مقياس: الجبر 1

لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي

الفصل الثالث:

العمليات الداخلية - البنى الجبرية

مسؤول المقياس :د. الأمين قـــــــده السنة الجامعية 2021/2020

تمهـــــــــــيد

في هذا الفصل سنتعرف على نوع من العمليات الجبرية في مجموعات مختلفة و نحدد خواصها . ثم نتطرق الى البنيات الجبرية التي تزود بها عملية أو أكثر مجموعة E. في هذه الحالة المجموعة E تسمى حامل البنية الجبرية .

I. العملية الداخلية (أو قانون التركيب الداخلي)

Opération interne(où loi de composition interne)

لتكن E مجموعة غير خالية .

a) تعريف: نسمي عملية داخلية معرفة في المجموعة E كل **تطبيق** $\star$ **من** $E \times E$ **نحو** E.

$$\star : E \times E \to E$$
$$(x,y) \mapsto x \star y$$

تتحدد عملية داخلية بإعطاء المجموعة E وناتج $x \star y$ باستخدام عمليات أخرى معروفة

يرمز عادة للعمليات الداخلية برموز مثل : $\perp, \top, \circ, \star, \times, +, -, \Delta, \ldots\ldots$..

أمـــــثلة:

1)الجمع في $\mathbb{N}$ و هو عبارة عن التطبيق: $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ حيث $(x,y) \mapsto x + y$

هو عملية داخلية لأن مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي.

$\forall (a,b,c) \in E^3;$

$a = b \Longrightarrow a \star c = b \star c$

$a = b \Longrightarrow c \star a = c \star b$

2) الطرح في $\mathbb{Z}$ هو التطبيق $- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $(x,y) \mapsto x - y$

هو عملية داخلية في $\mathbb{Z}$ لأن فرق عددين صحيحين هو عدد صحيح دائما. أي

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z};\ x - y \in \mathbb{Z}$$

لكن الطرح ليس عملية داخلية في $\mathbb{N}$ لأن فرق عددين طبيعيين ليس بالضرورة عددا طبيعيا مثلا : $7 - 10 = -3 \notin \mathbb{N}$.

3) في المجموعة $P(E)$ (مجموعة أجزاء المجموعة E)

$$\cap : P(E) \times P(E) \longrightarrow P(E) \qquad\qquad \cup : P(E) \times P(E) \longrightarrow P(E)$$
$$(A,B) \mapsto A \cap B \qquad\qquad (A,B) \mapsto A \cup B$$

هما عمليتان داخليتان في $P(E)$ (لأن تقاطع و اتحاد جزئين من E هي أجزاء من E).

4) في المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ نعرف عملية جمع $\oplus$ وعملية ضرب $\odot$ كما يلي: من أجل كل عنصرين $(x,y), (x',y')$ من $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\oplus(x',y') = (x + x', y + y')$

$$(x,y)\odot(x',y') = (x.x' - y.y', x.y' + y'.x)$$

العمليتان $\oplus$ و $\odot$ داخليتان في $\mathbb{R}^2$.

ملاحظة : عندما تكون المجموعة E منتهية $E=\{a,b,c\}$ مثلا, يمكن تحديد عملية داخلية $\star$ عليها بإعطاء جميع النواتج $x\star y$ في الجدول التالي:

$\star$	a	b	c
a	a⋆a	a⋆b	a⋆c
b	b⋆a	b⋆b	b⋆c
c	c⋆a	c⋆b	c⋆c

b) الجزء المستقر (*Partie stable*): لتكن E مجموعة مزودة بعملية داخلية $\star$. A جزء غير خال من E .

تعريف: نقول أن A جزء مستقر بالنسبة للعملية $\star$ اذا تحقق $\forall a\in A,\forall b\in A;\ \ a\star b\in A$.

مثال: $A=\{3k;k\in\mathbb{Z}\}$ (أي مجموعة مضاعفات العدد 3) هي جزء مستقر بالنسبة لعملية الجمع + في $\mathbb{Z}$ لأن : $\forall k,k'\in\mathbb{Z};\ \ 3k+3k'=3(\underbrace{k+k'}_{\in\mathbb{Z}})\in A$.

A جزء مستقر بالنسبة للعملية $\star$ *تعني*

أن $\star$ عملية داخلية في A

c) خواص عملية داخلية:

بفرض أن $\star$ عملية داخلية معرفة في المجموعة E.

a) خاصية التجميع: نقول أن $\star$ تجميعية (*associative*) اذا حققت:

$$\forall(a,b,c)\in E^3;a\star(b\star c)=(a\star b)\star c)$$

مثال : عملية الجمع + في $\mathbb{R}$ تجميعية لأن كل 03 أعداد حقيقية a,b,c *تحقق :*

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

لكن عملية الطرح – ليست تجميعية في $\mathbb{R}$ لأن : $\underbrace{(5-3)-1}_{1}\neq\underbrace{5-(3-1)}_{3}$

b) خاصية التبديل: نقول أن $\star$ تبديلية (*commutative*) اذا حققت:

$$\forall(a,b)\in E^2;a\star b=b\star a$$

مثال: 1) عمليتا التقاطع $\cap$ والاتحاد $\cup$ في المجموعة $P(E)$ تبديليتان (أنظر الخواص في درس المجموعات).

2) عملية تركيب التطبيقات $\circ$ ليست تبديلية.

ملاحظة1: اذا وُجد عنصران a,b من المجموعة E يحققان: $a\star b=b\star a$ نقول أنهما قابلين للتبديل بالنسبة للعملية $\star$.

مثال: رغم أن العملية $\circ$ غير تبديلية لكن التطبيقين $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ حيث $f(x)=4x+9$ و $g(x)=2x+3$ قابلين للتبديل بالنسبة للعملية $\circ$ لأن:

$$\forall x\in\mathbb{R};\ (f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=8x+21$$

ملاحظة2: اذا وُجد $a\in E$ يحقق: $\forall x\in E;\ \ x\star a=a\star x$ نسميه عنصرا مركزيا للمجموعة E بالنسبة للعملية $\star$.

مثال: التطبيق المطابق Id_E هو عنصر مركزي في مجموعة التطبيقات $f: E \longrightarrow E$ بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات $\circ$ لأن: $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$.

$\star$ تبديلية في $E \Leftrightarrow$ جميع عناصر E مركزية بالنسبة لـ $\star$

c) العنصر الحيادي(élément neutre) اذا وُجد عنصر e من E يحقق: $\forall x \in E; \;\; x \star e = e \star x = x$ فإن e يسمى عنصرا حياديا بالنسبة للعملية $\star$ في E.

مثال: 1) 0 هو عنصر حيادي لعملية الجمع في $\mathbb{R}$ لأن:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \;\; x + 0 = 0 + x = x$$

e: عنصر حيادي من اليمين تعني $\forall x \in E; \;\; x \star e = x$

e : عنصر حيادي من اليسار تعني $\forall x \in E; \;\; e \star x = x$

2) $\emptyset$ هي عنصر حيادي لعملية الاتحاد في $P(E)$ لأن

$$\forall A \in P(E); \;\; A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

3) E هي عنصر حيادي لعملية التقاطع في $P(E)$ لأن

$$\forall A \in P(E); \;\; A \cap E = E \cap A = A$$

قضية: إن وُجد عنصر حيادي بالنسبة للعملية $\star$ في E فإنه وحيد.

الاثبات: نفرض وجود عنصرين حياديين e, e' . فيكون لدينا $e = e \star e' = e' \star e = e'e$ وذلك باعتبار أحدهما عنصرا حياديا والآخر كيفيا ثم العكس.

d) العنصر الاعتيادي(أو القابل للاختزال)(élément régulier): نقول عن العنصر s من E أنه اعتيادي بالنسبة للعملية$\star$ اذا حقق:

$$\forall (x, y) \in E^2; \;\; \begin{cases} s \star x = s \star y \Longrightarrow x = y \\ (و) \\ x \star s = y \star s \Longrightarrow x = y \end{cases}$$

مثال 1): العدد 5 عنصر اعتيادي بالنسبة لعمليات الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ لأن :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x = 5y \Longrightarrow x = y \;\; (و) \;\; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; 5 + x = 5 + y \Longrightarrow x = y$$

2) العدد 0 ليس عنصرا اعتياديا بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$ لأن : $5 \times 0 = 3 \times 0$ لكن $5 \neq 3$.

e) العناصر المتناظرة : بفرض أن e هو العنصر الحيادي للعملية $\star$ في E.
نقول عن عنصرين x, x' من E أنهما متناظران بالنسبة للعملية $\star$ في E اذا تحقق:

$$x \star x' = x' \star x = e$$

(في هذه الحالة كلاهما هو نظير (symétrie)الآخر بالنسبة للعملية).

قضية: بفرض أن العملية $\star$ تجميعية وتقبل عنصرا حياديا e في المجموعة E. في هذه الحالة فإن لكل عنصر x من E نظير على الأكثر x' في E .

الاثبات: نبرهن بالخلف نفرض أن لـ x نظيرين x' و x'' أي أن

$x\star x''=x\star x'$ و منه $x\star x''=x''\star x=e$ و $x\star x'=x'\star x=e$
بتركيب x' على يسار طرفي المساواة نجد
$x'\star(x\star x'')=x'\star(x\star x')$ و بما أن $\star$ تجميعية ينتج
$(x'\star x)\star x''=(x'\star x)\star x'$ أي أن $e\star x''=e\star x'$ وبالتالي: $x''=\ x'$.

f) العنصر الماص: هو كل عنصر s من E يحقق : $\forall x\in E;\ \ x\star s=s\star x=s$.
مثال: 1) 0 هو عنصر ماص بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$ لأن :
$$\forall x\in\mathbb{R};\ \ x\times 0=0\times x=0$$

2) $\emptyset$ هي عنصر ماص بالنسبة لعملية التقاطع في $P(E)$ لأن : $\mathrm{A}\cap\emptyset=\emptyset\cap\mathrm{A}=\emptyset$.

g) توزيعية عملية على عملية أخرى: إضافة إلى $\star$ نفرض أن $\top$ عملية داخلية أخرى في E.
نقول أن العملية $\top$ توزيعية *(distributive)* على العملية $\star$ في E اذا تحقق

$$\forall(a,b,c)\in E^3;\begin{cases}a\top(b\star c)=(a\top b)\star(a\top c)\\ \text{و}\\ (b\star c)\top a=(b\top a)\star(c\top a)\end{cases}$$

مثال: 1) عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع في $\mathbb{R}$. لكن الجمع ليس توزيعيا على الضرب.

2) عمليتا التقاطع والاتحاد كلاهما توزيعية على الأخرى في $P(E)$. (أنظر الخواص في درس المجموعات).

II. بعض البنى الجبرية:

a) بنية الزمرة: *(structure de groupe)* لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية $\star$. نقول بأن الثنائية $(G,\ \star\ )$ زمرة (أو أن العملية $\star$ تزود G ببنية زمرة) اذا تحقق ما يلي:

- ✓ $\star$ تجميعية
- ✓ يوجد في G عنصر بالنسبة للعملية $\star$.
- ✓ لكل عنصر $x\in G$ نظير $x'\in G$ بالنسبة للعملية $\star$.

واذا كان إضافة إلى ذلك $\star$ تبديلية نقول أن $(G,\ \star\ )$ زمرة تبديلية (أو آبلية نسبة للرياضي *Abel*).

أمثلة: 1) $(\mathbb{Z},\ +\ )$ زمرة تبديلية لأن : الجمع $+$ في مجموعة الأعداد الصحيحة تجميعي ويقبل 0 كعنصر حيادي ولكل عدد صحيح a نظير بالنسبة للجمع هو العدد الصحيح $-a$. كما أن الجمع تبديلي.

2) $(\mathbb{N},\ +\ )$ ليست زمرة لأن: العدد 2 (كمثال مضاد) ليس له نظير بالنسبة للجمع حيث المعادلة $2+x=0$ ليس لها حل في $\mathbb{N}$ وبصفة عامة $a+b=0\Leftrightarrow \mathrm{a}=\mathrm{b}=0$.

3) $P(E)$ مزودة بعملية الاتحاد $\cup$ لا تشكل زمرة رغم أن العملية تجميعية وتبديلية و تقبل $\emptyset$ كعنصر حيادي لكن توجد عناصر ليس لها نظائر لأن: $A\cup A'=\emptyset\Leftrightarrow \mathrm{A}=\mathrm{A}'=\emptyset$.

4) $S(E)$ مجموعة التطبيقات التقابلية لــ E في نفسها مزودة بعملية تركيب التطبيقات $\circ$ لها بنية زمرة .
لأن العملية $\circ$: 1)داخلية (مركب تقابلين لــ E في نفسها هو كذلك تقابل لــ E في نفسها)

2) تجميعية لأن $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. 3)عنصرها الحيادي هو التطبيق المطابق Id_E.

4) نظير f بالنسبة للعملية $\circ$ هو تطبيقه العكسي f^{-1}.

نتائج من التعريف:

في زمرة $(G, \star)$ جميع العناصر اعتيادية بالنسبة للعملية $\star$ كما أن المعادلة $a \star x = b$ ذات المجهول x لها حل وحيد في G هو $x = a' \star b$ حيث a' هو نظير a *بالنسبة* لـ $\star$.

الاثبات: ليكن $x, y, c \in G$. نرمز بـ c' لنظير c و بـ e للعنصر الحيادي.

$x \star c = y \star c \Rightarrow (x \star c) \star c' = (y \star c) \star c'$ (لأن $\star$ تطبيق)

$\Rightarrow x \star (c \star c') = y \star (c \star c')$ (لأن $\star$ تجميعية)

$\Rightarrow x \star e = y \star e$ (c' نظير c)

$\Rightarrow x = y$ (e عنصر حيادي)

بنفس الطريقة نثبت أن: $c \star x = c \star y \Rightarrow x = y$ (وذلك بتركيب c' على يسار طرفي المساوة).

أي أن جميع العناصر c من G اعتيادية.

ولــحل المعادلة $a \star x = b$ يكفي تركيب a' على اليسار طرفيها وتطبيق خواص العملية.

الزمرة الجزئية (Sous-groupe)

تعريف: لتكن $(G, \star)$ زمرة عنصرها الحيادي e و H مجموعة جزئية ليست خالية من G (أي $(\emptyset \neq H \subset G)$. *اذا كانت* $(H, \star)$ زمرة نسميها زمرة جزئية من $(G, \star)$.

الشرط i يعني أن $\star$ عملية داخلية في H.

والشرط ii يعني أن نظير كل عنصر من H يبقى في H

نتيجة H مجموعة جزئية ليست خالية من G

تكون H زمرة جزئية من الزمرة $(G, \star)$ اذا وفقط اذا حققت:

i. H جزء مستقر بالنسبة للعملية $\star$.

ii. $\forall x \in H, \exists x' \in H; x \star x' = x' \star x = e$

الاثبات : $\Leftarrow$ واضح حسب تعريف الزمرة.

$\Longrightarrow$ نفرض صحة الشرطين i و ii ونبرهن أن $(H, \star)$ زمرة.

حسب i فإن $\star$ عملية داخلية في H فهي تجميعية في H لأن $H \subset G$ و $(G, \star)$ زمرة.

وحسب ii فإن لكل عنصر من H نظير في H بالنسبة للعملية $\star$.

بما أن H غير خالية, ليكن $x \in H$ ونظيره $x' \in H$. لدينا $x' \star x = e$ بالنظر الى i فإن $e \in H$

اذا يوجد عنصر حيادي للعملية $\star$ في H وعليه فإن $(H, \star)$ زمرة.

صيغة أخرى للنتيجة السابقة: يمكن استبدال الشرطين i و ii بشرط واحد فقط هو

.iii $\forall\, x, y \in H;\ x \star y' \in H$ (حيث y' هو نظير y)

الاثبات : لنبين صحة التكافؤ i و ii $\Leftrightarrow$ iii .

$\Leftarrow$ ليكن $x, y \in H$. لدينا حسب ii فإن $y' \in H$ وحسب i فإن $x \star y' \in H$.

$\Rightarrow$ بما أن $H \neq \emptyset$ ليكن $x \in H$ وبالتالي حسب iii فإن

$x \star x' = e \in H$ و $e \star x' = x' \in H$ ومنه صحة ii. من جهة أخرى
$x \star y = x \star y'' \in H$ وبالتالي صحة i.

مثال: لتكن $H = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{C}^*, \times)$ نستخدم الصيغة الأخيرة

1. $H \neq \emptyset$ لأن : $1, \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ هي عناصر من H حيث $|1| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 1$.
2. ليكن $x, y \in H$ أي أنه : يوجد عددان حقيقيان $\theta, \theta';\ x = e^{i\theta}, y = e^{i\theta'}$ نعلم أن العنصر الحيادي للضرب في $\mathbb{C}$ هو 1 وأن نظير $y = e^{i\theta'}$ هو $y' = e^{-i\theta'}$. لدينا
$$x \times y' = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta - \theta')}$$
و $\left|e^{i(\theta-\theta')}\right| = 1$ اذا $x \times y' \in H$ وعليه فإن H زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*, \times)$.

ملاحظة : 1) اذا كانت K زمرة جزئية من H التي هي بدورها زمرة جزئية من الزمرة $(G, \star)$ فإن K زمرة جزئية من $(G, \star)$.

2) اذا كانت H و S زمرتان جزئيتان من $(G, \star)$ فإن $H \cap S$ زمرة جزئية من $(G, \star)$.

التشاكل الزمري: (homomorphisme de groupes)

لتكن G و G' مجموعتين غير خاليتين مزودتين على الترتيب بالعمليتين الداخليتين $\star$ و $\top$ على الترتيب.

تعريف : نسمي تشاكلا لـ $(G, \star)$ في $(G', \top)$ كل تطبيق $f: G \to G'$ يحقق:

$$\forall (a, b) \in G^2;\ \ f(a \star b) = f(a) \top f(b)$$

صورة مركب
عنصرين بالعملية
$\star$ يساوي مركب
صورتيهما

حالات خاصة :

a) اذا كانت $(G,\ \star\ )$ و $(G',\top\ )$ زُمر نسمي f تشاكلا زمريا.
b) في حالة $G=G'$ و $\top=\star$ فإن f يسمى تشاكلا داخليا (*Endomorphisme*)
c) وعندما يكون f تقابلي نقول أن التشاكل تقابلي (*Isomorphisme*)

أمثلة :1) $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}_+^*\ ,\times)$ حيث $f(x)=e^x$ هو تشاكلي زمري تقابلي لأنه تطبيق تقابلي من الزمرة $(\mathbb{R},+)$ نحو الزمرة $(\mathbb{R}_+^*\ ,\times)$ ويحقق:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2;\ \ f(a+b)=e^{a+b}=e^a\times e^b=f(a)\times f(b)$$

نلاحظ أن التطبيق العكسي لـ f هو $f^{-1}:(\mathbb{R}_+^*\ ,\times)\to(\mathbb{R},+)$ حيث $f^{-1}(x)=lnx$

هو كذلك تشاكل زمري تقابلي لأن :

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*\ )^2;\ \ ln(a\times b)=lna+lnb$$

كذلك نجد أن : $f(0)=e^0=1$ وأن $f(-a)=e^{-a}=\frac{1}{e^a}=\frac{1}{f(a)}$.

نتائج : نفرض أن : $f:(G,\ \star\ )\to(G',\top\ )$ تشاكل زمري . e هو العنصر الحيادي للزمرة $(G,\ \star\ )$.

1. $f(e)$ هو العنصر الحيادي للزمرة $(G',\top\ )$.
2. اذا كان x' هو نظير x بالنسبة للعملية $\star$ في G فإن $f(x')$ هو نظير $f(x)$ بالنسبة للعملية $\top$في G'.
3. H زمرة جزئية من $(G,\ \star\ )\Longleftarrow f(H)$ زمرة جزئية من $(G',\ \top\ )$.
4. K زمرة جزئية من $(G',\ \top\ )\Longleftarrow f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من $(G,\ \star\ )$.

الاثبات : لنثبت النتيجة 4) نفرض أن K زمرة جزئية من $(G',\ \top\ )$ لدينا بالتعريف

$$f^{-1}(K)=\{x\in G;f(x)\in K\}$$

حسب النتيجة 1) $f(e)$ هو العنصر الحيادي للزمرة $(G',\top\ )$ ومنه $f(e)\in K$ اذن $e\in f^{-1}(K)$ أي أن $f^{-1}(K)\neq\emptyset$.

ليكن $a,b\in f^{-1}(K)$ أي أن $f(b)\in K$ و $f(a)\in K$. بما أن f تشاكل فإن

$f(a)\top f(b)=f(a\star b)\in K$ ومنه $a\star b\in f^{-1}(K)$.

ليكن a' نظير a بالنسبة للعملية $\star$ ومنه حسب النتيجة 2) فإن : $f(a')$ هو نظير $f(a)$ بالنسبة للعملية $\top$في G'. اذا $f(a')\in K$ لأن $f(a)\in K$ وعليه فإن $a'\in f^{-1}(K)$.

صورة ونواة تشاكل زمري: $f:(G,\star)\to(G',\top)$ تشاكل زمري.

1. صورة التشاكل f هي المجموعة: $Imf=\{f(x)\in G';\ \ x\in G\}=f(G)$
2. نواة التشاكل f هي المجموعة: $kerf=\{x\in G;\ \ f(x)=e'\}=f^{-1}(\{e'\})$
(e' هو العنصر الحيادي للزمرة $(G',\top)$).

تمرين : استخدم النتيجة لإثبات أن $kerf$ و Imf هما زمرتان جزئيتان من $(G,\star)$ و $(G',\top)$ على الترتيب.

قضية : $f:(G,\star)\to(G',\top)$ تشاكل زمري.

1. f تطبيق متباين $\Leftrightarrow kerf=\{e\}$.
2. f تطبيق غامر $\Leftrightarrow Imf=G'$.

نظرية: اذا كان $f:(G,\star)\to(G',\top)$ تشاكل تقابلي فإن تطبيقه العكسي $f^{-1}(G',\top)\to(G,\star)$ هو تشاكل تقابلي كذلك. وفي هذه الحالة نقول أن $(G,\star)$ و $(G',\top)$ متشاكلتين تقابليا (isomorphes) ونكتب $G\approx G'$ ويكون للعمليتين نفس الخصائص (مثلا اذا كانت أحدهما تجميعية فالأخرى كذلك..).

مثال: $(\mathbb{C},+)$ $(\mathbb{R}^2,+)$ متشاكلتان تقابليا لأن التطبيق $f:(\mathbb{R}^2,+)\to(\mathbb{C},+)$ حيث $f(x,y)=x+iy$ تشاكل تقابلي.

b) بنية الحلقة (*Structure d'anneau*)

لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين داخليتين نرمز للأولى بالرمز $(+)$ ونسميه القانون الجمعي) ونرمز للثانية بالرمز (.) (وندعوه القانون الضربي).

حذاري

(+) يرمز للعملية الأولى وليس بالضرورة جمع الأعداد العادي.

(.) يرمز للعملية الثانية وليس بالضرورة الضرب العادي للأعداد

تعريف: نقول بأن الثلاثية $(A,+,.)$ حلقة اذا حققت:

- $(A,+)$ زمرة تبديلية .
- العملية (.) تجميعية و توزيعية على العملية $(+)$.

حالات خاصة : اضافة لما سبق

1) اذا كانت العملية (.) تبديلية, نقول ان الحلقة $(A,+,.)$ تبديلية
2) واذا كان للعملية (.) عنصرا حياديا نقول ان الحلقة $(A,+,.)$ واحدية (*unitaire*).

مثال $(\mathbb{Z},+,.)$ هي حلقة تبديلية واحدية (+ الجمع العادي في $\mathbb{Z}$ و . هو الضرب العادي)لأن

+ : تبديلية وتجميعية وتقبل العدد 0 كعنصر حيادي ولكل عدد صحيح x نظير صحيح هو $-x$.

العملية (.) تجميعية وتوزيعية على الجمع + وتبديلية و تقبل العدد 1 كعنصر حيادي .

رموز وتعاريف: بفرض $(A,+,.)$ حلقة واحدية

1) بالنسبة للعملية $+$: العنصر الحيادي يسمى صفر الحلقة ورمزه 0_A (أو فقط 0) . نظير عنصر a نرمز له بـ $-a$ ونسميه معكوس a.

2) بالنسبة للعملية . : العنصر الحيادي يسمى العنصر الوحدة ورمزه 1_A(أو فقط 1). نظير عنصر a (إن وُجد) نرمز له بـ a^{-1} ونسميه مقلوب a.

ونرمز لمجموعة عناصر A القابلة للقلب بالرمز A^* مثلا في الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$ $\mathbb{Z}^* = \{-1,1\}$. العدد 2 غير قابل للقلب لأن $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

قواعد الحساب في حلقة: (فيما سيأتي نأخذ بعين الاعتبار الرموز السالفة) لتكن الحلقة $(A,+,.)$ و $a,b\ ,c$ عناصر من A.

1) $\mathrm{a}.(\mathrm{b}-\mathrm{c}) = \mathrm{a}.\mathrm{b}-\mathrm{a}.\mathrm{c}$ و $(\mathrm{b}-\mathrm{c}).\mathrm{a} = \mathrm{b}.\mathrm{a}-\mathrm{c}.\mathrm{a}$.

2) $a.0 = 0.a = 0$

3) $\mathrm{a}.(-b) = (-\mathrm{a}).\mathrm{b} = -(\mathrm{a}.\mathrm{b})$ و $(-\mathrm{a}).(-b) = \mathrm{a}.\mathrm{b}$.

الاثبات 1) يكفي تعويض c - بـ $+(-\mathrm{c})$ واستخدام خاصية توزيع العملية الثانية على الأولى.

2) يكفي أخذ في 1) $\mathrm{b}=\mathrm{c}$. 3) نأخذ في 1) $\mathrm{b}=0$.

في كل ما سيأتي استعملنا الرمز 0 ليدل على صفر الحلقة 0_A والرمز 1 ليدل على العنصر الوحدة 1_A للحلقة

سؤال: اذا كان $\mathrm{a}.\mathrm{b}=0$ فهل ينتج حتما : $\mathrm{a}=0$ أو $\mathrm{b}=0$ ؟

الحلقة التامة - قواسم الصفر في حلقة :

تعريف: ليكن $\mathrm{a}\in A$ بحيث $\mathrm{a}\neq 0$. نقول بأن a **قاسم للصفر** في الحلقة $(A,+,.)$ اذا وُجد $b\in A$ بحيث $\mathrm{b}\neq 0$ و $\mathrm{a}.\mathrm{b}=0$

نسمي حلقة تامة (*Anneau intègre*) كل حلقة تبديلية تختلف عن $\{0\}$ ولا تشمل قواسم للصفر.

مثال:1) الحلقة $(\mathbb{R},+,.)$ تامة لأن : $\forall a,b\ \in\mathbb{R};\ \ a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

2)لتكن مجموعة أصناف التكافؤ لعلاقة الموافقة بترديد 6 في $\mathbb{Z}$:

$\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} = \{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5}\}$ نعرف عليها عمليتي جمع وضرب اصناف التكافؤ كما يلي:

الجمع $\dot{+}$: $\dot{a}\dot{+}\dot{b} = \overset{\frown}{a+b}$ والضرب $\dot{\times}$: $\dot{a}\dot{\times}\dot{b} = \overset{\frown}{a\times b}$

مثلا : $\dot{2}\dot{+}\dot{3} = \dot{5}$ و $\dot{4}\dot{\times}\dot{5} = \dot{20} = \dot{2}$

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

يمكن إثبات أن$\left(\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ حلقة تبديلية واحدية صفرها هو $\dot{0}$ وعنصرها $\dot{1}$. وهي حلقة غير تامة لأنها تشمل قواسم للصفر هي $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$. لأنها جميعها تختلف عن $\dot{0}$ وتحقق: $\dot{3} \dot{\times} \dot{4} = \dot{0} = \dot{3} \dot{\times} \dot{2}$.

بصفة عامة يمكن إثبات أن : $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ حلقة تامة اذا وفقط اذا كان n عدد أولي.

الحلقة الجزئيـــة:(sous-anneau) لتكن $(A,+,.)$ حلقة . B مجموعة جزئية غير خالية من A. اذا كانت $(B,+,.)$ حلقة نسميها حلقة جزئية من A. وحتى تكون كذلك يلزم ويكفي أن يتحقق ما يلي:

1. $(B,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(A,+)$.
2. B جزء مستقر بالنسبة للعملية $(.)$.

$\forall x,y \in B;\ \ x-y \in B$

$\forall x,y \in B;\ \ x.y \in B$

مثال: $\mathbb{Q}$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R},+,.)$ لأن $\emptyset \neq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و

$\forall x,y \in \mathbb{Q};\ \ x-y \in \mathbb{Q}$ و $x.y \in \mathbb{Q}$.

تمرين : بين أن المجموعة $\mathbb{Z}(i\sqrt{2}) = \{a+ib\sqrt{2}; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{C},+,.)$.

المثالي(Idéal d'anneau) نسمي مثاليا للحلقة $(A,+,.)$ كل زمرة جزئية I من الزمرة $(A,+)$ تحقق:

1. $A.I \subset I$
2. $I.A \subset I$

$\forall a \in A, \forall x \in I;\ a.x \in I$

$\forall a \in A, \forall x \in I;\ x.a \in I$

اذا تحقق 1) فقط I يسمى مثاليا من اليسار واذا تحقق 2) فقط نسميه مثاليا من اليمين.

مثال:1) $I_1 = \{0\}$ و $I_2 = A$ هما مثاليان من الحلقة A لأن كلاهما زمرة جزئية من $(A,+)$ و تحققان على الترتيب: $\forall a \in A;\ 0.a = a.0 = 0 \in I_1$

و $\forall a \in A, \forall x \in I_2;\ a.x,\ \ a.x \in I_2$.

2)من أجل $b \in A$ (مثبت) فإن: $A.b$ و $b.A$ هما مثاليان من الحلقة A (الأول من اليسار و الثاني من اليمين). لأن: $\forall a \in A;\ \ a.b \in A.b$ و $b.a \in b.A$.

تعريف: نقول عن I أنه مثالي **رئيسي** للحلقة A اذا وُجد عنصر $b \in A$ بحيث :
$$I = b.A = \{b.a;\ \ a \in A\}$$

و هو أصغر مثالي يشمل العنصر b. واذا كانت جميع المثاليات للحلقة A رئيسية نسميها حلقة رئيسية.

نتيجة: كل مثالي للحلقة A هو حلقة جزئية منها.

مثال: $\text{n}\mathbb{Z}$ (حيث n عدد طبيعي) هو مثالي رئيسي للحلقة$(\mathbb{Z}, +, .)$ لأن: $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$ و $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall x \in n\mathbb{Z};\ a.x = x.a = (nb).a = n.(a.b) \in n\,\mathbb{Z}$

:$0.\mathbb{Z} = \{0\}, 1.\mathbb{Z} = \mathbb{Z}, 2.\mathbb{Z} = \{2k; k \in \mathbb{Z}\}, \ldots$.

c) بنية الجسم (*Structure de corps*) :

تعريف : لتكن K مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين داخليتين $(+)$ و$(.)$. نقول أن الثلاثية $(K, +, .)$ جسم اذا حققت :

- $(K, +, .)$ حلقة واحدية .
- $\forall x \in K - \{0\}, \exists x^{-1} \in K - \{0\};\ x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$

الشرط الثاني يعني أن جميع عناصر الجسم قابلة للقلب ما عدا العنصر الحيادي للعملية + أي 0

حالة خاصة : اذا كان إضافة الى ذلك العملية $(.)$ تبديلية نقول أن الجسم تبديلي أو حقل.

أمثلة 1) $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ كل منها هو جسم تبديلي لأن كلا منها هي حلقة تبديلية واحدية العنصر الحيادي للجمع هو 0 وللضرب هو 1 ولكل عنصر منها يختلف عن 0 نظير بالنسبة للضرب هو مقلوبه .

2) $(\mathbb{Z}, +, .)$ رغم كونها حلقة تبديلية واحدية لكنها ليست جسما لأن مثلا العدد الصحيح 2 مقلوبه ليس صحيحا.

خاصية : كل جسم تبديلي $(K, +, .)$ هو حلقة تامة. أي يحقق

$$\forall x, y \in K;\ \ \ x.y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$$

الاثبات: ليكن $x, y \in K$ بحيث : $x.y = 0$. اذا كان $x \neq 0$ فهو قابل للقلب وليكن x^{-1} مقلوبه ومنه

$$x^{-1}.(x.y) = x^{-1}.0 \Rightarrow (x^{-1}.x).y = 0 \Rightarrow 1.y = y = 0$$

الجسم الجزئي: بفرض أن $\emptyset \neq L \subset K$. نقول أن L جسم جزئي من الجسم $(K, +, .)$ اذا كانت الثلاثية $(L, +, .)$ جسما كذلك. ويكون ذلك عندما يتحقق يلي:

- $(L, +, .)$ حلقة جزئية من $(L, +, .)$.
- $1 \in L$
- $\forall x \in K - \{0\}, \exists x^{-1} \in K - \{0\};\ x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$

مثال: $\mathbb{Q}(i) = \left\{a + ib;\ \ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ هي جسم جزئي من جسم الأعداد المركبة $\left(\mathbb{C}, +, .\right)$. (أثبت ذلك).