جامعة حمه لخضر الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات   الدرس الثاني   جبر -3-   2021/2020

اعتمادا على الدرس السابق

ليكن E فضاء شعاعيا على الحقل K بعده منتهي و $f \in \mathcal{L}(E)$ (تطبيق خطي داخلي)

ولتكن f التطبيق المرفق بالمصفوفة . A.

تعريف 1) تمهيد تقطير مصفوفة هو البحث عن مصفوفة أخرى D *قطرية* تماثل المصفوفة A .

أي ان توجد مصفوفة P ولها معكوس P^{-1} حيث

$$D = P^{-1}A\,P$$

تعريف 2) تكون المصفوفة A قابلة للتقطير إذا وفقط إذا كان .

1) اذا كان جذور كثير الحدود المميز بسيطة أي أن القيم الذاتية جذور بسيطة .

2) اذا كان جذور كثير الحدود المميز ليست كلها بسيطة نستعمل المرحلة الثانية وهي استعمال الجمع المباشر للفضاءات الشعاعية الذاتية او ما يكافوئها كما يلي .

$$E = \ker(A - \lambda_1 I) + \oplus \ker(A - \lambda_2 I) \oplus \ker(A - \lambda_2 I) \oplus \dots\dots \oplus \ker(A - \lambda_n I)$$

$$dimE = dimE_{\lambda_1} \oplus dimE_{\lambda_1} \oplus dimE_{\lambda_2} \oplus \dots\dots \oplus dimE_{\lambda_n}$$

وتمثل λ_i ; *i=1 , n* جذور كثير الحدود المميز و E_{λ_i} الفضاءات الذاتية الشعاعية المرفقة بالقيم الذاتية وحسب قواها في كثير الحدود المميز .

اذا كان غير ذلك فالمصفوفة غير قابلة للتقطير.

كيفية تقطير مصفوفة.

1) نوجد كثير الحدود المميز.
2) نوجد القيم الذاتية للمصفوفة (جذور كثير الحدود المميز)
3) نوجد الاشعة الذاتية
4) نشكل مصفوفة الانتقال P المتكونة من الاشعة الذاتية ثم نوجد معكوس المصفوفة P ولتكن P^{-1} .

نوجد المصفوفة القطرية D بتطبيق اقانون المدروس في الفصل الأول حيث.

$$.D = P^{-1}A\,P$$

تطبيق /

قطر المصفوقة . A. جيث /

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

الجواب / 1) نوجد كثير الحدود المميز.

$$P(\lambda) = \ |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(\lambda-3)$$

$$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \ \lambda_2 = 2, \ \ \lambda_3 = 3$$

نلاحظ ان جذور كثير الحدود المميز بسيطة اذن المصفوفة قابلة للتقطير

ومنه . 2) نوجد الفضاءات الشعاعية الذاتية (الاشعة المكونة ل مصفوفة الانتقال مع الترتيت).

عندما $\lambda_1 = -2,$

$$E_{\lambda_1} = \ ker\ (\mathrm{A} - I\lambda_1) = \ker\,(A+2I)$$

$$\forall\ \ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in\ \ker\,(A+2I)$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -5 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 5x-5y-4z=0 \\ 4x-4y-4z=0 \\ 5x-5y-4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = x \\ 9x-5y-4z=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ker(A+2I) = \ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

عندما $\lambda_2 = 2$.

$$E_{\lambda_1} = \ ker\ (\mathrm{A} - I\lambda_1) = \ker\,(A-2I)$$

$$\forall\ \ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in\ \ker\,(A-2I)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ \Longrightarrow \begin{cases} 5x-5y-4z=0 \\ 5x-4x-4z=0 \\ 5x-5y-4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = x \\ 5x-5y-4z=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ker(A-2I) = \ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_3 = -3$ عندما .

$$E_{\lambda_1} = ker\ (A - I\lambda_1) = \ker(A - 3I)$$

$$\forall\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - 3I)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ 4 & -5 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 5y - 4z = 0 \\ 4x - 5y - 4z = 0 \\ 5x - 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y - 4z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \ker(A - 3I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3)مصفوفة الانتقال و معكوسها

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow P^{-1} = \frac{(P')^t}{|p|} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) نوجد بعد اجراء عملية ضرب المصفوفات المصفوفة القطرية /

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرين -- لتكن لدينا المصفوفات التالية هل هذه المصفوفات قابلة للتقطير .ان كان ذلك اوجد المصفوفة القطرية لكل منها وان كان غير ذلك اذكر السبب .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

انتهى