قسم الرياضيات	جـــامعة الشهيد حمة لخضر-	مقيـاس: الجبر 1
سنة أولـــى رياضيات وإعلام آلي	الـوادي كلية العلوم الدقيـقة	2021/2020

أجوبة سلسلة أعمال موجّهة رقم: 01 (المنطق الرياضي – والمجموعات)

تمرين 01:

القضية	قيمة الحقيقة	نفيها
(a	0 قضية خاطئة لأن $12 = 3 \times 4$	$3 \times 4 \neq 7$
(b	ليست قضية لأن x مجهول	
(c	1 لأن $2^2 - 2 - 2 = 0$	2 ليس حلا للمعادلة $x^2 - x - 2 = 0$
(d	1 لأن $\mathbb{N}$ مجموعة غير محدودة من الأعلى	$(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N});\ x > y$
(e	ليست قضية لأن ذلك يعبر عن انطباع	
(f	ليست قضية لأنها تمثل سؤال	
(g	0 لأنها وصل قضيتين خاطئتين	$(\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}) \vee (2^3 \neq 3^2)$

القضية	قيمة الحقيقة	نفيها
(h	1 لأنها فصل قضيتين أحدهما صحيحة	$(\pi \notin \mathbb{Q}) \wedge (ln\sqrt{2} \neq 0.5)$
(i	0 لأنها استلزام بين قضيتين الأولى صحيحة والثانية خاطئة	$(2 \in \mathbb{N}) \wedge (\sqrt{2} \notin \mathbb{N})$
(j	1 لأنها استلزام بين قضيتين صحيحتين	$(3^2 = 9) \wedge (\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$
(k	1 لأن في هذا الاستلزام اذا تحققت المساواة فحتما ستأخذ x أحد القيمتين 0.5 أو -0.5 .	$\exists x \in \mathbb{R}; (4x^2 - 1) \wedge [(x \neq -0.5) \wedge (x \neq 0.5)]$
(l	0 لأن $5x$ متغير و y ثابت	$(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N});\ 5x \neq y$
(m	0 لأن الاستلزام خاطئ من أجل $y = -1$ و $x = 0$	$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});\ (x - y = 1) \wedge (x \leq 1)$
(n	1 لأن(أنظر أسفله)	$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});$ $(-1 < x + y < 2) \wedge (\lvert x + y\rvert \geq 2)$

توضيح: لإثبات صحة القضية n) ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

$$-1 < x + y < 2 \Rightarrow -2 < -1 < x + y < 2 \Rightarrow |x + y| < 2$$

تمرين 2: لننشئ جدول الحقيقة للقضية $[(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P} \Rightarrow Q$	$\bar{P} \Rightarrow Q$	$[(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1

بنفس الطريقة ننشئ بقية الجداول.

تمرين 03 : التعبير عن القضايا باستعمال الروابط المنطقية والمكممات

a) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}; m + n = 13$ (قضية صحيحة لأن كل $n \in \mathbb{Z}$ تقابلها $m = 13 - n$)

b) $\exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}; x \leq m$ (قضية خاطئة لأن $\mathbb{R}$ غير محدودة من الأعلى)

c) $\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 \neq 7$ (قضية صحيحة $\pm\sqrt{7}$ ليست أعدادا ناطقة)

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{Q}; \ x \leq r \leq y$ (حيث $x \neq y$) (قضية صحيحة $\mathbb{Q}$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$)

e) $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n$

f) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}; \ |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1} - 3\right| < \epsilon$ (قضية خاطئة لأن النهاية لا تساوي 3).

تمرين 04: نرمز بـ I, Z, K لأعمار الطالبات خديجة , زينب و إحسان على الترتيب. نلخص تصريح كل واحدة في الجدول التالي

الطالبة	التصريح الأول	التصريح الثاني	التصريح الثالث
خديجة	$K = 22$	$Z = K + 2$	$I = K - 1$
زينب	$(Z > I) \vee (Z > K)$	$\lvert Z - I \rvert = 3$	$I = 25$
إحسان	$I < K$	$K = 23$	$Z = K + 3$

هناك تناقض بين التصريحين $K = 22$ و $K = 23$ وعليه فأحدهما خاطئ.

بفرض أن : $K = 22$ صحيح أي أن $Z = K + 3 = 22 + 3 = 27$ و $I < K$ أي $I = K - 1 = 22 - 1 = 21$. هذه الإمكانية مرفوضة حيث يكون لزينب تصريح واحد صحيح فقط هو الأول.

اذا حتما سيكون $K = 23$ و $Z = K + 2 = 25$ و $I = K - 1 = 22$.

ملاحظة يمكن الانطلاق من التناقض $Z = K + 2$ و $Z = K + 3$.

<u>تمرين5</u>: أ) استخدام البرهان بالاستنتاج لإثبات صحة القضايا

القضية P_1: نفرض أن $ac \leq 0$ ونثبت أن $\exists x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c = 0$. بما أن $a \neq 0$ لنحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$. نلاحظ أن $\Delta \geq 0$ لأن $-4ac \geq 0$ $b^2 \geq 0$. ومنه فالمعادلة من الدرجة الثانية لها حلان حقيقيان متمايزان أو متساويان أنه $\exists x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c = 0$.

القضية P_2 لنثبت صحة الاستلزام من أجل $x, y \in \mathbb{R}$ كيفيان.

$$1 + xy = x + y \Rightarrow x + y - xy - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - y(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(1 - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1 = 0) \vee (\boldsymbol{1 - y = 0})$$

$$\Rightarrow (x = 1) \vee (\boldsymbol{y} = \mathbf{1})$$

القضية P_3 : بفرض أن 2n+1 مربعا لعدد طبيعي أي أنه: $\exists p \in \mathbb{N}; 2n + 1 = p^2$ وبالتالي : $n^2 + 2n + 1 =$ $n^2 + p^2$ أي : $(n+1)^2 = n^2 + p^2$ وأخيرا: $n + 1 = \sqrt{n^2 + p^2}$

اذا : $n + 1$ يساوي الجذر التربيعي لمجموع مربعين.

ب) البرهان بمثال مضاد على خطإ قضايا .

1) قضية خاطئة لأنه يوجد عدد أولي غير فردي هو 2 . 2) خاطئة لأنه

عدد أولي $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 + n + 1 \neq$ يكفي أن نأخذ المثال المضاد $n = 4$ أو $n = 7$.

3) خاطئة لأن : $\exists x \in \mathbb{R}; (x^2 \geq 1) \wedge (x < 1)$ يكفي أخذ المثال المضاد $x = -3$ الذي يكون من أجله الاستلزام

$9 \geq 1 \Rightarrow -3 \geq 1$ خاطئ.

ج) البرهان باستخدام العكس النقيض لنثبت مثلا صحة القضيتين 1) و 3)

1) لإثبات صحة الاستلزام $\forall n \in \mathbb{N};$ nزوجي $\Rightarrow$ n^2زوجي يكفي أن نثبت عكسه النقيض

nعدد فردي $\Rightarrow n^2$ عدد فردي . نفرض أن n عدد فردي أي أنه يوجد عدد طبيعيp بحيث : $n = 2p + 1$ بتربيع الطرفين نجد :

$$n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1 = 2k + 1$$

حيث $k = 2p^2 + 2p \in \mathbb{N}$ اذا n^2 عدد فردي.

3)ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ كيفيان

$$(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$$
$$\Rightarrow 2y = 2x$$
$$\Rightarrow x = y$$

د) لنثبت الحالة 3) باستخدام فصل الحالات: ليكن $n \in \mathbb{N}$ كيفي: نميز حالتين:

الحالة الأولى "n مضاعف لـ 3" : P

اذا كان "n مضاعف لـ 3 فإنه يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث : $n = 3k$ وبالتالي :

$$\text{n}(n + 1)(n + 2) = 3k(3k + 1)(3k + 2) = 3k'$$

حيث $k' = k(3k + 1)(3k + 2) \in \mathbb{N}$.

الحالة الثانية: n ليس مضاعفا لـ 3 أي أن باقي قسمته على 3 هو إما 1 أو 2 أي يُكتب على أحد الشكلين $n = 3k + 1$

$n = 3k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

في حالة $n = 3k + 1$ فإن :

$$\text{n}(n + 1)(n + 2) = (3k + 1)(3k + 2)(3k + 3)$$
$$= 3(3k + 1)(3k + 2)(k + 1) = 3k''$$

و في حالة $n = 3k + 2$ فإن

$$\text{n}(n + 1)(n + 2) = (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4) = 3(3k + 2)(k + 1)(3k + 4) = 3k'''$$

اذا في كل الحالات يكون لدينا $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N};\ \mathrm{n}(n+1)(n+2) = 3k$.

ه) نستخدم البرهان بالخلف لاثبات 1) و 2).

1) نفرض أنه : $\exists n \in \mathbb{N};\ \frac{n+3}{n+2} = 1$ وبالتالي $n+3 = n+2$ ومنه $3 = 2$ وهذا يتناقض مع $3 \neq 2$ ومنه القضية $\forall n \in \mathbb{N};\ \frac{n+3}{n+2} \neq 1$ صحيحة.

2) نفرض : $\exists n \in \mathbb{N}^*\ ;\ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$. أي أنه يوجد عددان طبيعيان q, p بحيث $\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{p}{q}$ و $PGCD(p,q) = 1$ بتربيع الطرفين نجد : $\frac{n}{n+1} = \frac{p^2}{q^2}$. بما أن الكسرين غير قابلين للاختزال فإن : $n = p^2$ و $n+1 = q^2$

بالطرح طرفا لطرف للمساواتين الأخيرتين نجد : $q^2 - p^2 = (q-p)(q+p) = 1$ وبالتالي

$q - p = q + p = 1$ وبحل الجملة نجد $q = 1$ و $p = 0$ أي أن $n = 0$ و وذلك يتناقض مع $n \in \mathbb{N}^*$.

و) لنثبت 2) بالتراجع. نسمي " $2^n > (n+1)^2$" بالخاصية $P(n)$ وهي جملة مفتوحة بمتغير طبيعي .

$P(6)$ صحيحة لأن : $2^6 = 64 > (6+1)^2 = 49$ ".

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$.

من فرض التراجع نستنتج أن : $2^{n+1} > 2(n+1)^2$. من جهة أخرى لدينا :

$2(n+1)^2 - (n+2)^2 = n^2 - 2 \geq 34 > 0$ لأن $n \geq 6$ ومنه $2(n+1)^2 > (n+2)^2$

اذا $2^{n+1} > (n+2)^2$ ومنه صحة $P(n+1)$ وبالتالي $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 6$.

<u>**تمرين 06 :**</u> 1)اثبات أن : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (أي تساوي مجموعتين).

ليكن $x \in E$ كيفي

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$ (حسب تعريف التقاطع)

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \big((x \in B) \vee (x \in C)\big)$ (حسب تعريف الاتحاد)

$\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]$ (لأن رابطة الوصل توزيعية على رابطة الفصل)

$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$ (حسب تعريف التقاطع)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (حسب تعريف الاتحاد)

ومنه تساوي المجموعتين.

2) بنفس الطريقة السابقة ليكن $x \in E$ كيفي

$x \in C_E(A \cap B) \Leftrightarrow \overline{x \in A \cap B}$ (تعريف المتممة)

$\Leftrightarrow \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)}$ (حسب تعريف التقاطع)

$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$ (نفي وصل قضيتين)

$\Leftrightarrow (x \in C_E A) \vee (x \in C_E B)$ (تعريف المتممة)

$\Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B$ (حسب تعريف الاتحاد)

3) اثبات أن $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(y \in B) \wedge (y \in C)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (y \in B)] \wedge [(x \in A) \wedge (y \in C)] \\ &\Leftrightarrow [(x,y) \in A \times B] \wedge [(x,y) \in A \times C] \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

(هنا استخدمنا تعاريف : الجداء الديكارتي لمجموعتين –التقاطع – كذلك في الخطوة الثالثة استخدمنا النتيجة $P \wedge P \Leftrightarrow P$.)

4) إثبات صحة التكافؤ المنطقي التالي: $A \vartriangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

$\Leftarrow$ بفرض أن $A = B = \emptyset$ نجد $A \vartriangle B = (\emptyset - \emptyset) \cup (\emptyset - \emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset = A \cap B$.

$\Rightarrow$ بفرض أن $A \vartriangle B = A \cap B$ لنثبت أن $A = B = \emptyset$.

نبرهن بالخلف نفرض أن $A \neq \emptyset$ أو $B \neq \emptyset$.

$A \neq \emptyset$ مثلا تعني أنه $\exists a \in E;\ a \in A$. نميز حالتين :

- $a \in B$ في هذه الحالة $a \in A \cap B$ وبالتالي فإن $a \notin A \vartriangle B$ (حسب تعريف الفرق التناظري) اذا $A \vartriangle B \neq A \cap B$ وهذا تناقض مع الفرضيات.
- $a \notin B$ في هذه الحالة $a \in A - B$ ومنه فإن $a \in A \vartriangle B$ و $a \notin A \cap B$ اذ

ا $A \Delta B \neq A \cap B$ وهذا تناقض مع الفرضيات.

ومنه صحة الاستلزام $\Longrightarrow$.

6) ليكن $x \in E$ كيفي .

$x \in A - A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \cap B)$ (تعريف الفرق بين مجموعتين)

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)]$ (نفي وصل قضيتين)

$\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$ (توزيع الوصل على الفصل)

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$ ($(x \in A) \wedge (x \notin A)$ قضية خاطئة F فهي تحقق $F \vee P \Leftrightarrow P$)

$\Leftrightarrow x \in A - B$ (تعريف الفرق بين مجموعتين)

ومنه: $A - A \cap B = A - B$.

طريقة أخرى: $A - A \cap B = A \cap C_E(A \cap B) = A \cap [C_E A \cup C_E B]$

$= (A \cap C_E A) \cup (A \cap C_E B) = \emptyset \cup (A - B) = A - B$

بنفس الطريقة نثبت أن $A \cup B - B = A - B$

7) الاستنتاج: حسبما سبق وبما أن $A \cap B \subset A$ فإن $A - A \cap B = C_A A \cap B$ ومنه $A - (A - A \cap B) =$
$A - C_A(A \cap B) = C_A\big(C_A(A \cap B)\big) = A \cap B$

(لأن $C_A(A \cap B) \subset A$)

10) نفرض أن $A \subset B$ ونثبت أن $C_E B \subset C_E A$.

$x \in C_E B \Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A$ (لأن $A \subset B$)

$\Rightarrow x \in C_E A$

11) نفرض أن $A \subset B$ ونثبت أن $P(A) \subset P(B)$.

$S \in P(A) \Rightarrow S \subset A$ (تعريف مجموعة أجزاء مجموعة A)

$\Rightarrow S \subset B$ (لأن $A \subset B$)

$\Rightarrow S \in P(B)$ (تعريف مجموعة أجزاء مجموعة B) ومنه $P(A) \subset P(B)$.

تمرين رقم 07 : اثبات أن $A = B$.

$$(x, y) \in A \Rightarrow 3x - y = 1$$
$$\Rightarrow y = 3x - 1$$
$$\Rightarrow y = 3(x - 1) + 2$$
$$\Rightarrow (x, y) = (t + 1, 3t + 2);\ t = x - 1 \Rightarrow (x, y) \in B$$

ومنه : $A \subset B$.

$$(x, y) \in B \Rightarrow (x, y) = (t + 1, 3t + 2)\ ; t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow 3x - y = 3(t + 1) - 3t - 2 = 1$$
$$\Rightarrow (x, y) \in A$$

وعليه فإن $B \subset A$ اذا $A = B$.

اثبات أن : $D \cap C = \emptyset$. نبرهن بالخلف نفرض أن $D \cap C \neq \emptyset$ أي أن هذه المجموعة تشمل على الأقل عنصرا x.

لدينا $x \in D \cap C \Leftrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z};\ x = \frac{8k+5}{20} = \frac{4k'+5}{10}$ ومنه $80k + 50 = 80k' + 100$ أي

$8(k - k') = 5$ وهذا تناقض لأن الطرف 5 عدد فردي و $8(k - k')$ عدد زوجي اذا $D \cap C = \emptyset$.

تمرين08 : 2) ليكن $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,4\}$ $A - B = \{1,3\} \neq B - A = \{4\}$

3) $A \times B \neq B \times A$ في المثال السابق $(4,3) \notin A \times B$; $(4,3) \in B \times A$.

4) $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ ومنه

$$P(A \cup B) = \begin{Bmatrix} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \\ \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \\ \{2,3,4\},\ A \cup B \end{Bmatrix}$$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$ و $P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{3\}, B\}$

$$P(A) \cup P(B) = \{\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A, B\}\}$$

واضح أن: $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$