u_n) نهايتين مختلفتين فإنّ المتتالية (u_n) متباعدة.

مثال: لنثبت أنّ المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \cos(n+\frac{1}{n})\pi$ متباعدة.

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{2n} = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\pi+\frac{\pi}{2n+1}) = -1$ ، حسب الملاحظة السابقة (u_n) متباعدة.

خاصية: تكون المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد l إذا وفقط إذا كانت المتتاليتان الجزئيتان (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متقاربتين نحو نفس النهاية l.

8- النهاية السفلى و النهاية العليا لمتتالية:

أ- القيمة اللاصقة لمتتالية حقيقية:

تعريف: نقول عن $a\in\overline{\mathbb{R}}$ ($a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$) قيمة لاصقة لمتتالية (u_n) إذا كان a نهاية لمتتالية جزئية من (u_n)

ملاحظة: إذا كانت (u_n) تملك قيمة لاصقة وحيدة $a\in\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$

مثال: $u_n = [1+(-1)^n]n$ العدد 0 هو قيمة لاصقة لـ: (u_n) لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-1)(2n+1) = 0$

$+\infty$ هي قيمة لاصقة لـ: (u_n) لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+1)2n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty$

تعريف النهاية السفلى و النهاية العليا لمتتالية: لتكن (u_n) متتالية حقيقية، نرمز بـ: $Ad(u_n)$ لمجموعة القيم اللاصقة للمتتالية (u_n)

1) النهاية العليا لـ: (u_n) و نرمز لها بـ: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ هي الحدّ الأعلى للمجموعة $Ad(u_n)$ و نكتب: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \sup(Ad(u_n))$

2) النهاية السفلى لـ: (u_n) و نرمز لها بـ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ هي الحدّ الأسفل للمجموعة $Ad(u_n)$ و نكتب: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \inf(Ad(u_n))$

مثال: في المثال السابق $Ad(u_n) = \{0,+\infty\}$ ومنه $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \sup(Ad(u_n)) = +\infty$ و $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \inf(Ad(u_n)) = 0$

خواص:) إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيتين فإنّ:

1) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n \le \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ 2) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n+v_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n$ 3) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n+v_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n + \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n$

4) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(-u_n)$ 5) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(-u_n)$ 6) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in\overline{\mathbb{R}}$ فإن: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أمثلة: 1) إذا كانت: $u_n = 1+(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}$ فإنّ $Ad(u_n) = \{0,1\}$ ومنه $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = 0 < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = 2$

2) إذا كانت $u_n = -n$ فإنّ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \lim\limits_{x\to\infty} u_n - \infty$ 3) إذا كانت $u_n = (-1)^n n$ فإنّ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\infty < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = +\infty$

4) إذا كانت $u_n = [-1-(-1)^n]n$ فإنّ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\infty < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = 0$

9- المتتاليتان المتجاورتان:

تعريف: نقول عن متتاليتين حقيقيتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت نهاية متتالية الفرق $(u_n - v_n)$ متقاربة نحو 0 .

مثال: المتتاليتان $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$ متجاورتان لأن أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة وفرقهما (المساوي لـ: $v_n - u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$) يؤول إلى الصفر.

نظرية: كل متتاليتين متجاورتين متقاربتان نحو نفس النهاية.

البرهان: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متجاورتين أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة. نضع من أجل كل n : $w_n = u_n - v_n$. من الواضح أن المتتالية (w_n) متزايدة، علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ حسب فرض التجاور. ولذا $\sup\limits_n w_n = 0$. ومنه، من أجل كل n : $w_n \le 0$. وبالتالي : $u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le v_n \le \ldots \le v_1 \le v_0$. وهكذا يتضح أن المتتاليتين رتيبتان ومحدودتان (بـ u_0 و v_0) . إذن فهما متقاربتان علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. وهو المطلوب.

10 . **نظرية بولزانو– فيرستراش** Bolzano-Weierstrass: من كل متتالية محدودة يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.

مثال: المتتالية $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$ محدودة حسب النظرية يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة مثلا: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{2n+1}) = 1$

11– متتاليات كوشي:

تعريف: نقول عن متتالية حقيقية (u_n) أنها متتالية كوشي إذا كانت تحقق شرط كوشي أي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in IN : \forall (m,n) \in IN^2,\ [m > n \ge n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon]$$

يمكن أيضا التعبير عن هذه العلاقة بالكتابة: . $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists n_0 \in IN, \forall (n,p) \in IN^2 : \quad [n \ge n_0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon]$

مثال:

1) لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ متتالية كوشي

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $m \in \mathbb{N}^*$ حيث $m > n$ لدينا: $|u_m - u_n| = \left|\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right| = \left|\dfrac{n^2 - m^2}{m^2 n^2}\right| = \dfrac{(n-m)(n+m)}{m^2 n^2}$ وبما أنّ: $0 < m - n < m$ و $0 < n + m < 2m$ إذا $|u_m - u_n| < \dfrac{2}{n^2}$. من أجل $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$ نجد $n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$ وبالتالي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in IN\ (n_0 = [\sqrt{2/\varepsilon}] + 1) : [(m > n \ge n_0) \Rightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon]$$

ملاحظة: تعود أهمية نظرية كوشي إلى أنها تسمح بدراسة طبيعة متتالية (أي معرفة ما إذا كانت متقاربة أم متباعدة) دون معرفة نهايتها (في حالة تقاربها) .

نظرية1: كلّ متتالية حقيقية متقاربة هي متتالية كوشي .

برهان: **لتكن** (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد l . لدينا $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in IN : \forall n \in IN,\ [n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

نستطيع أن نكتب: $\forall n > m \ge n_0 : |u_n - u_m| = |(u_n - l) + (u_m - l)| \le |u_n - l| + |l - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ومنه (u_n) هي متتالية كوشي .

نتيجة: كلّ متتالية ليست كوشية هي متتالية متباعدة

مثال: لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ متباعدة.

يكفي أن نثبت أن (u_n) ليست متتالية كوشي أي: $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}^* : \left[\, n \ge n_0 \wedge p \in \mathbb{N} \wedge |u_{n+p} - u_n| \ge \varepsilon \,\right]$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . $n = p = n_0$

لدينا $u_{2n}-u_n=(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\geq n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\Rightarrow u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$

لكن $\varepsilon=\frac{1}{2}$ إذا كانت المتتالية كوشية فإنه يوجد n_0 حيث من أجل $n\geq 0$ و $p>0$ يكون $|u_n-u_{n+p}|<\varepsilon$ لكن هذا غير صحيح لأنه:

$$|u_n-u_{n+p}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}>\frac{1}{2}$$

نظرية2: إذا كانت المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي فهي محدودة .

البرهان: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي إذا تحقق: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in IN:\forall(m,n)\in IN^2,\ [m>n\geq n_0\Rightarrow|u_m-u_n|<\varepsilon]$

نختار في هذه العلاقة السابقة $m=n_0$ و $\varepsilon=1$ نجد: $n\geq n_0\Rightarrow|u_n|<|u_{n_0}|+\varepsilon$

وبالتالي فكل عناصر المتتالية التي دليلها أكبر من أو يساوي n_0 محدودة. ثم إن المجموعة المنتهية $\{u_0,u_1,...,u_{n_0-1}\}$ محدودة بأكبر عنصر فيها . ومنه فالمتتالية (u_n) محدودة.

نظرية3: إذا كانت المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي و إذا تقاربت متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ منها، فهي متقاربة.

البرهان: لنفترض أنّ: $\lim_{n\to+\infty}u_{\varphi(n)}=l$. و ليكن $\varepsilon>0$، عندئذ يوجد $n_1\in\mathbb{N}$ بحيث: $n\geq n_1\Rightarrow|u_{\varphi(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$

كذلك يوجد $n_2\in\mathbb{N}$ بحيث: $m>n\geq n_2\Rightarrow|u_m-u_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. لنضع $n_0=\max(n_1,n_2)$ فيكون لدينا

$|u_{\varphi(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ و $|u_{\varphi(n)}-u_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ و ذلك لأنّ $m=\varphi(n)\geq n$ ومنه:

$n\geq n_0\Rightarrow|u_n-l|\leq|u_n-u_{\varphi(n)}|+|u_{\varphi(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ وهذا يثبت تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نظرية4: كلّ متتالية حقيقية تحقق شرط كوشي هي متتالية متقاربة.

البرهان: : لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي حسب النظرية 2 فهي محدودة و استنادا الى نظرية بولزانو– فيرستراش يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة و اعتمادا على النظرية 3 نستنتج أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

قسم الرياضيات	جـــامعة الـوادي	مقياس: تحليل 1
سنة أولـــى MI	كلية العلوم الدقيقة	2021/2020

سلسلة أعمال موجّهة رقم 02 (المتتاليات الحقيقية)

تمرين1: لتكن (u_n) متتالية حقيقية. اكتب على شكل قضيّة مكمّمة كل جملة من الجمل التالية:

1) المتتالية (u_n) ثابتة ابتداءً من رتبة معيّنة. 2) المتتالية (u_n) متزايدة ابتداءً من رتبة معيّنة.

3) المتتالية (u_n) غير متقاربة نحو العدد 0 . 4) المتتالية (u_n) غير متناقصة ابتداء من رتبة معيّنة.

تمرين2: بيّن مستخدما تعريف التقارب، أن نهاية المتتالية (u_n) هي l في كل ما يأتي:

1) $u_n = \frac{1}{n^2}, l = 0$ (*2) $u_n = \frac{3n+(-1)^n}{3n+5}$, $l = 1$ (3) $u_n = -n^2+n-1$, $l = -\infty$ (4) $u_n = \ln[\ln(n)]$, $l = +\infty$

تمرين3: احسب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$ (2) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (3) $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$ (*4) $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n}[kx],\ x\in\mathbb{R}$ (5) $u_n = \frac{\pi^n}{1\times3\times\ldots\times(2n+1)}$

تمرين4* : لتكن (u_n) المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n},\ u_0 = \sqrt{2}$. **1.** اثبت أنّ 2 حادّ من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2. اثبت أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:\ 2-u_{n+1} < \frac{2-u_n}{2}$ **3.** استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

تمرين5: لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!}$. **1.** اثبت أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية متزايدة.

2. اثبت أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ **3.** استنتج أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n < 2$ و أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة.

تمرين6: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين موجبتين تماما . نضع : $\forall n\in\mathbb{N}: w_n = \frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}$. اثبت أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

تمرين7*: لتكن (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات حقيقية، $a\in\mathbb{R}$ نفرض أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n+w_n) = 3a$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2+v_n^2+w_n^2) = 3a^2$

اثبت أنّ: كلاّ من المتتاليات (u_n) ، (v_n) و (w_n) متقاربة نحو a .

تمرين8: عيّن $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ و $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ (النهاية السفلى و النهاية العليا للمتتالية (u_n)) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n = \frac{1}{n}+(-1)^n$ (*2) $u_n = n^{(-1)^n n}$ (3) $u_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$ (4) $u_n = 1+n\sin\frac{n\pi}{2}$ (5) $u_n = (2\cos\frac{2n\pi}{3})^n$

تمرين9: لتكن (u_n) متتالية حقيقية . **1.** أثبت أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

2. استنتج أن: $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l)\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l')\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n^2} = l'') \Rightarrow (l = l' = l'')\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l)$

3. نفرض أنّ: $u_n = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!},\ n\geq1$. اثبت أنّ المتتاليتين (u_{2n-1}) و (u_{2n}) متجاورتان و ماذا يستنتج ؟ .

تمرين10: ليكن $a\geq1$.نعتبر (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين كما يلي: $u_0 = a,\ v_n = \frac{a}{u_n},\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

اثبت أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان و احسب l نهايتهما المشتركة.

تمرين11: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين كما يلي: $u_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{2^2}{4^2}+\ldots+\frac{n^2}{4^n}$ و $v_n = \frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2}$

مستعملا شرط كوشي ادرس طبيعة كلاّ من (u_n) و (v_n) .

تمرين12* : لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+\frac{1}{2^n}}$. **1.** تحقق أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq1$ **2.** برهن أنّ (u_n) متتالية كوشي.

تصحيح سلسلة أعمال موجّهة رقم: 02 (المتتاليات الحقيقية)

حل ت1: لتكن (u_n) متتالية حقيقية. كتابة كل جملة من الجمل التالية على شكل قضيّة مكمّمة

1) المتتالية (u_n) ثابتة ابتداءً من رتبة معيّنة. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n$

2) المتتالية (u_n) متزايدة ابتداءً من رتبة معيّنة. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\ , u_{n+1} \geq u_n$

3) المتتالية (u_n) غير متقاربة نحو العدد 0 . $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \wedge |u_n - l| \geq \varepsilon)$

4) المتتالية (u_n) غير متناقصة ابتداء من رتبة معيّنة. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\ , u_{n+1} > u_n$

حل ت2: باستخدام تعريف التقارب، إثبات أن نهاية المتتالية (u_n) هي l : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2}, l = 0$: إثبات أنّ: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon)$. يكفي أن نختار: $n_0 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$

3) $u_n = -n^2 + n - 1\ , l = -\infty$: إثبات أنّ: $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow -n^2 + n - 1 < A)$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : -n^2 \leq -n^2 + n - 1 < A \Rightarrow n^2 > -A \Rightarrow n > \sqrt{-A}$. يكفي أن نختار: $n_0 = \left[\sqrt{-A}\right] + 1$

4) $u_n = \ln[\ln(n)]\ , l = +\infty$: إثبات أنّ: $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow \ln[\ln(n)] > A)$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \ln(\ln(n)) > A \Leftrightarrow \ln(n) > e^A \Leftrightarrow n > \exp(e^A)$. يكفي أن نختار: $n_0 = \left[\exp(e^A)\right] + 2$

حل ت3: حساب نهاية المتتالية (u_n):

1)
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (n + \sqrt{(n+1)(n+2)}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3n-2}{n + \sqrt{(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{-3 - \frac{2}{n}}{1 + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)}} = \frac{-3}{2}$$

2)
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) \overset{m=\frac{1}{n}}{=} \lim_{m\to 0} \exp\left(\frac{\ln(1+m)}{m}\right) = \exp(1) = e$$

3)
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n} = 1$$

5) $u_n = \dfrac{\pi^n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}$. لدينا $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\pi^{n+1}}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)(2n+3)} \times \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{\pi^n} = \dfrac{\pi}{2n+3}$

و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n+3} = 0$ حسب المبرهنة $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

حل ت5: لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k!}$

1. إثبات أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة: $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \dfrac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$

2. إثبات أنّ: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

نبرهن بالتراجع: من أجل $n=1$ لدينا: $1=\frac{1}{2^0}\leq 1=\frac{1}{1!}$. نفرض أنّ : $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ و نثبت أنّ: $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$

لدينا: $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n+1}.\frac{1}{2^{n-1}}\leq\frac{1}{2}.\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$

3. استنتاج أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n<2$ و أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة.

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ بالتعويض بقيم $n\in\mathbb{N}^*$ وبجمع المتباينات نجد: $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^{k-1}}$ وبالتالي $u_n\leq\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}<2$

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

حل ت6: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين موجبتين تماما . نضع : $\forall n\in\mathbb{N}: w_n=\frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}$.

إثبات أنّ: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=0\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}w_n=0$. 1) نفرض أنّ : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

لدينا $0\leq w_n=\frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}\leq\frac{u_n^3+u_n^2v_n+v_n^3+u_nv_n^2}{u_n^2+v_n^2}=\frac{u_n^2(u_n+v_n)+v_n^2(u_n+v_n)}{u_n^2+v_n^2}=u_n+v_n\Rightarrow 0\leq w_n\leq u_n+v_n$

وبتطبيق نظرية الحصر نجد : $\lim_{n\to+\infty}w_n=0$

2) نفرض أنّ : $\lim_{n\to+\infty}w_n=0$. نعتبر من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_n=\max\{u_n,v_n\}$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}: w_n=\frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}\geq\frac{M_n^3}{2M_n^2}=\frac{M_n}{2}\geq0\Rightarrow(\forall n\in\mathbb{N}:0\leq\frac{M_n}{2}\leq w_n)$

وبتطبيق نظرية الحصر نجد : $\lim_{n\to+\infty}M_n=0$ وبما أنّ: $0\leq u_n\leq M_n$ و $0\leq v_n\leq M_n$ وبتطبيق نظرية الحصر مرّة أخرى في كلي

المتباينيتين نجد: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$

حل ت8: تعيين $\underline{\lim}_{n\to+\infty}u_n$ و $\overline{\lim}_{n\to+\infty}u_n$. نرمز بـ: $Ad(u_n)$ لمجموعة القيم اللاصقة للمتتالية (u_n)

1) $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$: لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}+1\right)=1$ و $\lim_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)=-1$ ومنه $Ad(u_n)=\{-1,+1\}$

إذا $\overline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\sup(Ad(u_n))=1$ و $\underline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\inf(Ad(u_n))=-1$

3) $u_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$: لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n+1]{1+2^{-(2n+1)}}=1$ من جهة أخرى لدينا

$$\lim_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{1+2^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left[\frac{1}{2n}\ln(1+2^{2n})\right]=\lim_{n\to+\infty}\exp\frac{1}{2n}\left[\ln 2^{2n}(2^{-2n}+1)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\exp\frac{1}{2n}\left[2n\ln 2+\ln(2^{-2n}+1)\right]=\lim_{n\to+\infty}\exp\left[\ln 2+\frac{\ln(2^{-2n}+1)}{2n}\right]=\exp(\ln 2)=2$$

ومنه $Ad(u_n)=\{1,2\}$ إذا $\overline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\sup(Ad(u_n))=2$ و $\underline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\inf(Ad(u_n))=0$

4) $u_n=1+n\sin\frac{n\pi}{2}$ لدينا $u_n=1+n\sin\frac{2n\pi}{4}$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_{4n}=\lim_{n\to+\infty}(1+4n\sin\frac{4n\pi}{2})=\lim_{n\to+\infty}\left(1+4n\sin 2n\pi\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+4n(0)\right)=1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{4n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{4n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+2)\sin\frac{(4n+2)\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+2)\sin\left(\pi+2n\pi\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+2)(0)\right)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{4n+3}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+3)\sin\frac{(4n+3)\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+3)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{4n\pi}{2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-(4n+1)\right)=-\infty$$

ومنه $Ad(u_n)=\{-\infty,1,+\infty\}$ إذا $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n=\sup(Ad(u_n))=+\infty$ و $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n=\inf(Ad(u_n))=-\infty$

5) $u_n=(2\cos\frac{2n\pi}{3})^n$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{3n}=\lim_{n\to+\infty}(2\cos\frac{6n\pi}{3})^{3n}=\lim_{n\to+\infty}(2\cos 2n\pi)^{3n}=\lim_{n\to+\infty}(2\times 1)^{3n}=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{2(3n+1)\pi}{3}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(-1\right)^{3n+1}$$

و نستنتج أنّ (u_{3n+1}) لا تقبل نهاية.

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{2(3n+2)\pi}{3}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2n\pi\right)\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(+1\right)^{3n+1}=1$$

ومنه $Ad(u_n)=\{1,+\infty\}$ إذا $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n=\sup(Ad(u_n))=+\infty$ و $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n=\inf(Ad(u_n))=1$

<u>**حل ت9:**</u> لتكن (u_n) متتالية حقيقية . **1**. أثبات أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=l$

♦ نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$. لدينا $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\geq n_0\Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon)$ ومنه نستنتج أنّ:

$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(2n\geq n\geq n_0\Rightarrow |u_{2n}-l|<\varepsilon)$ و $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(2n+1>n\geq n_0\Rightarrow |u_{2n+1}-l|<\varepsilon)$

إذا $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l$

♦ نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l$.

لدينا $\forall\varepsilon>0, \exists n_1\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\geq n_1\Rightarrow |u_{2n}-l|<\varepsilon)...(1)$ و $\forall\varepsilon>0, \exists n_2\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\geq n_2\Rightarrow |u_{2n+1}-l|<\varepsilon)...(2)$

بوضع $n_0=\max(2n_1, 2n_2+1)$ و بناء على (1) و (2) فإنّ: $|u_n-l|<\varepsilon$ من أجل كل $n\geq n_0$. و بالتالي: $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

2. استنتاج أن: $(\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=l)\wedge(\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l')\wedge(\lim_{n\to+\infty} u_{n^2}=l'')\Rightarrow(l=l'=l'')\wedge(\lim_{n\to+\infty} u_n=l)$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{4n^2}=\lim_{n\to+\infty} u_{2(2n^2)}=l$ كذلك $\lim_{n\to+\infty} u_{4n^2}=\lim_{n\to+\infty} u_{(2n)^2}=l''$ و بالتالي نستنتج أنّ: $l=l''$

من جهة أخرى $\lim_{n\to+\infty} u_{4n^2+4n+1}=\lim_{n\to+\infty} u_{2(2n^2+2n)+1}=l'$ كذلك $\lim_{n\to+\infty} u_{4n^2+4n+1}=\lim_{n\to+\infty} u_{(2n+1)^2}=l''$ و بالتالي نستنتج أنّ: $l'=l''$

وأخيرا نستنتج أنّ: $l=l'$ و بالتالي: $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l$ وحسب السؤال (1) يكون: $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

3. نفرض أنّ: $u_n=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n)!},\ n\geq 1$. إثبات أنّ المتتاليتين (u_{2n-1}) و (u_{2n}) متجاورتان

لدينا $u_{2n}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{1}{(4n)!}$ و $u_{2n-1}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-...-\frac{1}{(4n-2)!}$

$u_{2(n+1)}-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}=-\frac{1}{(4n+2)!}+\frac{1}{(4n+4)!}<0$ ومنه (u_{2n}) متناقصة .

$u_{2(n+1)-1}-u_{2n-1}=u_{2n+1}-u_{2n-1}=\frac{1}{(4n)!}-\frac{1}{(4n+2)!}>0$ ومنه (u_{2n-1}) متزايدة .

لنثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n-1})=0$. لدينا $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n-1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(4n)!}=0$ ومنه (u_{2n-1}) و (u_{2n}) متجاورتان.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}u_{2n}=l$ حسب السؤال 1 نستنتج أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة نحو نفس النهاية l .

حل ت10: ليكن $a\geq1$. نعتبر (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين كما يلي: $u_0=a,\ v_n=\frac{a}{u_n},\ u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

إثبات أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان و حساب l نهايتهما المشتركة. لدينا (يمكن التأكد بسهولة) $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>0,\ v_n>0$

1 . لنحسب $u_{n+1}-u_n$. $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{a-u_n^2}{2u_n}=\frac{(\sqrt{a}-u_n)(\sqrt{a}+u_n)}{2u_n}$

نلاحظ أنّ اتجاه تغير المتتالية (u_n) متعلق بإشارة الفرق $\sqrt{a}-u_n$. لدينا $u_n-\sqrt{a}=\frac{u_{n-1}^2+a}{2u_{n-1}}-\sqrt{a}=\frac{u_{n-1}^2-2\sqrt{a}u_{n-1}+a}{2u_{n-1}}=\frac{(u_{n-1}-\sqrt{a})^2}{2u_{n-1}}\geq0$

وهذا يثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n-v_n\geq0$

2 . لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_n}{u_{n+1}}\geq1\Rightarrow v_{n+1}\geq v_n$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة.

3 . لنثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$. بما أنّ المتتالية (v_n) متزايدة .

لدينا $u_{n+1}-v_{n+1}\leq u_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{1}{2}(u_n-v_n)$ و بالتالي نستنتج أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:\ 0\leq u_n-v_n\leq\frac{1}{2^n}(u_0-v_0)$

وبتطبيق نظرية الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ و هذا يثبت أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان، إذا تتقاربان نحو نفس النهاية l .

لنحسب l: لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=l$ وبما أنّ: $v_n=\frac{a}{u_n}$، فإنّ: $l^2=a$ أي $l=\pm\sqrt{a}$ و كون (u_n) و (v_n) موجبتين إذا $l=\sqrt{a}$.

حل ت11: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين كما يلي: $u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{2^2}{4^2}+....+\frac{n^2}{4^n}$ و $v_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+....+\frac{n}{(n+1)^2}$

باستعمال شرط كوشي دراسة طبيعة كلاّ من (u_n) و (v_n) .

يعطى شرط كوشي كما يلي: $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall(p,n)\in\mathbb{N}^2:\quad (n\geq n_0\Rightarrow|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon)$

1 . باستعمال التراجع يمكن أنّ نبرهن : $\forall n\geq5,\ 4^n>n^4$.

$$|u_{n+p}-u_n|=\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}}+\frac{(n+2)^2}{4^{n+2}}+....+\frac{(n+p)^2}{4^{n+p}}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+....+\frac{1}{(n+p)^2}$$ و بالتالي:

$$|u_{n+p}-u_n|<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+....+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+....\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n-4}$$

من أجل $\frac{1}{n-4}<\varepsilon$ يكون $n>\frac{1}{\varepsilon}+4$ وباختيار $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+5$ نجد: $n\geq n_0\Rightarrow\left|u_{n+p}-u_n\right|<\varepsilon$ وبالتالي (u_n) متتالية كوشي إذا متقاربة.

2 . $v_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+....+\frac{n}{(n+1)^2}$ لدينا من أجل $n\geq1$ و $p=n$:

$$v_{2n}-v_n=\frac{n+1}{(n+2)^2}+\frac{n+2}{(n+3)^2}...+\frac{2n-1}{(2n)^2}+\frac{2n}{(2n+1)^2}\geq n.\frac{n+1}{(2n+1)^2}\geq\frac{n^2}{(3n)^2}=\frac{1}{9}$$ و نكتب:

$\exists\varepsilon>0\,(\varepsilon=\frac{1}{9}),\ \forall n_0\in\mathbb{N},\exists(n,p)\in\mathbb{N}^2:\left[n\geq n_0\wedge\left|u_{n+p}-u_n\right|\geq\frac{1}{9}\right]$ وبالتالي (u_n) ليست متتالية كوشي إذا متباعدة.