***الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية***

***وزارة التعليم العالي والبحث العلمي***

***جامعة الشهيد "حمه لخضر" الوادي"***



# الميكانيك التحليلي

**دروس و تمارين تطبيقية**

**للسنة الثانية علوم المادة تخصص فيزياء**

للدكتور: رحال عاشور

السنة :2019

# مقدمة المطبوعة

هذه المطبوعة هي ثمرة مجهود من التدريس لمقياس الميكانيك التحليلي و الذي يتميز بانه مركز بصورة رئيسية على مبادئ عامة تفاضلية و تكاملية؛ ومن ثم تنتج المعادلات التفاضلية للحركة.

و الميكانيك التحليلي له من التطبيقات لا تحصى و لا تعد في الفيزياء و و الرياضيات و الكيمياء و الهندسة و خاصة في ميكانيك الكم والامواج و الميكانيك الاحصائي و حساب التغاير.

و فحوى المادة الخامة المقدمة في هذه المطبوعة هي الطرق الرياضية التي تعتمد على معادلات لاغرانج و هاملتون و التي هي في الاساس تطوير لقوانين نيوتن و التي تصيغ المسائل الميكانيكية و الرياضية صياغة حديثة تؤدي الى كيفية التعامل مع المسائل و تبسيط حلولها و خاصة منها الصعبة و تمتاز هذه الطرق ايضا بسهولة استخدامها لأي نوع من الاحداثيات. و هذا ما حولنا عرضه في هذه المطبوعة و التي تتكون من اربعة فصول مع بعض التمارين و الامثلة المختارة الموجهة بالأساس الى طلبة السنة ثانية تخصص فيزياء (SM) لبرنامج ليسانس-ماستر-دكتوراه (LMD) .

ففي الفصل الاول نتعرض الى مراجعة عامة حول الادوات الرياضية التي نحتاج لها في بناء و صياغة المعادلات و كذلك تذكير حول ميكانيك النقطة المادية.

اما في الفصل الثاني يتعرف القارئ الى كيفية صياغة معادلات لاغرانج للحركة.

الفصل الثالث هو امتداد للفصل الثاني و نعرض فيه كيفية تطور الميكانيك التقليدي من منظور لاغرانج الى منظور هاملتون.

الفصل الرابع يتمحور حول حركة الجسم الصلب و كيفية حساب مؤثر العطالة و علاقته بالعزم الحركي.

## الفهرس

**مقدمة المطبوعة**

**الفصل الاول**

**تذكير حول الميكانيك التقليدي**

**الفصل الثاني**

**صياغة لاغرانج**



**الفصل الثالث**

**صياغة هاملتون**

**الفصل الرابع**

**حركة الجسم الصلب**

# الفصل الأول

# تذكير حول الميكانيك التقليدي

## I-1. تذكير بالفضاء الشعاعي :

### I-1-1. الجمع الشعاعي :

اذا كان لدينا الشعاعين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ بحيث:

$$\vec{a},\vec{b} \in R \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

وعليه

أ-

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

ب- إذا كان λ عدد حقيقي:

$$\forall \lambda \in R \Rightarrow \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

### I-1-2. الجداء السلمي و خصائصه:

اذا كان $\vec{a},\vec{b} \in \mathrm{R}^3$ فإن:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + \; a_z b_z$$

أ: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|cos(\vec{a},\vec{b})$

ب: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

ج: $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$

د: $\vec{a}.(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}.\vec{b}$

**ه - بعض الأمثلة حول الجداء السلمي في الميكانيك :**

**العمل:** عمل قوة ثابته $\vec{F}$ خلال الانتقـــال $\overrightarrow{AB}$

$$W_{AB} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

**الطاقة الحركية:** الطاقة الحركية لجسم كتلته m وسرعته $\vec{v}$ تكون:

$$T = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$$

## I-1-3. الجداء الشعاعي و خصائصه:

اذا كان $\vec{a},\vec{b} \in R^3$ فإن: $\vec{a}\wedge\vec{b}$ هو الجداء الشعاعي من $\vec{b},\vec{a}$ وقيمته شعاع.

ونكتب:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_zb_y \end{pmatrix}$$

**خصائص الجداء الشعاعي**

أ - اذا كانت اشعة $\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}$ وحدة ومركباتها كالآتي:

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

إذن:

$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\vec{k} = \overrightarrow{e_z}$$

نلاحظ دوما أن ناتج الجداء الشعاعي هو شعاع وعمودي على كلا من الشعاعين أي أن:

1) $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}\ ;\ \vec{c} \perp \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

2) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

3) $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

4) $\vec{a} \wedge \left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \wedge \vec{b} \quad \forall\lambda \in R$

5) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ ، $\vec{a}, \vec{b}$ متوازيان $\quad ssi \begin{pmatrix} \vec{b} = \lambda\vec{a}\,, & \lambda \in R \\ & \vec{a} = \vec{0} \end{pmatrix}$

6) $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$ (علاقة لاغرانج)

7) $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{c} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{a} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$

8) $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{0}$ (علاقة جاكوبي)

9) $\vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{b}.\vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{c}.\vec{a} \wedge \vec{b}$ (الجداء المختلط)

10) $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\| sin\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$

11* **بعض الأمثلة حول الجداء الشعاعي في الميكانيك.**

<u>**العزم الحركي:**</u> اذا كان الجسم كتلته $m$ و سرعته $\vec{v}$ فانه يملك كمية حركة $\vec{p}$ كالتالي

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

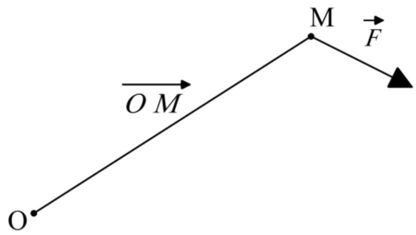
أما عزم كمية الحركة $\vec{p}$ بالنسبة للمركز $(0)$ يعرف كالآتي:

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{L}_{/O} = m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})$$

**<u>عزم قوة</u>** : إذا كانت $\vec{F}$ قوة ثابته تؤثر على الجسم في النقطة $M$ ( انظر الشكل ) فإن عزم هذه القوة يكون:




$$\vec{M} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

### I-1-4. الحساب التفاضلي الشعاعي :

#### I-1-4-1. تـذكير حول الاشتــقاق التـــــام:

لتكن الدالة $f$ معرفة كالآتي:

$$f: R \to R$$

ذات المتغير الوحيد $x$ وقابلة للاشتقاق عند النقطة $x$ ويكون مشتق الدالة $f$ على النحو الآتي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ونقول ان الدالة $f$ قابلة للاشتقاق اذا كانت قابلة للاشتقاق على كل نقطة من مجال تعريفها ونكتب

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

#### I-1-4-2. تـذكير حول الاشتقاق الجزئي:

لتكن الدالة $f$ معرفة كالآتي:

$$f: R^3 \to R$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{df(x,y,z)}{dx}$$

وبنفس الطريقة نحصل على أن:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim = \frac{df(x,y,z)}{dz}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{dz} = \frac{df(x,y,z)}{dz}$$

ومنه نجد في الأخير ان:

$$\boldsymbol{df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \dots \dots \dots (I-1)}$$

**مثال:**

احسب المشتقات الجزئية لـــ : $f(x,y,z) = xy^2e^{xz}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2(e^{xz} + z \times e^{xz}) = y^2(1+3x)e^{xz} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x(2y)e^{xz} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y^2e^{xz} \end{cases}$$

نفس الملاحظة اذا كانت $f$ دالة شعاعية بدلا من دالة سلمية : أي نكتب

$$\boldsymbol{\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) \Rightarrow d\vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz \dots \dots \dots (I-2)}$$

**مثال:** أحسب المشتقات الجزئية للشعاع حيث:

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) = z^2y\vec{\imath} + xz\vec{\jmath} + xe^y\vec{k}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} = z\vec{j} + e^{y}\vec{k} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y} = z^{2}\vec{j} + x\vec{j} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 2zy\vec{\imath} + x\vec{j} \end{cases}$$

### I-1-4-3. التدرج:

لتكن الدالة $f$ معرفة كالاتي:

$$f: R^{3} \to R$$

وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، نرمز لتدرج هذه الدالة $f$ بـــ $\overrightarrow{grad}f$ وهو شعاع يعرف كما يلي :

$$\overrightarrow{grad}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

أ)- **خصائص التدرج:**

اذا كانت الدالتين $g$ و $f$ معرفتين كما يلي:

$$f, g: R^{3} \to R$$

وقابلتان للاشتقاق على مجال تعريفها فان:

(1

$$\overrightarrow{grad}(f+g) = \overrightarrow{grad}f + \overrightarrow{grad}g$$

(2

$$\overrightarrow{grad}(f \circ g) = \left(\overrightarrow{grad}f\right)g + f\,\overrightarrow{grad}g$$

3) لدينا من المعادلة $(\boldsymbol{I-1})$ :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{\imath}+dy\vec{\jmath}+dz\vec{k}\right)$$

$$\boldsymbol{df=\overrightarrow{grad}f.d\vec{r}\ \dots\dots\dots(I-3)}$$

### I-1-4-4. الدوران:

نعرف دوران شعاع $\vec{V}$ المعرف من $R^3\rightarrow R^3$ والقابل للاشتقاق على مجال تعريفه بالشكل التالي:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\\ \frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

**خصائص الدوران:** $\overrightarrow{Rot}$

-1 $\qquad \forall f: \qquad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right)=\vec{0}$

-2 $\qquad \vec{V}=\overrightarrow{grad}f\rightleftharpoons\overrightarrow{rot}\vec{V}=\vec{0}$

### I-1-4-5. التفرق:

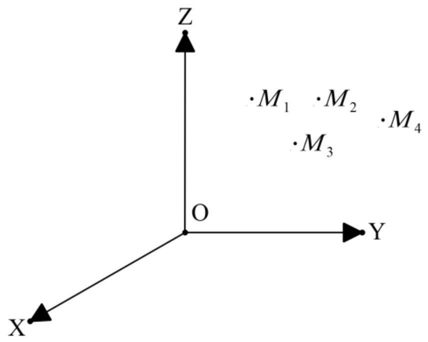
نعرف تفرق شعاع $\vec{V}$ المعرف من $R^3\rightarrow R^3$ وقابل للاشتقاق على مجال تعريفه بالشكل التالي:

$$div\vec{V}=\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

خصائص التفرق $div$

$$div\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right)=0$$

## I-2. حركة نقطة مادية ( جسيم):




**تعاريف:**

- كتلة الجسيم $i$: $m_i$
- شعاع موضع " وضعية " للجسيم $\overrightarrow{OM_i} = \vec{r_i}$
- سرعة الجسيم $i$ $\vec{V_i} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$
- كمية الحركة للجسيم $i$ $\vec{p_i} = m_i\vec{V_i}$
- تسارع الجسيم $i$ $\vec{a_i} = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$
- العزم الحركي للجسيم $i$ بالنسبة الى نقطة $A$ من الفضاء يعرف بـــ :

$$\overrightarrow{L/_A} = \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{p_i}$$

## I-3. تحريك نقطة مادية ( جسيم):

لدراسة تطور نظام متكون من جسيم او عدة جسيمات بشرط استعمال القانون الأساسي للتحريك أو بما يسمى قانون الثاني لنيوتن والذي ينص أن :

$$\vec{F_i} = \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \frac{dm_i\vec{V_i}}{dt}$$

وعموما اذا كانت كتلة الجسيم $m_i$ لا تتعلق بالزمن فإن:

$$\vec{F_i} = m_i\frac{d\vec{V_i}}{dt} = m_i\vec{a_i}$$

**نظرية العزم الحركي:**

عزم القوى الخارجية هو مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن.

البرهان : لدين ا $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad ; \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F}^{ext} \qquad ; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}^{ext} \qquad \text{لأن} \quad \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} = \vec{0}$$

وهو عزم قوة خارجية فعلا.

**تطبيق:**

برهن انه اذا كانت $\vec{F}^{ext}$ قوة مركزية فأن العزم الحركي $\vec{L}$ يكون ثابت زمني؟

البرهان: $\vec{F}^{ext}$ القوة المركزية بمعنى $\vec{F}^{ext} \,/\!/\, \vec{r}$

يكون $\vec{F}^{ext} \,/\!/\, \vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{r} \wedge \vec{F}^{ext} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$

أي $\vec{L}$ ثابت زمني.

### I-4. العمل والطاقة :

العمل للقوة الخارجية $\vec{F}^{ext}$ على طول المسار من بين نقطتين 1 و 2 يعرف كما يلي:

$$w_{1\,2} = \int_1^2 \vec{F}^{ext} . d\vec{r} \qquad , \qquad \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$w_{1\,2} = \int_{1}^{2} m\frac{d\vec{V}}{dt}.\,d\vec{r}$$

$$w_{1\,2} = \int_{1}^{2} m\vec{V}.\,d\vec{V}$$

$$w_{1\,2} = \frac{m}{2}\int_{1}^{2} 2\vec{V}.\,d\vec{V} = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

لكن الطاقة الحركية :

$$\frac{mV^2}{2} = T$$

إذن:

$$w_{1\,2} = T_2 - T_1$$

*في حالة اذا كانت القوة $\vec{F}^{ext}$ مشتقة من كمون $U$ او كامنة يمكننا صياغة ما يلي:

$$\vec{F}^{ext} = -\vec{\nabla}U$$

$$w_{1\,2} = \int_{1}^{2} \vec{F}^{ext}.\,d\vec{r}$$

$$= -\int_{1}^{2} \vec{\nabla}V.\,d\vec{r}$$

من المعادلة $(\boldsymbol{I-3})$ لدينا: $\vec{\nabla}V.\,d\vec{r} = dV$

وعليه

$$w_{1\,2} = -\int_{1}^{2} dV$$

$$= -[V]_1^2 = V_1 - V_2$$

$$w_{1\,2} = V_1 - V_2$$

إذن: $$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

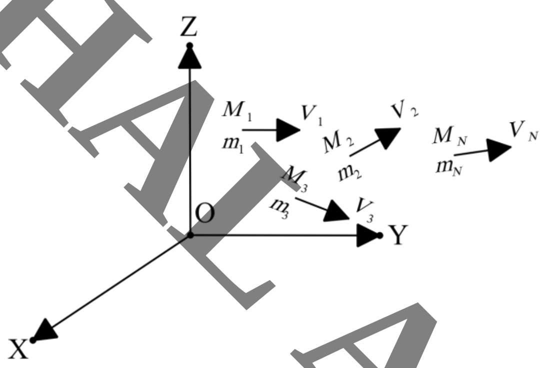
$$T_2 + V_2 = T_1 + V_2$$

إذا عرفنا الطاقة الميكانيكية بواسطة $E=T+V$ نستنتج أن الطاقة الميكانيكية محفوظة

$$\boldsymbol{E_1 = E_2}$$

في حالة القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون أو طاقة كامنة وتسمى هذه الخاصية بنظرية الطاقة الميكانكية .

### I-5. نظام متكون من N جسيم والقوى الخارجية:




**I-5-1. تعاريف :** لجملة النقاط المادية $M_N \dots, M_3, M_2, M_1$

أ) كمية الحركة : كمية الحركة لجملة النقاط تكون $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$ من أجل جسيم

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\,(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{V}_i(t)$$

ب) العزم الحركي $\vec{L}_{i/_0} = \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i$ من أجل جسيم

من أجل $N$ جسيم $$\vec{L}_{i/_0} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i/_0} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i$$

ت) مركز العطالة " مركز الكتل"

يعرف مركز العطالة $(G)$ لجملة من نقاط مادية $(M_1, M_2, \dots)$ بالنسبة إلى نقطة من الفضاء $(O)$ ب:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ملاحظة:

لدينا

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM}_i \dots\dots\dots \text{①}$$

ندخل الاشتقاق على طرفي المعادلة في ① بالنسبة للزمن نجد:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{V}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \dots\dots\dots \text{②}$$

حيث $\vec{V}_G$ سرعة مركز العطالة (سرعة مركز الكتل)

ندخل الاشتقاق مرة اخرى على المعادلة ② نجد:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{a}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{a}_G = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}$$

**نظرية :**

مركز العطالة " الكتلة" $G$ يتصرف و كأنه نقطة مادية كتلتها الكلية $M$ وخاضعة للقوة خارجية مساوية للمجموع القوى المؤثرة على كل جسيم $i$

**I-5-2. تعاريف : تعاريف لجملة نقاط مستمرة " غير منتهية" " جسم صلب" $N \to\to \infty$**

أ) كمية الحركة

$$\vec{p}(t) = \int dm(M)\vec{V}(M)$$

اذا كانت $\rho(M)$ هي كثافة المادة الحجمية (الكتلة الحجمية ) عند الموضع $M$ فإن

$$\rho(M) = \frac{dm(M)}{d\tau(M)} \Rightarrow dm(M) = \rho'(M)d\tau$$

$d\tau(M)$ هو الحجم العنصري ونكتب:

$$\vec{p}(t) = \int (\rho(M)d\tau)\vec{V}(M)$$

ب) العزم الحركي:

$$\vec{L}_{/O} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \left(dm\vec{V}(M)\right)$$

$$\vec{L}_{/O} = \int \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)\right)\rho(M)d\tau$$

ت) مركز عطالة لجملة نقاط غير منتهية :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int dm.\overrightarrow{OM}}{\int dm} = \frac{\int \rho(M)\overrightarrow{OM}d\tau}{\int \rho(M)d\tau}$$

ث) الطاقة الحركية

الطاقة الحركية لنظام مستمر (جسم صلب ) بالنسبة لمبدأ الاحداثيات (0):

$$T/_O = \frac{1}{2}\int dm\vec{V}^2$$

$$= \frac{1}{2}\int (\rho(M)d\tau)\vec{V}^2$$

## تمارين نموذجية:

**ت1**: ثلاث نقط $M_3, M_2, M_1$ تشتغل عند اللحظة $t$ المواضع الآتية :

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ \overrightarrow{OM_1} = t^2\vec{i} - t\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 = 2 \\ \overrightarrow{OM_2} = \vec{i} - 3t^2\vec{j} + 2t\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_3 = 3 \\ \overrightarrow{OM_3} = 2t\vec{i} - 4t^2\vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

المطلوب : أحسب كل من $\vec{p}(t)$ ، $\vec{L}_{/O}$ ، $\overrightarrow{OG}$ مركز العطالة .

**ت2:**

نصف كرة قطرها تدور حول المحور بسرعة زاوية ثابته المطلوب حساب المقادير التالية:

$\vec{p}(t)$ ، $\vec{L}_{/O}$ ، $\overrightarrow{OG}$ مركز العطالة.

## I-6. بعض التمارين المقترحة حول الفصل الاول:

### التمرين الأول :

لتكن $\boldsymbol{\Psi}$ دالة سلمية، **a** و **b** شعاعان: برهن المعادلات التالية؟

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\quad\text{(cyclic)}\qquad\text{(a)}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\qquad\text{(b)}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\qquad\text{(c)}$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0\qquad\text{(d)}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0\qquad\text{(e)}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})-\nabla^2\mathbf{a}\qquad\text{(f)}$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\mathbf{a}\qquad\text{(g)}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{a})=\nabla\psi\times\mathbf{a}+\psi\nabla\times\mathbf{a}\qquad\text{(h)}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})\qquad\text{(i)}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})\qquad\text{(j)}$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\qquad\text{(k)}$$

### التمرين الثاني :

لتكن نقطة مادية M كتلتها m تتحرك في المعلم $(O,X,Y,Z)$ وإحداثياتها $(x,y,z)$خاضعة لقوة F مركباتها الكارتيزية كالآتي :

$$\begin{cases} F_x=ax+by \\ F_y=bx+ay+cxy \\ F_z=bxy+az+cxyz \end{cases}$$

حيث $a,b,c$ ثوابت.

1)- حدد الثابت c أذا كانت القوة F مشتقة من طاقة كامنة $U(x,y,z)$ .

2)-أعط عبارة الطاقة الكامنة $U(x,y,z)$ .

### التمرين الثالث :

أحسب مركز العطالة $\overrightarrow{\mathrm{OG}}(\mathrm{t})$ لنصف قرص قطره $(2\mathrm{R})$ كتلته موزعة سطحيا بانتظام $(\sigma)$ حيث الكتلة السطحية ثابتة؟

### التمرين الرابع :

أحسب كلا من $\vec{P}(t)$ و $\vec{L}(t)$ لدفة مستطيلة تدور حول المحور OZ كتلته موزعة سطحيا بانتظام $(\sigma)$ حيث الكتلة السطحية ثابتة؟

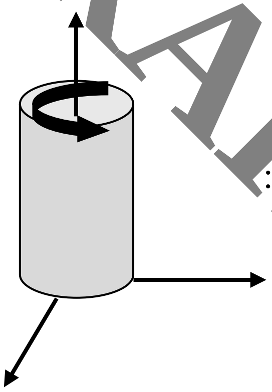
**التمرين الخامس :**

أحسب مركز العطالة $\overrightarrow{OG}(t)$ لدفة على شكل مثلث متساوي

الأضلاع طول ظلعه $(a)$ ؛ كتلته موزعة سطحيا بانتظام $(\sigma)$ :

حيث الكتلة السطحية ثابتة .

**التمرين السادس :**

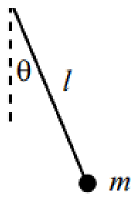


أحسب كلا من $P(t)$ ؛ $L(t)$ للأسطوانة مستطيلة نصف قطرها $(R)$

تدور حول المحور OZ أنظر الشكل ؛ كتلته موزعة حجميا بانتظام $(\rho)$ :

حيث الكتلة الحجمية ثابتة .

**التمرين السابع :**




لدينا نواس بسيط كتلته $(m)$ وطول خيطه $(l)$؛ خلال حركته يصنع الزاوية $(\theta)$ مع الشاقول

(انظر الشكل المقابل). حدد كلا من :

- شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$؟
- شعاع كمية الحركة $\overrightarrow{P(t)}$؟
- شعاع العزم الحركي $\overrightarrow{L(t)}$؟
- طبيعة الحركة؟

**التمرين الثامن :**

أحسب كلا من $\overrightarrow{OG}$ ؛ $\overrightarrow{L(t)}$ لنصف أسطوانة مستطيلة نصف قطرها $(R)$ و ارتفاعها $(h)$

تدور حول المحور OZ كتلتها موزعة حجميا بانتظام $(\rho)$ :

## الفصل الثاني

## صياغة لاغرانج

### II-1. الاحداثيات المعممة :

لقد رأينا أن موضع الجسيم رقم $i$ في الفضاء ( الفراغ) يمكن تعيينه "وصفه" وصفا كاملا بثلاثة احداثيات وقد تكون هذه الاحداثيات كارتيزية $(x, y, z)$ أو الاستوانية $(\rho, \theta, z)$ أو كروية $(r, \theta, \varphi)$ ويتم الاختيار الاحداثيات حسب الجسم المدروس ونحتاج إلى احداثيين فقط إذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستو أوسط بينما إذا كان الجسيم يتحرك على خط أو منحنى نحتاج إلى احداثي واحد.

خصائص الاحداثيات المعممة

1 ليس بالضرورة كارتيزية

2 يجب أن تكون مستقلة

3 يجب أن تكون كاملة

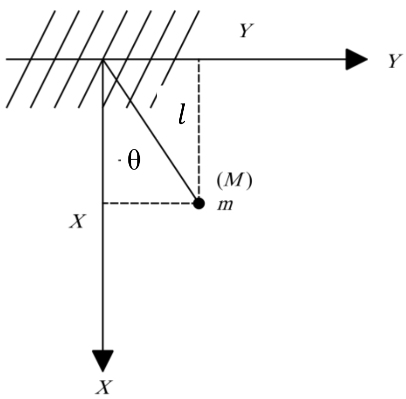
4 النظام يجب أن يكون هولونومي *Holonomie*

5 مستقل : عندما نثبت كل احداثيا تستمر الحركة في الاحداثي المجالي " الحيز"

6 كامل : قادر على تحديد مكان كل الاجزاء في جميع الأوقات

الأمثلة

1 نواس بسيط



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$= lcos(\theta)\vec{i} + lsin(\theta)\vec{j}$$

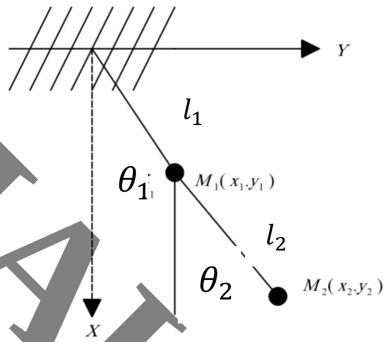
$$= x(\theta)\vec{i} + y(\theta)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(\theta)$$

س: ماذا نقول عن الاحداثية $\theta$ ؟

ج: نقول عن الاحداثية $\theta$ انها تلعب دور احداثية معممة.

2 نواس بسيط مزدوج




$$\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_2(x_2, y_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$= [l_1cos(\theta_1) + l_2cos(\theta_2)]\vec{i} + [l_1sin(\theta_1) + l_2sin(\theta_2)]\vec{j}$$

$$= x_2(\theta_1, \theta_2)\vec{i} + y_2(\theta_1, \theta_2)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_2(\theta_1, \theta_2)$$

س: ماذا نقول عن الاحداثيتين $\theta_1, \theta_2$ ؟

ج: نقول عن الاحداثيتين $\theta_1, \theta_2$ انهما تلعبا دور احداثيتين معممتين.

في حالة منظومة ميكانيكية متكونة من $N$ جسيم نحتاج إلى $3N$ من الاحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد بصورة كاملة. والتي تسمى الاحداثيات المعممة ونرمز لهذه الاحداثيات بالرموز $q_1, q_2, \dots, q_n$ وقد تكون الاحداثي $q_j$ زاوية أو مسافة .

## 2-II. التحويل بين الاحداثيات:

في حالة ما اذا كان لدينا $\vec{r}_i$ هو شعاع الموضع للجسيم رقم $i$ في مجموعة ميكانيكية مكونة من $N$ من الجسيمات ( النقاط المادية). فيمكن كتابة ما يلي:

$$\vec{r}_i = x_i\vec{\imath} + y_i\vec{\jmath} + z_i\vec{k} \ldots\ldots\ldots 1$$

و إذا رمزنا للإحداثيات المعممة بـــ : $q_1, q_2, \ldots, q_n$ فإن التحويل بين الاحداثيات الكارتزية والمعممة يكون كالتالي:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \ldots\ldots\ldots 2 \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \end{cases}$$

نعوض 2 في 1 نجد:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \ldots\ldots\ldots 3$$

وأكثر اختصار تكون 3 على الشكل

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_j, t\right) ; 1 \le i \le N \wedge 1 \le j \le n$$

## 3-II. السرعات المعممة:

السرعات المعممة هي المعدلات "المشتقات" الزمنية للإحداثيات المعممة و عددها يساوي عدد الإحداثيات المعممة و تساوي ايضا عدد درجات الحرية أي ان :

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n \;\; ; \; 1 \le j \le n$$

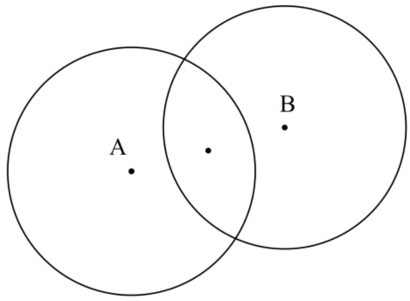
$$Or \; \dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} \;\; ; \; 1 \le j \le n$$

## 4-II. درجات الحرية:

هي عدد الازاحات الافتراضية (الازاحات التفاضلية) المستقلة و التي تتفق مع القيود المفروضة

او هي عدد الإحداثيات المعممة ( احداثيات مستقلة ) اللازمة لتحديد موضع الجسم.

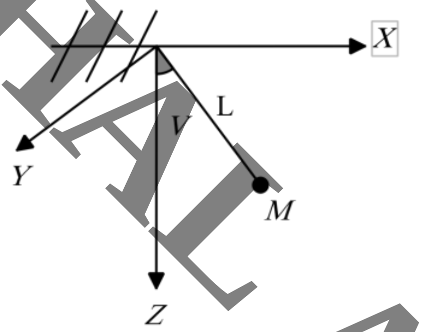
فمثلا في حالة جسمين مقيدين ( انظر الشكل )




درجة الحرية عددها 4 بدلا من 6

أي
$$\begin{aligned} DOF_s &= 3N - C \\ &= 3(2) - 2 = 4 \end{aligned}$$

مثال أخر: نواس بسيط




يتحرك في الفضاء. فما هي درجة حرية النواس البسيط

عدد الاحداثيات المعممة $N = 1 \Rightarrow 3N = 3$

ولكن يوجد قيد واحد وعليه:

$$N_{dL} = DOF_s = 3 - 1 = 2$$

وهما الزاويتين الكروية $(\varphi, \theta)$ لأن خلال حركة النقطة $M$ تمسح سطح كرة نصف قطرها $L$ طول النواس.

وكخلاصة عامة:

يعرف عدد درجات الحركية $(DOF_s, N_{dL})$ بـــ

$$N_{dL} = DOF_s = 3N - (m + n)$$

حيث

$n$: عدد القيود الهولونومية وهي عبارة عن مجموعة العلاقات الرياضية التي تربط الاحداثيات المعممة والزمن $t$ أي:

$$f_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$m$ : عدد القيود الغير هولونومية وهي عبارة عن مجموعة العلاقات الرياضية التي تربط الاحداثيات المعممة والسرعات المعممة والزمن $t$ أي:

$$f_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

### 5-II الازاحات الصغيرة في الاحداثيات:

إذا كان $\vec{r}_i$ هو شعاع الموضع للجسيم " $i$ " فإن:

$$\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i) = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_n} dq_n & \dots\dots\dots 1 \\ dy_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1} dq_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_n} dq_n & \dots\dots\dots 2 \\ dz_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1} dq_1 + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_n} dq_n & \dots\dots\dots 3 \end{cases}$$

$$1.\vec{\imath} + 2.\vec{\jmath} + 3.\vec{k} \equiv$$

$$d\vec{r}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dq_1}\, dq_1 + \frac{d\vec{r}_i}{dq_2}\, dq_2 + \dots + \frac{d\vec{r}_i}{dq_n}\, dq_n$$

$$\boldsymbol{d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}\, dq_j \dots\dots\dots (\mathrm{II}-1)}$$

واضح أن الازاحة في شعاع الموضع $d\vec{r}_i$ هي مجموع المشتقات الجزئية لـــ $\vec{r}_i$ بالنسبة للاحداثيات المعممة . وواضح ايضا أن المشتقات الجزئية هي دوال للإحداثيات المعممة $q_j$.

فمثلا:

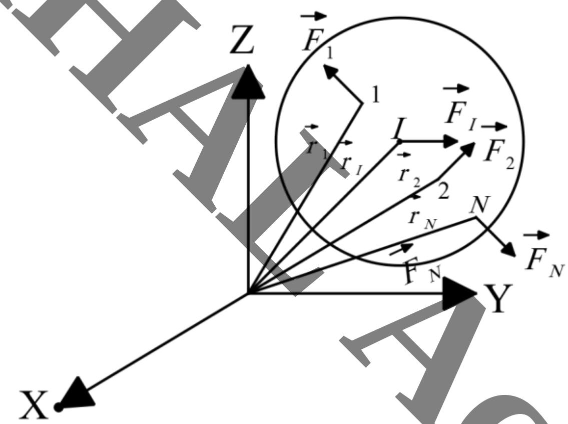
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3) = q_3^2 q_2 \vec{\imath} + q_1 q_3 \vec{\jmath} + q_1^2 e^{q_2} \vec{k}$$

وعموما اذا كان $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t)$:

فإن:

$$\boldsymbol{d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt}$$

## II -6 القوى المعممة:




اذا وقع جسيم i تحت تأثير ازاحة $d\vec{r}_i$ وتحت تأثير قوة $\vec{F}_i$ فإننا نعلم أن العمل المبذول $\delta w_i$ يكون

$\delta w_i = \vec{F}_i . d\vec{r}_i$ :

والعلاقة السابقة تصبح كذلك لمجموعة ميكانيكية متكونة من N جسيم كالتالي:

$$\delta w = \sum_{i=1}^{N} \delta w_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . d\vec{r}_i \ldots\ldots\ldots 1$$

ولدينا العبارة$(\mathbf{1}-\mathbf{II})$ :

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, dq_j$$

نعوض عن $\vec{r}_i$ في 1 نجد:

$$\delta w = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, dq_j$$

$$\delta w = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, dq_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j$$

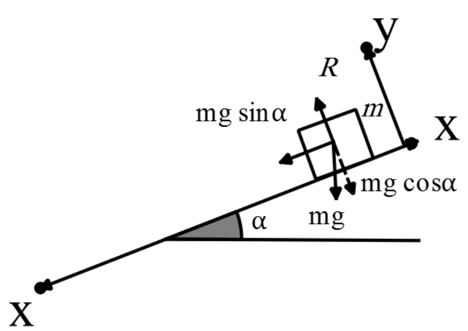
$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{Q}_j dq_j$$

حيث:

$$\mathbb{Q}_{\boldsymbol{j}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}} . \frac{\boldsymbol{\partial \vec{r}_i}}{\boldsymbol{\partial q_j}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{II}-\mathbf{2})$$

نسمي الكمية $\mathbb{Q}_j$ المعرفة بالعبارة $(\mathbf{2}-\mathbf{II})$ بالقوة المعممة المرافقة للإحداثي $q_j$

مثال تطبيقي: الحركة على مستو مائل



الهدف: هو ايجاد القوى المعممة بطريقتين:

**ط1:**

$$\vec{F} = (mg\sin\alpha)\vec{\imath} + (R - mg\cos\alpha)\vec{\jmath}$$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = dx\vec{\imath}$$

$$\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

$$\delta w = [(mg\sin\alpha)\vec{\imath} + (R - mg\cos\alpha)\vec{\jmath}]\mathrm{d}x\vec{\imath}$$

$$\delta w = (mg\sin\alpha)dx = \mathbb{Q}_x dx \Rightarrow \mathbb{Q}_x = mg\sin\alpha$$

**ط2:**

$$\mathbb{Q}_x = \vec{F}_1.\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ R - mg\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = mg\sin\alpha$$

### 7-II معادلات لاغرانج:

بإمكاننا اشتقاق معادلات لاغرانج بعدة طرق منها القانون الثاني لنيوتن أو مبدأ الفعل الأصغري، وسوف نستخدم في هذا الفصل القانون الثاني لنيوتن كطريقة اولى ثم نأتي على طريقة مبدأ الفعل الأصغري. ولكن عملية بناء معادلات لاغرانج تحتاج إلى بعض المعادلات الرياضية وخاصة منها القوى المعممة والطاقة الحركية .

العلاقة الأولى:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{II-4})$$

البرهان:

$$\vec{r}_i = \vec{r}(q_j, t) = \vec{r}(q_j) \ldots\ldots\ldots 1$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{dt}\, d\vec{r}_i = \frac{1}{dt}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, dq_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j \ \dots\dots\dots\ 2$$

نقوم بالاشتقاق الجزئي لطرفي المعادلة 2 بالنسبة إلى السرعة المعممة $\dot{q}_k$ نجد:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\ \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\ \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\ \dot{q}_k + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\ \dot{q}_n\right)$$

$$= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

العلاقة الثانية:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}} \ \dots\dots\dots\ (\mathbf{II}-\mathbf{5})$$

البرهان : لدينا من الفقرة **5-II** أن $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ دوال في الاحداثيات المعممة:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = f(q_j)$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) dq_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j$$

$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot{\vec{r}}_i\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}$ وهو المطلوب

ملاحظة: بصفة عامة يمكننا تبديل موضعي التفاضل الكلي و التفاضل الجزئي .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial .}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{d.}{dt}\right)$$

العلاقة الثالثة:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\frac{\partial T_i}{\partial q_j}=m_i\dot{\vec{r}}_i.\left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\right)} & \ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{II-6})\\ \boldsymbol{\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}=m_i\dot{\vec{r}}_i.\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)} & \ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{II-7})\end{cases}$$

البرهان:

لدينا

$$a)\ \ T_i=\frac{1}{2}m_i\left[\vec{V}_i\right]^2=\frac{1}{2}m_i\left[\dot{\vec{r}}_i\right]^2$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_j}=m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\ \ldots\ldots\ldots$$ وهو المطلوب

$$b)\quad \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}=m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}=m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

معادلة لاغرانج:

إذا كان لدينا مجموعة ميكانيكية هولونومية مكونة من $N$ جسيم نأخذ الجسيم ذو الرتبة $(i)$ وكتلته $m_i$ واحداثياته المعممة $q_j$ وتؤثر عليه قوة $\vec{F}_i$ ، فإذا كان $\vec{r}_i$ هو شعاع الموضع للجسيم $(i)$ عند اللحظة $t$ فإن من قانون نيوتن الثاني تكون معادلة الحركة كالآتي:

$$\vec{F}_i=m_i\ddot{\vec{r}}_i$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة في الحد $\frac{\vec{r}_i}{\partial q_j}$ نحصل على :

$$\vec{F}_i.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=m_i\ddot{\vec{r}}_i.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

إذا اجرينا الاشتقاق على الحد $\vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ بالنسبة للزمن مع استخدام العلاقة $(\mathbf{II-5})$ نحصل:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{\dot{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$$
$$= \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial q_j} \quad \dots\dots\dots \; *$$

بضرب طرفي المعادلة $*$ في $m_i$ نحصل على:

$$m_i \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial q_j}$$

باستخدام العلاقتين $(\mathbf{II-6})$ و $(\mathbf{II-7})$ نجد:

$$\boldsymbol{m_i \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j}} \quad \dots\dots\dots (\mathbf{II-8})$$

المعادلة $(\mathbf{II-8})$ محققة من أجل جسيم $(i)$ أما بالنسبة للنظام يحتوي $N$ جسيم فيكفي الجمع على $N$

أي :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T_i}{\partial q_j}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right)\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

اي ان:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}-9)$$

ونذكر : $Q_j$ هي القوى المعممة

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

حيث : $\vec{F}_i$ هي محصلة القوى المفروضة على الجسيم $(i)$ إذا كانت هذه القوى جزء منها مشتق من كمون ( طاقة كامنة ) برمز لها ب $\vec{F}_i^{\ U}$ والجزء الآخر يكون قوى احتكاك نرمز لها ب $\vec{F}_i^{\ f}$ وعليه يمكننا أن نكتب :

$$\vec{F}_i=\vec{F}_i^{\ U}+\vec{F}_i^{\ f}$$

نعوض على $\vec{F}_i$ في عبارة $Q_j$ نحصل على:

$$\begin{aligned}Q_j&=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\ U}+\vec{F}_i^{\ f}\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\\&=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\ U}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\ f}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\\&=Q_j^{\ U}+Q_j^{\ f}\end{aligned}$$

حيث:

$$Q_j^{\ U}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\ U}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\sum_{i=1}^{N}-\vec{\nabla}U\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\quad,\quad \vec{\nabla}U=\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

و كذلك الكمون ( طاقة كامنة ) دوما لا تتعلق بالسرعات المعممة؛ أي ان :

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \ \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

ومنه:

$$Q_j = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}\right] + Q_j^{\,*}$$

و أخيرا تصبح المعادلة (**II − 9**) في شكلها الأخير

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} + Q_j^{\,*}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}\right) = Q_j^{\,*}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - U)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U) = Q_j^{\,*}$$

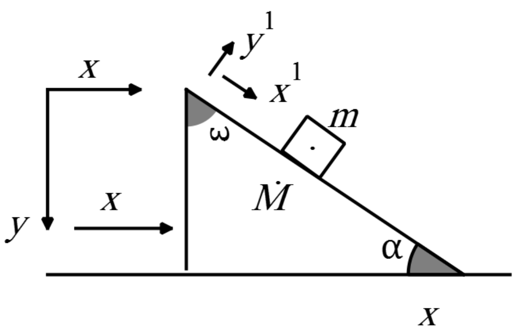
حيث الحد $T - U$ يرمز له ب : $L$ أي:

$$L = T - U$$

ونكتب:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\,*}} \ \ldots\ldots\ldots (\mathbf{II - 10})$$

مثال تطبيقي :



الجسيم "$A$" ذو الكتلة $(m_A)$ ينزلق بدون احتكاك من أعلى وتد " $w$ " كتلته " $M$" وهذا الوتد ينزلق بدوره على طاولة أفقية بدون احتكاك.

حدد تسارع كلا من الجسمين: $w$ , $A$

الحل:

$$L = T_s - U_s$$

$$\begin{cases} T_s = T_m - T_M \\ U_s = U_m - U_M \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} U_m = mgy_m \\ U_M = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$for\ M \begin{cases} X_M = X_M \\ Y_M = C^{st} \end{cases}$$

$$for\ m \begin{cases} x_m = X_M + x_m{}' \cos\alpha \\ y_m = D - y_m{}' \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{matrix} for\ M \\ for\ m \end{matrix} \begin{cases} V_M = \left(V_x(M), V_y(M)\right) = (\dot{X}_M, 0) \\ V_m = \left(V_x(m), V_y(m)\right) = \left(\dot{X}_M + \dot{x}'_m \cos\alpha\,, -\dot{y}_m{}' \sin\alpha\right) \end{cases}$$

ومنه:

$$T_m = \frac{1}{2} m \left[ \left(\dot{X}_M + \dot{x}'_m \cos\alpha\right)^2 + (-\dot{y}_m{}' \sin\alpha)^2 \right]$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \left[ \dot{X}_M{}^2 + \dot{x}'_m{}^2 + 2\dot{X}_M \dot{x}'_m \cos\alpha \right]$$

$$T_M = \frac{1}{2} M \left[ \dot{X}_M{}^2 \right] = \frac{1}{2} M \dot{X}_M{}^2$$

$$U_m = mg(D - x_m{}' \sin\alpha)$$

وتوجد احداثيتين معممتين هما: $(X_M, x_m{}')$

ومنه تابع لاغرانج $L$

$$L(X_M, x'_m, \dot{X}_M, \dot{x}_m{}') = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}_M{}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{X}_M{}^2 + 2\dot{X}_M\dot{X}'_m \cos\alpha\right]$$

$$-mg(D - x_m{}' \sin\alpha)$$

معادلات لاغرانج للحركة:

$$for\ X_M :\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_M}\right) = \frac{\partial L}{\partial X_M}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(m+M)\dot{X}_M + \frac{m}{2}(2\dot{x}'_m \cos\alpha)\right] = 0$$

$$(m+M)\ddot{X}_M + m\ddot{x}'_M \cos\alpha = 0 \ \ldots\ldots\ldots 1$$

$$for\ x'_m : \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_m}\right) = \frac{\partial L}{\partial x'_m}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(2\dot{x}'_M + 2\dot{X}_M \cos\alpha\right)\right] = -mg(-\sin\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}'_M + \dot{X}_M \cos\alpha\right)\right] = mg\sin\alpha$$

$$m\left(\ddot{x}'_M + \ddot{X}_M \cos\alpha\right) = mg\sin\alpha$$

$$m\ddot{x}'_M + m\ddot{X}_M \cos\alpha = mg\sin\alpha \ \ldots\ldots\ldots 2$$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{X}_M + m\ddot{x}'_M \cos\alpha = 0 \ \ldots 1 \\ m\ddot{X}_M \cos\alpha + m\ddot{x}'_M = mg\sin\alpha \quad \ldots 2 \end{cases}$$

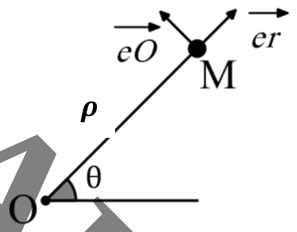
$$\ddot{X}_M = \frac{-g\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\frac{m+M}{m}\right) - \cos^2\alpha}$$

$$\ddot{x}'_M = \frac{g\sin\alpha}{1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\alpha}$$

## 8-II تطبيقات حول استخدام معادلات لاغرانج:

### .1-8-II حركة جسيم في حقل الثقالة الأرضية $(g)$:

الهدف: إيجاد معادلات حركة جسيم يتحرك في حقل الجاذبية الأرضية (تحت قوة الجاذبية) خذ الاحداثيات القطبية كالإحداثيات معممة وأحصل على معادلات لاغرانج . ولاحظ أن θ احداثية دورية وحدد أن العزم الحركي ثابت زمني .




$$\overrightarrow{om} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$U = \frac{-GMm}{\rho} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \rho} = F_\rho\ , -\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$L\left(\rho,\theta,\dot{\rho},\dot{\theta}\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{GM}{\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^2 + F_\rho$$

$$\left(m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2\right) = -F_\rho \quad \dots\dots\dots 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \ m\rho^2\dot{\theta} = l = cst$$

وفعلا العزم الحركي ثابت زمني.

ومنه معادلات الحركة للجسيم:

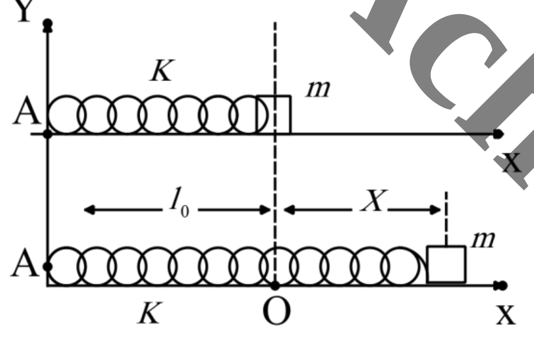
$$\begin{cases} m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right) = -F_\rho(\rho) \dots\dots\dots 1 \\ \qquad m\rho^2\dot{\theta} = l \dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

ولحل هذه المعادلة والحصول على حل نأخذ $U = \frac{1}{\rho}$

### II-8-2. حركة جسيم مربوط إلى النابض المرن " الهزاز التوافقي البسيط":



الكتلة $m$ موضوعة على طاولة أفقية ملساء $\left(\vec{f} = \vec{0}\right)$ ممثلة بالمحور $(ox)$ وهي مثبته في إحدى طرفي نابض، بينما الطرف الثاني للنابض مثبت عند النقطة $(A)$ الطول الطبيعي للنابض هو $l_0$ وكتلته مهملة.




*إذا ازيحت الكتلة $m$ على طول المحور $(ox)$ بمسافة صغيرة "$x$" فإنها سوف تهتز إلى الخلف وأمام حول موضع الاتزان " 0" انظر الشكل المقابل .

الهدف: هو ايجاد معادلات الحركة للجسيم $(m)$ نأخذ $x$ الإحداثية الكارتزية كإحداثية معممة وحيدة ونحصل معادلة لاغرانج التالية :

- الطاقة الحركية لهزاز التوافقي البسيط

$$T = \frac{1}{2} m {v_m}^2 \quad , \qquad v_m = \dot{x}$$
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

الطاقة الكامنة المرونية هي:

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

وعليه تابع لاغرانج

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

ومعادلة لاغرانج للحركة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

إذن

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

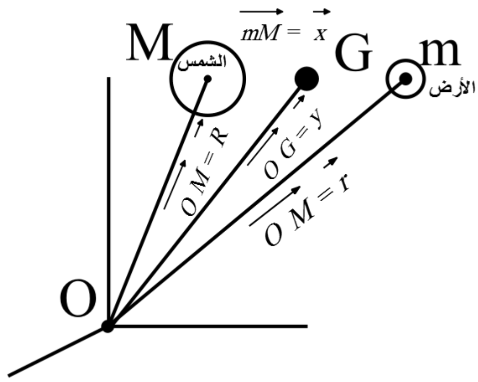
وهي معادلة الحركة للهزاز التوافقي وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

وحلها:

$$x(t) = x_0 \sin(wt + Q)$$
$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### 3-8-II. مسألة حركة جسمين : $(m_1, m_2)$:

نعتبر نظام متكون من الأرض والشمس كتلتهما على التوالي $m$ ، $M$ إذا أهملنا حركة أرض حول نفسها أكتب تابع لاغرانج ومعادلات الحركة للنظام .




أ) في الاحداثيات القطبية

ب) في الاحداثيات الكروية

ت) كتابة تابع لاغرانج : $L$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \left(-\frac{GM_m}{\|\vec{R} - \vec{r}\|}\right)$$

$$\vec{Y} = \overrightarrow{OG} = \frac{m\vec{r} + M\vec{R}}{(M+m)} \dots\dots\dots 1$$

$$\vec{X} = \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{mO} + \overrightarrow{OM}$$
$$= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{Om} = \vec{R} - \vec{r}$$
$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{X} \dots\dots\dots 2$$

من 1 و 2 نجد بالتعويض مرة عن $\vec{r}$ ومرة عن $\vec{R}$ نجد:

$$\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OG} - \dfrac{M}{(M+m)}\vec{X} = \vec{Y} - \dfrac{M}{(M+m)}\vec{X} \\ \vec{R} = \overrightarrow{OG} + \dfrac{m}{(M+m)}\vec{X} = \vec{Y} + \dfrac{m}{(M+m)}\vec{X} \end{cases}$$

بعد التعويض عن $\dot{\vec{r}}$ و $\dot{\vec{R}}$ في تابع لاغرانج $L$ نجد:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{Y}} - \frac{M}{(M+m)}\dot{\vec{X}}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{\vec{Y}} + \frac{m}{(M+m)}\dot{\vec{X}}\right)^2 + \frac{GMm}{X}$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{Y}}^2 + \frac{M^2}{(M+m)^2}\dot{\vec{X}}^2 - 2\frac{M}{(M+m)}\dot{\vec{X}}\dot{\vec{Y}}\right) + \frac{1}{2}M\left(\dot{\vec{Y}}^2 + \frac{m^2}{(M+m)^2}\dot{\vec{X}}^2 + 2\frac{m}{(M+m)}\dot{\vec{X}}\dot{\vec{Y}}\right) + \frac{GMm}{X}$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{(M+m)}\dot{X}^2 + \frac{GMm}{X}$$

لدينا:

$$\ddot{Y} = 0 \Rightarrow \dot{Y} = const = 0$$

ومنه

$$L = \frac{1}{2}\frac{Mm}{(M+m)}\dot{X}^2 + \frac{GMm}{X}$$

- الكتلة المختزلة

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{M} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{M.m}{M+m}$$

بعد التعويض عن الكتلة المختزلة $N$ نجد:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{X}^2 + \frac{GMm}{X}$$

معادلات الحركة:

أ) في حالة الاحداثيات القطبية $(p.\theta)$

نعوض عن $X = \rho$ نجد:

$$\begin{cases} X = \rho \\ \dot{X} = \dot{\rho}\ \overrightarrow{e_p} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \end{cases}$$

$$L(\rho,\dot{\rho},\dot{\theta})=\frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2\ +\rho\dot{\theta}^2)+\frac{GMm}{\rho}$$

وقد لاحظنا في السابق نفس هذا المثال حالة حركة جسيم في حقل جاذبية .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right)=\mu\ddot{\rho}\ ,\frac{\partial L}{\partial\rho}=\mu\rho\dot{\theta}^2+f(\rho)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\mu\rho^2\ddot{\theta}\ ,\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

ب) في حالة الاحداثيات الكروية: $(r\ ,\theta\ ,\varphi)$

$$x=r$$
$$\vec{V}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\sin\theta\ \ \dot{\varphi}\vec{R}_\varphi$$
$$L=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin\theta^2\,\dot{\varphi}^2\right)+\frac{GMm}{r}$$

ومعادلات الحركة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)=\mu\ddot{r}\ ,\frac{\partial L}{\partial r}=\mu r\dot{\theta}^2+\mu r\sin\theta^2\,\dot{\varphi}^2+g(r)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\mu r^2\ddot{\theta}\ ,\frac{\partial L}{\partial\theta}=\mu r^2\cos\theta\sin\theta\ \ \dot{\varphi}^2+\mu 2r\dot{r}\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)=\mu r^2\sin\theta^2\,\ddot{\varphi}+\mu\dot{\varphi}\left(2r\dot{r}\sin\theta^2+2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\ \ \right),\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

$$\begin{cases}\mu\ddot{r}=\mu r\dot{\theta}^2+\mu r\sin\theta^2\,\dot{\varphi}^2+g(r) & \dots\dots\dots 1\\ \mu\left(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}\right)=\mu r^2\cos\theta\sin\theta\ \ \dot{\varphi}^2 & \dots\dots\dots 2\\ \mu(r^2\sin\theta^2\,\ddot{\varphi}+2r\dot{r}\sin\theta^2+2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}\ \ )=0 & \dots\dots\dots 3\end{cases}$$

## II-9. مبدأ الفعل الأصغري: "حساب التغاير ":

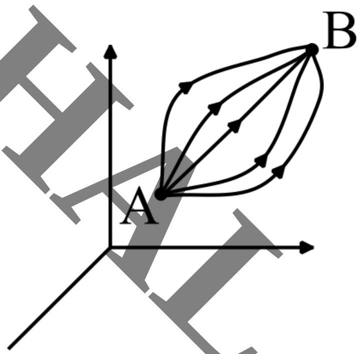
يسمح هذا المبدأ بصياغة معادلة" لاغرانج" بطريقة أخرى .

تعريف: الفعل هو المقدار المرتبط بالمسار $(\varphi)$ المتبع خلال الحركة

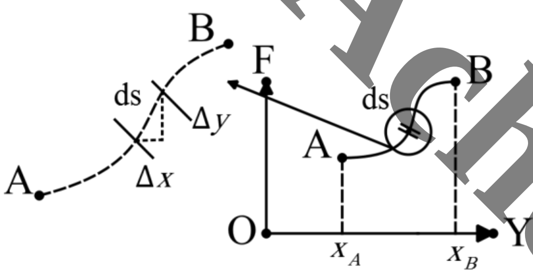
$$S_{A\to B}(\varphi) = \int_A^B L\,(q,\dot{q},t)dt$$

حيث $(\varphi)$ هو المسار المتبع في الانتقال من نقطة $A$ ألى $B$ من بين المسارات المنطلقة من $A$ الواصلة إلى $B$ يوجد مسار فعلي وحيد يتبعه النظام خلال الحركة " التطور" ونسميه $\varphi_0$ ومن خصائص هذا المسار الفعلي. أن الفعل $S_{AB}(\varphi_0)$ يأخذ قيمته الحدية أي $\delta S_{AB}(\varphi_0) = 0$ .

انظر الشكل ادناه.




ولفهم هذا المبدأ جيدا نأخذ المثال التالي:




لدينا: $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

إذا كان :

$$\left.\begin{array}{ccc} \Delta x & \overset{\ll}{\to} & dx \\ \Delta y & \overset{\ll}{\to} & dy \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta s \to ds$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

للحصول على $S$ تكامل $dS$ أي:

$$S = \int dS = \int_{X_A}^{X_B} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$S = \int_{X_A}^{X_B} \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$S = \int_{X_A}^{X_B} \sqrt{1 + y'^2}\, dX$$

$S$ يمكن أن يكون زمن، طول ، مساحة .اذن عموما يكون التكامل الاخير بالشكل :

$$I = \int_{X_A}^{X_B} F(x, y, y')\, dx$$

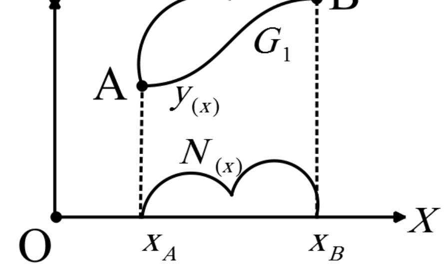
$y(x)$ معادلة المسار الفعلي $\varphi_0$

$Y(x)$ معادلة المسار الكيفي $\varphi$

حيث ان:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} \eta(x_A) = 0 \\ \eta(x_B) = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y, y') \rightarrow F(x, Y, Y')$$



حيث

إذا كان
$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta(x)$$

$$Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'(x)$$

$$I(\varepsilon) = \int_{X_A}^{X_B} F(x, Y, Y')\, dx$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{X_A}^{X_B} F(x, Y, Y')\, dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{X_A}^{X_B} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{dY}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon}\right) dx = 0$$

$$\int_{X_A}^{X_B} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\right) dx = 0$$

$$\int_{X_A}^{X_B} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x)\right) dx + \int_{X_A}^{X_B} \left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\right) dx = 0$$

نكامل الحد الثاني من التكامل الأخير بالتجزئة

$$* = \int_{X_A}^{X_B} \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\, dx$$

نضع :

$$\begin{cases} V = \eta(x) \\ V' = \eta'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = \dfrac{\partial F}{\partial Y'} \\ U' = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial Y'} \end{cases}$$

$$*= \int_{X_A}^{X_B} \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\,dx = \left[\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta(x)\right]_{x_A}^{x_B} - \int_{X_A}^{X_B} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta(x)\,dx$$

لدينا مما سبق:

$$\eta(X_A) - \eta(X_B) = 0$$

ومنه:

$$*= \int_{X_A}^{X_B} \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\,dx = -\int_{X_A}^{X_B} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta(x)\,dx$$

إذن:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{X_A}^{X_B} \frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x)\,dx - \int_{X_A}^{X_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right)\eta(x)\,dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{X_A}^{X_B} \left[\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right)\right]\eta(x)dx = 0$$

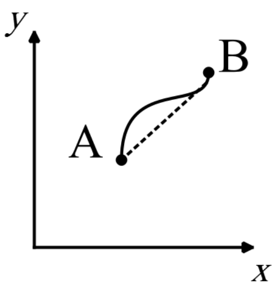
مادام $\eta(x) \neq 0$ فإن

$$\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right) = 0$$

وهي معادلة أولر لاغرانج

**مثال تطبيقي1 :**

أحسب أقصر مسافة بين نقطتين $A$ و$B$ من المستوي $(x)$




$$S_{AB} = \int_{X_A}^{X_B} \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{F}\, dx$$

$$F = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = c \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{c}$$

$$y'^2 = c^2(1+y'^2) \Rightarrow y'^2(1-c^2) = c^2$$

$$y'^2 = \frac{c^2}{(1-c^2)} \Rightarrow y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = a = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y = ax + b$$

ومنه أقصر مسافة بين $A$ و $B$ هو خط مستقيم

وإذا كانت $F$ تعبر عن تابع لاغرانج $L$

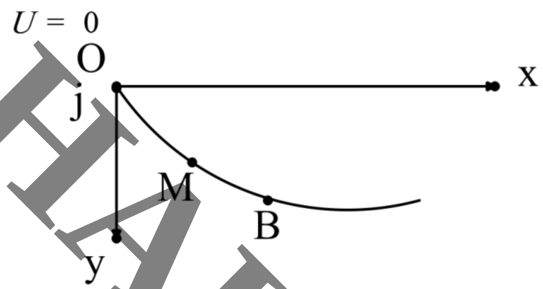
فإن:

$$F(x\ ,y,y') \equiv L(q,\dot{q},t\ )$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0$$

**مثال تطبيقي2 :**

جسيم ينزلق من السكون عند النقطة ما على سلك أملس في مستوي رأسي إلى نقطة أخرى تحت تأثير الجاذبية – أوجد شكل السلك ( معادلة المنحنى) حتى يكون أقل زمن ممكن؟




$$E^{(0)}=E^{(M)}$$

$$\frac{1}{2}mY_0+0=\frac{1}{2}mV^2+mg(Y_0-Y)$$

$$0=\frac{1}{2}mV^2+mgY$$

$$V^2=2gy \Rightarrow\ V=\sqrt{2gy}$$

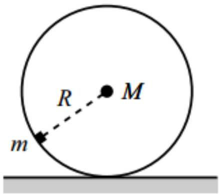
$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}} \qquad ds=\sqrt{dy^2+\ dx^2}=\sqrt{1+y'}dx$$

$$t=\int_0^x\frac{\sqrt{1+y'}}{\sqrt{2gy}}$$

## II-10. تمارين مقترحة حول لاغرانج و مبدا الفعل الاصغري:

### التمرين الأول :



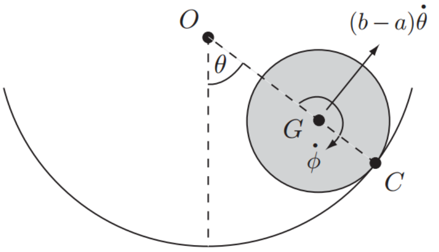

كتلة نقطية (m) مثبتة في نقطة من حافة عجلة نصف قطرها (R) ؛

ان العجلة عديمة الكتلة ماعدا الكتلة (M) واقعة في مركزها

(أنظر الشكل المقابل ) العجلة تدور على طاولة أفقية بدون انزلاق:

- برهن انه توجد إحداثية واحدة معممة (θ) ؟
- حدد القوى المعممة الممكنة ؟

### التمرين الثاني :

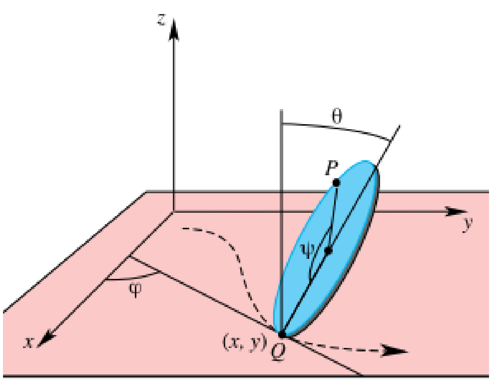



تتدحرج بدون انزلاق الاسطوانة الصغيرة ( نصف قطرها a و مركز ثقلها G) على سطح اسطواني من الداخل ( نصف قطره b و مركزه O)

كما موضحة في الشكل تترك الجملة بدون سرعة ابتدائية:

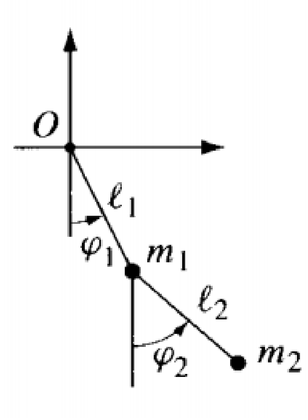
- حدد الاحداثيات المعممة ؟
- حدد عدد درجات الحرية ؟
- هل النظام هولونومي اوغير هولونومي ؟
- حدد القوى المعممة الممكنة؟

### التمرين الثالث : ( مشابهة لحركة عجلة دراجة )




قطعة نقدية كتلتها (m) نصف قطرها (R) ؛ تتحرك على طاولة أفقية بحرية تامة و بدون انزلاق (أنظر الشكل المقابل ) :

- برهن أن النظام غير هولونومي؟

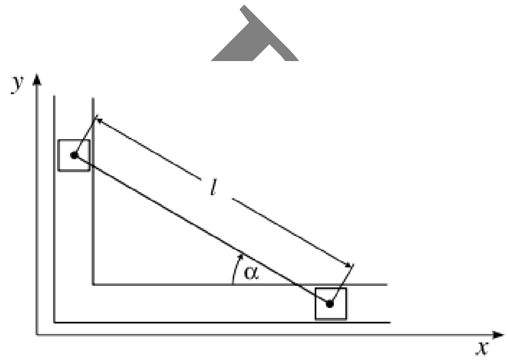



**<u>التمرين الرابع :</u>**

النظام الميكانيكي الموجود في الشكل المقابل هو عبارة عن نواس بسيط مزدوج يتحرك بدون احتكاك :

- كم عدد الاحداثيات المعممة و درجات الحرية ؟
- هات القوى المعممة ؟

**<u>التمرين الخامس :</u>**

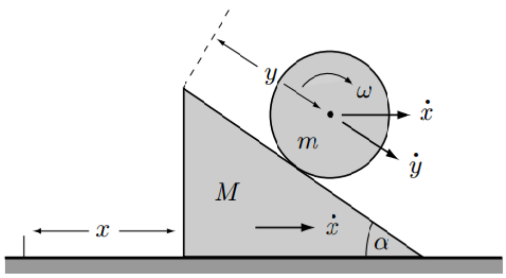



جسمين متساويين الكتلة (m) متصلتين بواسطة ساق عديم الكتلة طوله (l) ؛ النظام المكانيكي يتحرك تحت تأثير الجاذبية الارضية و بدون احتكاك نحو الاسفل على طول (y-axis) أنظر الشكل المقابل

- حدد الاحداثيات المعممة و درجات الحرية ؟
- هات القوى المعممة ؟

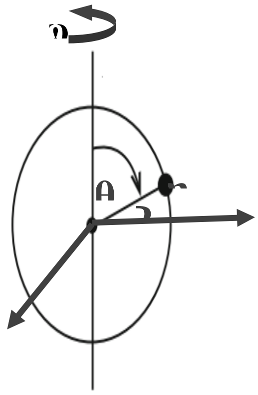
**<u>التمرين السادس :</u>**

كرة متجانسة كتلتها (m) تتدحرج بدون انزلاق من اعلي وتد كتلته (M) يميل عن الأفق بالزاوية (   ) و هدا الوتد




- نفسه ينزلق على طاولة أفقية.
- كم عدد درجات الحرية؟
- هات الطاقة الحركية الكلية للنظام ؟
- هات الطاقة الكامنة الكلية للنظام ؟

**التمرين السابع :**




حلقة من سلك املس مثبتة على المحور الشاقولي **OZ** وتدور حوله

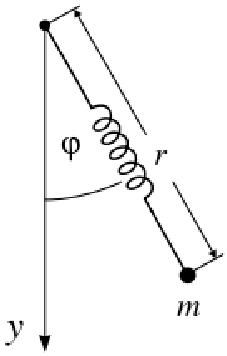
بالسرعة الزاوية الثابتة $\omega$ ؛ وضعت خرزة كتلتها m بحيث

تكون مقيدة لتتحرك على الحلقة بدون احتكاك :

أوجد:

- القيود الهولونومية و درجات الحرية ؟
- معادلات لاغرانج للحركة ؟
- حلول معادلات لاغرانج للحركة وهذا من أجل الزوايا الصغيرة ؟

**التمرين الثامن :**

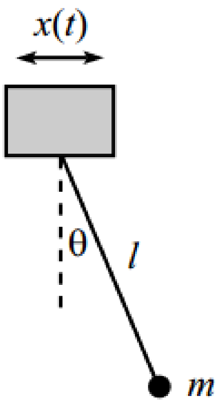



نواس ثقلي بسيط مؤلف من ( الكتلة النقطية m المشدودة لنابض ثابت مرونته k ) ؛ هذا النابض بأمكانه يهنز طوليا في الاتجاه ( r ) يهنز

عرضيا في الاتجاه ( $\phi$ ) أنظر الشكل المقابل .

- هات تابع لاغرانج L ؟
- هات معادلات لاغرانج للحركة ؟

**التمرين التاسع : ( نواس بسيط مع حامل مهتز )**

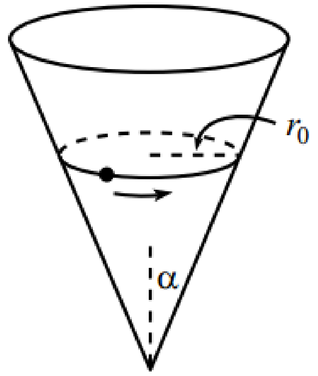



نعتبر النظام الميكانيكي المؤلف من نواس بسيط كتلته (m) وطول خيطه ( l )؛ النواس محمول لكتلة (M) تهتز أفقيا بالمسافة ( x(t)=A cos(w0 t) ) كما موضحة

في الشكل المقابل :

- احسب الزاوية (θ) للنواس بدلالة الزمن ( w ,w0 ,t)؟

**التمرين العاشر** :




يتحرك جسيم مقيد كتلته (m) بدون احتكاك علي سطح مخروط (أنظر الشكل المقابل ) حيث يخضع لقوة الجاذبية .

- حدد معادلات الحركة ؟
- ادا كان الجسيم يتحرك في دائرة نصف قطرها r0 فما هو نبض هده الحركة؟

**التمرين الحادي عشر :**

نعتبر الدالة $F$ المعرفة كالاتي:

$$F(x, y, y') = \frac{(y')^2}{2} + 4xy$$

بحيث المجال لـــ $x$ يكون [0,1] مع الشروط الحدية $y(0)=0$ و $y(1)=1$

- أحسب القيمة الحدية للتكامل الاتي ؟

$$I(y) = \int_0^1 F(x, y, y')dx$$

# الفصل الثالث

# صياغة هاملتون

## III-1. الاحداثية المستترة:

نقول عن الاحداثية $q_j$ مستترة إذا كانت غائبة عن صيغة تابع " لاغرانج L" .

**مثال:**

وجدنا في حالة حركة جسيم في حقل الجاذبية الأرضية (g) تابع لاغرانج على النحو التالي:

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

نلاحظ في صيغة تابع لاغرانج لهذا المثال أن الاحداثية $\theta$ غائبة أي نقول عنها احداثية مستمرة

**نتيجة** : $\theta$ احداثية مستمرة $\Leftarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

وبالتالي حسب معادلة لاغرانج للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = const = \text{عزم}$$

أي $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ تكامل أولي أو كمية محفوظة

## III-2. الدفع المعمم الموافق " العزم الموافق":

العزم الموافق للإحداثية $q_j$ هو $P_{q_j}$ حيث:

$$P_{q_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

في حالة إذا كانت $q_j$ احداثية مستمرة يكون العزم المرافق لـــ $q_j$ هو تكامل أولي لأن

$$q_j \text{ مستمرة } \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const} = P_{q_j}$$

نعود إلى المثال السابق ونرى أن $\theta$ احداثية مستمرة أي ان العزم المرافق لـها يكون تكامل أولي $P_\theta = const$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \text{ لا تعبر عن كمية حركة }$$

### III-3. خصائص بعض تابع لاغرانج الإضافية:

أ) إذا أضيف إلى تابع لاغرانج "L " تابع من الشكل $\frac{dF(q,t)}{dt}$ فإن معادلات لاغرانج " معادلات الحركة" لا تتغير أي أن L ، $L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$ تصفها نفس النظام الميكانيكي.

**البرهنة:**

$$L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(L + \frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(L + \frac{dF}{dt}\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{dF}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_J} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_J}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)$$

ب) إذا كان التابع الجديد $L = \alpha L + \beta$

$\alpha$ ، $\beta$ ثوابت غير مرتبطة لا بمكان ولا بزمان يصف نفس النظام الموصوف بتابع لاغرانج "$L$ "

## III-4. الميكانيك التقليدي من منظور " هاملتون":

### III-4-1. صياغة تابع هاملتون:

لقد عرفنا سابقا تابع لاغرانج " $L$" على النحو التالي

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

لنحسب $\frac{dL}{dt}$

$$dL(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J} d\dot{q}_J + \frac{dL}{\partial t} dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_J + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

أذا كان الزمن لا يظهر بصراحة في عبارة تابع لاغرانج "$L$ " هذا يعني $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

وعليه

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}_J \frac{\partial L}{\partial q_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}$$

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}_J \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}\right) + \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_J \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_J\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}\right)-\frac{dL}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_J\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}-L\right)=0$$

$$\dot{q}_J\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}-L=const$$

أي أن التابع $\dot{q}_J\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}-L$ هو تكامل أولي ويسمى تابع " هاملتون" ونرمز له بـــ $H$ ونكتب:

$$H=\sum_{j=1}^{DOF}\dot{q}_J\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}-L\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$$

*برهن أنه إذا كانت $U$ الطاقة الكامنة لا تتعلق بالزمن ولا بالسرعات المعممة فإن تابع هاملتون $H$ يكون مشابه إلى الطاقة الميكانيكية .

البرهان: نأخذ حالة الحركة على بعد واحد $h$ مثلا حالة السقوط الحر

$$L\left(h,\dot{h},t\right)=\frac{1}{2}m\dot{h}^2-U(h)$$

إذن:

$$H=\dot{h}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}}-L\left(h,\dot{h},t\right)$$

$$H=\dot{h}m\dot{h}-\left(\frac{1}{2}m\dot{h}^2-U(h)\right)$$

$H=\frac{1}{2}m\dot{h}^2+U(h)=T+U=E$ الطاقة الميكانيكية

### III-4-2. معادلات "هاملتون" للحركة أو المعادلات القانونية:

لقد عرفنا أن تابع هاملتون $H$ على النحو التالي:

$$H = H(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{DOF} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L(q_i,\dot{q}_j,t)$$

حيث $DOF$ هي درجات الحرية للنظام

وعرفنا أيضا أن العزوم المرافقة $P_{q_j}$ الموافقة لــ $q_j$

على النحو التالي:

$$\begin{cases} P_{q_j}= \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ \dot{P}_{q_j}= \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial q_j} \end{cases}$$

وعليه يصبح شكل " هاملتون" $H$ على النحو التالي:

$$H = H(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{DOF} p_j \dot{q}_j - L(q_i,\dot{q}_j,t)$$

نقوم الآن بحساب التفاضل التام للتابع

$$dH = d\sum_{j=1}^{DOF} p_j \dot{q}_j - dL$$

$$dH = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j dp_j + \sum_{j=1}^{D} p_j d\dot{q}_j - dL$$

$$dH = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j dp_j + \sum_{j=1}^{D} p_j d\dot{q}_j - \left\{\frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j\right\}$$

$$dH = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j dp_j + \sum_{j=1}^{D} \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{j=1}^{D} \dot{p}_j\, dq_j - \cancel{\sum_{j=1}^{D} p_j\, d\dot{q}_j}$$

$$dH = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^{D} \dot{p}_j\, dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

ومن جهة أخرى نكتب $dH$ حسب تعريفه

$$dH = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

بالموازاة نجد

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

وهي معادلات هاملتون الواصفة للحركة كما تسمى أيضا المعادلات القانونية للحركة.

تتميز معادلات "هاملتون" مقابلة مع معادلات لاغرانج بكونها معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة للمشتق الزمني ( أنظر معادلات لاغرانج من الدرجة الثانية) يدل ذلك على أن حلول معادلات هاملتون رياضيا يكون اسهل من معادلات لاغرانج برغم من أن عددها ضعف عدد معادلات لاغرانج .

مثال تطبيقي: حالة حركة جسيم في حقل جاذبية وجدنا أنه

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2\right) - U(\rho)$$

أوجد معادلات لاغرانج للحركة ثم معادلات هاملتون للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho} \qquad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^2 + f(\rho)\ ;\ f(\rho) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}$$

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\theta}^2 + f(\rho) \quad \dots\dots\dots 1$$

$$q_2 = \theta \;;\; \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow m\rho^2\dot{\theta} = l \quad \dots\dots\dots 2$$

أما تابع هاملتون للحركة

$$H = \sum_{j=1}^{2} p_j \dot{q}_j - L$$

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\theta \dot{\theta} - \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2\right) + U(\rho)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} = p_\rho \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} = P_\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m\rho^2}$$

ومنه عبارة $H$ تكون على النحو الآتي:

$$H = p_\rho \frac{P_\rho}{m} + p_\theta \frac{P_\theta}{m\rho^2} - \frac{1}{2} m\left(\frac{{P_\rho}^2}{m^2} + \rho^2 \frac{{P_\theta}^2}{m^2\rho^4}\right) + U(\rho)$$

$$= \frac{{P_\rho}^2}{m} + \frac{{P_\theta}^2}{m\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{{P_\rho}^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{{P_\theta}^2}{m\rho^2} + U(\rho)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left({P_\rho}^2 + \frac{{P_\theta}^2}{\rho^2}\right) + U(\rho) = H(q,p,t)$$

وتكون معادلات هاملتون للحركة كالتالي:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{P_\rho}{m} \Rightarrow m\dot{\rho} = P_\rho \dots\dots\dots 1$$

$$\dot{P}_\rho = \frac{-\partial H}{\partial \rho} = -\left[\frac{{P_\theta}^2}{2m}\left(\frac{-2}{\rho^3}\right) + \frac{\partial H}{\partial \rho}\right]$$

$$\dot{P}_\rho = \frac{{P_\theta}^2}{m\rho^3} + f(\rho) \;\;;\;\; f(\rho) = -\frac{\partial H}{\partial \rho}$$

ومنه:

$$\dot{P}_\rho = \frac{{P_\theta}^2}{m\rho^3} + f(\rho) \quad \dots\ \dots \dots 2$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{P_\theta}{m\rho^2} \Rightarrow\ m\rho^2\dot{\theta} = P_\theta \qquad \dots \dots \dots 3$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow\ \dot{P}_\theta = 0 \qquad \dots \dots \dots 4$$

عدد معادلات الحركة من منظور هاملتون هو 4 أما من منظور لاغرانج هي 2

نقوم بحساب $\frac{dH}{dt}$ نذكر أن: $H = H(q, p, t)$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{D}\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \sum_{j=1}^{D}\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_i$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{D}\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{D}\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j$$

وحسب معادلات هاملتون للحركة:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{D} -\dot{p}_j\,\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{D}\dot{q}_j\,\dot{p}_j$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

ومنه المشتق التام لتابع هاملتون هو نفسه المشتق الجزئي.

ملاحظة:

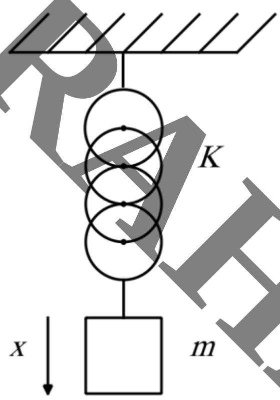
إذا كان $H$ غير مرتبط صراحة بالزمن $t$ فإن $H$ تكامل أولي

$H$ مستقل عن الزمن$t$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ $\Leftarrow$ $\frac{dH}{dt} = 0$ $\Leftarrow$ $\mathrm{H} \equiv$ تكامل أولي

لاحظنا في الحالة العامة أن تابع هاملتون يتعلق بالإحداثيات $q$ وعددها $DOF$ " درجات الحرية " والعزوم المرافقة أو عددها أيضا $DOF$ والزمن $t$ ومنه التابع $H$ هو دالة لـ $(2D+1)$ متغير أي أنه يأخذ من $R^{2D+1} \xrightarrow{H} R$ .

تعريف: يعرف الفضاء $R^{2D+1}$ المتكون من الاحداثيات $q$ والعزوم المرافقة $p$ والزمن $t$ بالفضاء الطور.

مثال تطبيقي




نعتبر نواس كتلي " هزاز توافقي"

1 حدد تابع هاملتون $H$ لهذا الهزاز؟

2 حدد معادلات الحركة " هاملتون" ؟

3 حل معادلات هاملتون للحركة ومثلها بيانيا ؟

الحل:

تحديد تابع هاملتون $H$:

$$H = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j p_j - L$$

$$H = \dot{x} P_x - L$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$H = \dot{x} P_x - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad \dot{x} = \frac{P_x}{m}$$

$$H = \frac{{P_x}^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$H = T + U$$

وكأنه النظام محافظ.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m}, \qquad \dot{P}_x = \frac{-\partial H}{\partial x} = -kx$$

حلول هذه المعادلات تكون دوماً بفاضله " الاشتقاق" المعادلة الأولى 1 ثم تعويض المعادلة الثانية 2 فيها ونحصل في الأخير على معادلة الحركة.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

### III-4-3. التحويلات القانونية والتوابع المولدة :

نسعى في معادلات هاملتون في غالب احيان إلى تغيير الاحداثيات والعزوم المرافقة لها إلى احداثيات جديدة وذلك قصد تسهيل حل هذه المعادلات وبهذا التغيير فإننا سنحصل على تابع هاملتون جديد أي تابع بالإحداثيات الجديدة إلا أنه هناك سؤال مطروح: هل ستصمد المعادلات القانونية أمام هذا التغيير؟ بعبارة أخرى هل تتمتع معادلات الحركة بواسطة الاحداثيات الجديدة بنفس صيغة معادلات هاملتون ؟

الجواب: ليست كل المتغيرات في الاحداثيات تؤدي إلى صمود معادلات هاملتون بل توجد تغيرات من نوع خاص تؤدي إلى هذا الصمود، تسمى مثل هذه التغيرات بالتحويلات القانونية. نتعرف الان على خصائص هذه التحويلات القانونية ولقد ورد سابقا ولاحظنا أن تابع $L$ يصمد إذا اضفنا له تابع من الشكل $\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}}$ ويكون لدينا :

$$L = L' + \frac{dF}{dt} \dots\dots\dots 1$$

$$\begin{cases} H = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j\, p_j - L \\ H' = \sum_{j=1}^{D} \dot{Q}_j\, P_j - L' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j\, p_j - H \\ L' = \sum_{j=1}^{D} \dot{Q}_j\, P_j - H' \end{cases}$$

نعوض عن $L$ و $L'$ في المعادلة 1 نجد:

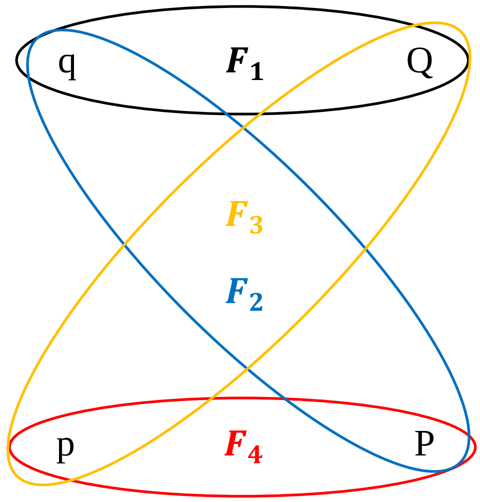
$$\sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j\, p_j - H = \sum_{j=1}^{D} \dot{Q}_j\, P_j - H' + \frac{dF}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j\, p_j - \sum_{j=1}^{D} \dot{Q}_j\, P_j + (H' - H) \dots\dots\dots \circledast$$

حيث التابع $F$ يتعلق بالإحداثيات المعممة الاصلية $(q,p,t)$ لفضاء الطور الاصلي و الاحداثيات المعممة الجديدة $(Q,P,t)$ لفضاء الطور الجديد؛ و عليه فان التابع $F$ يلعب دور التابع المولد للتحويل الرياضي بين الإحداثيات المعممة الاصلية $(q,p,t)$ و الاحداثيات المعممة الجديدة $(Q,P,t)$و نسميه **بالتابع المولد للتحويلات القانونية**..

**السؤال** المطروح: هل لهذا التابع $F$ شكل واحد ام عدة اشكال؟

**الجواب**: للتابع $F$ اربعة صيغ مختلفة و للحصول عليها نتبع الخطوات التالية.




1- نأخذ $F = F_1(q,Q,t)$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_1}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

بالمساواة (1) و $\circledast$ نجد:

$$\begin{cases} p_j = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_j} \\ P_j = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_j} \\ H' = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

2- نأخذ

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_{j=1}^{D} Q_j P_j$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_{j=1}^{D} Q_j \dot{P}_j - \sum_{j=1}^{D} P_j \dot{Q}_j \dots\dots\dots ②$$

بالمساواة ② و ★ نجد:

$$\sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j p_j + \sum_{j=1}^{D} Q_j \dot{P}_j + (H' - H) = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$\begin{cases} p_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_j} \\ Q_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_j} \\ H' = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

3- نأخذ

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_{j=1}^{D} q_j p_j$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_3}{\partial p_j} \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^{D} q_j \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j p_j \dots\dots\dots ③$$

بالمساواة ③ و ★ نجد:

$$-\sum_{j=1}^{D} q_j \dot{p}_j - \sum_{j=1}^{D} \dot{Q}_j P_j + (H' - H) = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_3}{\partial p_j} \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$\begin{cases} q_j = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_j} \\ P_j = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_j} \\ H' = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$$

4- نأخذ

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_{j=1}^{D} q_j p_j - \sum_{j=1}^{D} Q_j P_j$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_4}{\partial p_j} \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \dot{P}_j + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum_{j=1}^{D} q_j \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} \dot{q}_j p_j - \sum_{j=1}^{D} Q_j \dot{P}_j - \sum_{j=1}^{D} P_j \dot{Q}_j \dots\dots\dots (4)$$

بالمساواة (4) و ★ نجد:

$$-\sum_{j=1}^{D} q_j \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} Q_j \dot{P}_j + (H' - H) = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_4}{\partial p_j} \dot{p}_j + \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \dot{P}_j + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

$$\begin{cases} q_j = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_j} \\ P_j = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_j} \\ H' = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$$

و الان نلخص كلا من التحويلات السابقة في الجدول التالي:

| التحويلات المرافقة للتابع المولد | التابع المولد للتحويل القانوني |
|---|---|
| $p_j = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_j}$ و $P_j = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_j}$ و $H' = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$ | $F = F_1(q, Q, t)$ |
| $p_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_j}$ و $Q_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_j}$ و $H' = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$ | $F = F_2(q, P, t)$ |
| $q_j = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_j}$ و $P_j = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_j}$ و $H' = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t}$ | $F = F_3(p, Q, t)$ |
| $q_j = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_j}$ و $P_j = \dfrac{\partial F_4}{\partial P}$ و $H' = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}$ | $F = F_4(p, P, t)$ |

**مثال تطبيقي حول التحويلات القانونية:**

إذا كان التابع الهاملتوني $H$ الذي يصف حركة هزاز توافقي يهتز في فضاء الطور $(q,p,t)$ هو:

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

اكتب التابع الهاملتوني الجديد $H'$ الذي يصف حركة الهزاز توافقي في فضاء الطور $(Q,P,t)$ الناتج عن التحويل القانوني التالي؟

$$F(q,Q,t) = \frac{m\omega q^2}{2}\cot Q$$

هات معادلات هاملتون الجديدة للحركة و مثل الحلول بيانيا في فضاء الطور الاصلب و الجديد و ماذا تلاحظ ؟

## III-5. معادلة هاملتون-جاكوبي :

يمكننا من خلال تابع هاملتون تتبع الجمل الميكانيكية عبر الزمن و ذلك من خلال حل المعادلات القانونية للحركة و لكن لاحظنا فيما سبق ان اختيار الاحداثيات المعممة المناسبة يسهل من عملية الحل الرياضي ثم لاحظنا ايضا ان وجدت تحويلات قانونية تحول الاحداثية المعممة من الاصلية الى الجديدة بحيث يكون بعضها مستتر. فيكون تبسيط لحلول المعادلات القانونية للحركة. و عليه من النتائج المفيدة للتحويلات القانونية هي ايجاد حلول بشكل ابسط ؛ و اكيد سوف يكون افضل اذا و جدنا تابع مولد لتحويل قانوني بحيث التابع الهاملتوني الجديد $H'$ مساويا للصفر لان في هذه الحالة حلول معادلات هاملتون للحركة في فضاء الطور الجديد تكون ثابتة.

**البرهنة:**

اذا كان

$$H'(Q,P,t)=0$$

فان معادلات الحركة

$$\begin{cases} \dot{Q}=\dfrac{\partial H'}{\partial P}=0 \\ \dot{P}=-\dfrac{\partial H'}{\partial Q}=0 \end{cases}$$

اما الحلول في فضاء الطور الجديد تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Q=Const=\beta \\ P=Const=\gamma \end{cases} \quad \text{ثوابت زمنية}$$

اكيد التابع المولد يكون على النحو الاتي:

$$S=S(q,P,t)=S(q,\beta,t)$$

بحيث يحقق الشرط التالي:

$$H'(Q,P,t)=H(q,p,t)+\frac{\partial}{\partial t}S(q,\beta,t)=0$$

اي

$$H(q,p,t)+\frac{\partial}{\partial t}S(q,\beta,t)=0$$

و لدينا من التحويل القانوني المرافق للتابع المولد $S(q,\beta,t)$.

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial S}{\partial q} \\ Q=\dfrac{\partial S}{\partial P} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{\partial S}{\partial q} \\ \gamma=\dfrac{\partial S}{\partial \beta} \end{cases}$$

و عليه معادلة هاملتون –جاكوبي تأخذ الشكل التالي:

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial}{\partial t}S(q,\beta,t)=0\ \dots\dots\dots\ \circledast$$

لنبرهن ان اذا كان $S(q,\beta,t)$ حلا للمعادلة $\circledast$ فان $\frac{\partial S}{\partial \beta}$ يكون ثابت على كل الحالات؛ و من اجل ذلك يكفي برهنة ان $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)$ و هذا واضح جدا.

$$\frac{\partial}{\partial t}S(q,\beta,t)=-H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)$$

## III-6. تطور التوابع و معترضات بواصون :

ليكن $f(q,p,t)$ تابع في فضاء الطور يصف مقدارا فيزيائيا لنظام متحرك $(S)$ للحصول على كيفية تغير او تطور $f(q,p,t)$ مع الزمن نقوم بحساب المشتق التام لهذا التابع $f(q,p,t)$ :

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{D}\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{D}\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j+\frac{\partial f}{\partial t}$$

و حسب معادلات هاملتون للحركة لدينا :

$$\begin{cases}\dot{q}_j=\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\\ \dot{p}_j=-\dfrac{\partial H}{\partial q_j}\end{cases}$$

بعد التعويض عن $\dot{q}_j$ و $\dot{p}_j$ نجد:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{D}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\sum_{j=1}^{D}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

اذا رمزنا بـــ:

$$\{f,H\}=\sum_{j=1}^{D}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\sum_{j=1}^{D}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

و بذلك يصبح المشتق التام للتابع $f(q,p,t)$ كالتالي:

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

- تصف هذه المعادلة الاخيرة تطور التابع $f(q,p,t)$ عبر الزمن.
- يسمى $\{f,H\}$ معترض بواصون بين التابعين $f,H$ .

و بصفة عامة يمكن تعريف معترض بواصون بين التابعين $f,g$ على نفس الصياغ:

$$\{f,g\} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

**ملاحظة:**

- اذا كان  تكامل اولي فان:

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \rightarrow \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- اذا كان   تكامل اولي و لا يتعلق بالزمن بصراحة فان:

$$\frac{df}{dt} = 0 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \rightarrow \{f,H\} = 0$$

**بعض خصائص معترضات بواصون:**

1. $\{f,g\} = -\{g,f\}$
2. $\{\lambda f,g\} = \lambda\{f,g\}$
3. $\{\alpha f + \beta g,h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$
4. $\{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$
5. $\left\{f,\{g,h\}\right\} + \left\{h,\{f,g\}\right\} + \left\{g,\{h,f\}\right\} = 0$
6. $\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$

**نظرية حول التحويلات القانونية:**

لكي يكون التحويل $(q,p) \leftrightarrow (Q,P)$ قانوني يجب ان تتحقق العلاقات التالية:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \,;\, if \ i = j \\ 0 \,;\, if \ i \neq j \end{cases}$$

معترضات او اقواس بواصون تلعب دورا كبيرا في الميكانيك التحليلي و ميكانيك الكم في اشتقاق "استنباط" الصيغ القانونية لمعادلات الحركة و كذا اختيار الاحداثيات المعممة المناسبة و كيفية ادخال المؤثرات التفاضلية في ميكانيك الكم بدلا عن الطاقات الحركية و الكامنة في الميكانيك التحليلي.

**مثال تطبيقي**: جسيم كتلته m يتحرك تحت تسارع ثابت a و في بعد واحد الذي يوصف بـــ:

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{P}{m}t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ p = P + mat \end{cases}$$

لاحظ ان هذا التحويل من (x,p) الى (X,P) يكون قانوني بطريقتين: بطريقة أقواس بواصون ثم بطريقة تحديد التابع المولد من النوع الاول.

## III-7. بعض التمارين المقترحة حول ميكانيك هاملتون و التحويلات القانونية :

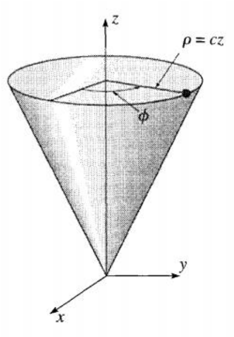
**التمرين الأول :** نعتبر النظام الميكانيكي تابع لاغرانج له هو :

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x-y)^2$$

أوجد :

- تابع هاملتون؟
- معادلات هاملتون؟
- العزوم المرافقة $Pi$ و الإحداثيات $qi$؟

**التمرين الثاني :**




بدون احتكاك على سطح مخروط من داخل حيث (m)يتحرك جسيم مقيد كتلته يخضع لقوة الجاذبية التي تؤثر على الجسيم وتفرض عليه النزول نحو الأسفل معادلة المخروط في الإحداثيات الاسطوانية هي معطيات : (أنظر الشكل المقابل).

$(\rho = cz)$

1. اكتب تابع هاملتون للجسيم مستخدما $(\varphi , z)$ كالإحداثيات معممة ؟
2. حدد معادلات الحركة وماذا يمكننا القول عن الإحداثية $\varphi$ و $P\varphi$ ؟

**التمرين الثالث :**

خطأ! كائن مضمن غير صحيح.جسيم كتلته (m) يتحرك بحرية في البعدين $(y, x)$ تحت تأثير القوة المعرفة كالاتي :

$$F(r) = F(x,y) = - (\alpha+\beta/r)\ r$$

$(\alpha+\beta)$ هي ثوابت موجبة .

اختر الاحداثيات القطبية $(\rho,\theta)$ كاحداثيات معممة .

1. اكتب عبارتي الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة ؟
2. **2.** هات تابع هاميلتون للحركة ؟
3. **3.** اثبت انه يوجد ثابتين زمنيين ؟ محددا ذلك ؟

**التمرين الرابع :**

الطاقة الكامنة لجسيم كتلته (m) تعطى في الاحداثيات الاسطوانية $(\rho,\theta,z)$ بالعبارة الاتية :

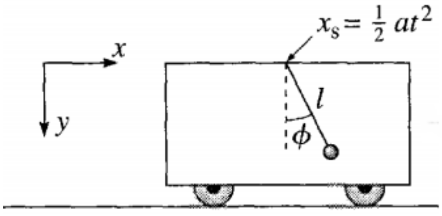
$$U(\rho,\theta,z) = V_0\ Ln(\rho/\rho_0\ )$$

$V_0$ , $\rho_0$ : هي ثوابت .

1. ماهو تابع هاميلتون لحركة هذا الجسيم ؟
2. هات المعادلات القانونية للحركة ؟
3. حدد ثلاث تكاملات اولية ؟

**التمرين الخامس :**

نظام ميكانيكي يتكون من نواس بسيط ( الكتلة النقطية m و خيط طوله l ) معلق الى سقف سيارة تتحرك على طول المحور (OX) بحركة مستقيمة متغيرة بأنتظام تسارعها (a) ؛ اذا كان النواس يهتز عرضيا في الاتجاه( ϕ ) أنظر الشكل المقابل .




1. ماهو تابع هاميلتون لحركة هذا الجسيم ؟
2. هات المعادلات القانونية للحركة ؟

**التمرين السادس:**

نعتبر لدينا هزاز توافقي يهتز في بعد واحد خاضع لقوة احتكاك يعطى تابع هاملتون لهذا النظام كالآتي :

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + \gamma\omega qp$$

حيث $m$ , $\omega$ ثوابت حقيقية موجبة و يمثلان الكتلة و النبض الطبيعي على الترتيب. $\gamma$ ثابت حقيقي يمثل معامل التخامد .

1. استخلص معادلات هاملتون للحركة ؟
2. أثبت أن معادلة الحركة في الأخير تؤول إلى الشكل التالي : $\ddot{q} + \omega^2(1-\gamma^2)q = 0$ .
3. ماهي قيم γ حتى تكون الحركة اهتزازية مستقرة حول وضع التوازن $q = 0$ ؟

**التمرين السابع :**

نعتبر نظام ميكانيكي له درجة حرية واحدة يوصف بواسطة الاحداثية q و العزم المرافق لها p .ليكن لدينا التحويل الاتي :

$$(q,p) \to (Q,P) \qquad \begin{cases} Q = q + \alpha p \\ P = p + \beta q \end{cases}$$

1. أحسب معترض بواصون. $\{Q,P\}_{q,p}$
2. حدد الشرط الذي يوضع على α وβ حتى يكون هذا التحويل قانوني .

**التمرين الثامن :** برهن أن التحويل :

$$\begin{cases} Q = \ln(\frac{\sin(p)}{q}) \\ P = qCot(p) \end{cases}$$

يكون قانوني؛ ثم حدد التابع المولد لهذا التحويل أذا علمت انه من النوع الاول.

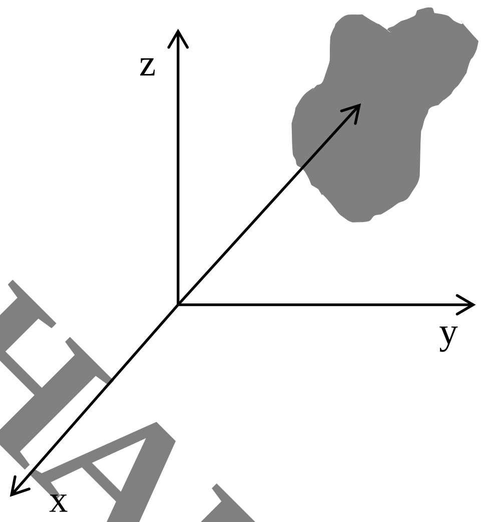
**التمرين التاسع :** برهن أن التحويل :

$$\begin{cases} Q = 2q + p^2 \\ P = \frac{p}{2} \end{cases}$$

1. يكون قانوني باستعمال معترض بواصون.
2. أعط عبارة التابع المولد لهذا التحويل أذا كان من النوع الثاني.
3. أعط عبارة التابع المولد لهذا التحويل أذا كان من النوع الثالث.

الفصل الرابع

حركة الجسم الصلب






### IV-1.الطاقة الحركية :

الطاقة الحركية لنظام مستمر (جسم صلب ) بالنسبة لمبدأ الاحداثيات $(O)$ هي تعرف كالاتي:

$$T_{/O} = \frac{1}{2}\int dm\left(\vec{V}_{/O}\right)^2 \quad ; dm = \rho(M)d\tau(M)$$

### IV-2. مؤثر العطالة "مصفوفة العطالة":

يعرف مؤثر العطالة لنظام مستمر ( جسم صلب ) بالنسبة لمبدأ الاحداثيات $(O)$ كالتالي:

$$\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = \int dm\left[\overrightarrow{OM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)\right]$$

حيث $\vec{u}$ متجه احادي من الفضاء

اذا كان:$dm = \rho(M)d\tau(M)$

نكتب:

$$\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = \int \left[\overrightarrow{OM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)\right]\rho(M)d\tau(M)$$

تمثيل $\mathbb{j}_{/O}$ المصفوفي:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 z - u_3 y \\ u_3 x - u_1 z \\ u_1 y - u_2 x \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

لدينا $\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = \int \left[\overrightarrow{OM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)\right]\rho(M)d\tau(M)$

$$\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = -\int \left[\overrightarrow{OM}\wedge\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u}\right)\right]\rho(M)d\tau(M)$$

$$\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = -\int \left(\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right)\rho(M)d\tau(M)$$

$$\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = -\int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}\rho(M)d\tau(M)\vec{u}$$

$$\mathbb{j}_{/O}\vec{u} = \left(-\int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \rho(M)d\tau(M) \right)\vec{u}$$

$$\mathbb{j}_{/O} = -\int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \rho(M)d\tau(M)$$

$$\mathbb{j}_{/O} = -\int \begin{bmatrix} -z^2 - y^2 & xy & xz \\ xy & -z^2 - x^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{bmatrix} \rho(M)d\tau(M)$$

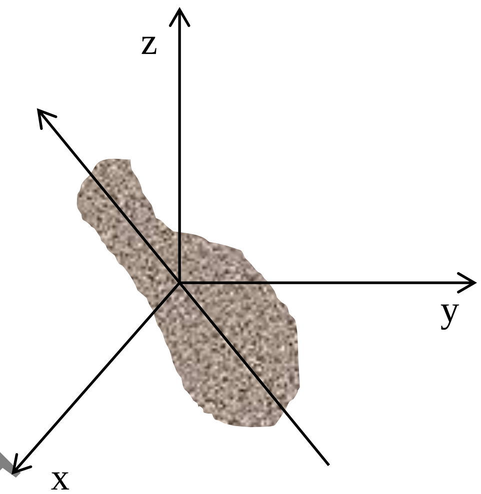
$$\mathbb{j}_{/O} = \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \rho(M)d\tau(M)$$

$$\mathbb{j}_{/O} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2)\rho(M)d\tau(M) & \int -xy\,\rho(M)d\tau(M) & \int -xz\rho(M)d\tau(M) \\ \int -xy\,\rho(M)d\tau(M) & \int (x^2 + z^2)\,\rho(M)d\tau(M) & \int -yz\,\rho(M)d\tau(M) \\ \int -xz\rho(M)d\tau(M) & \int -yz\,\rho(M)d\tau(M) & \int (x^2 + y^2)\rho(M)d\tau(M) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{j}_{/O} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

## IV-3. علاقة العزم الحركي $\vec{L}_{/O}$ بمؤثر عزم العطالة:

ملاحظة حول علاقة العزم الحركي $\vec{L}_{/O}$ بمؤثر عزم العطالة:




$$\vec{L}_{/O} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)\, dm$$

حالة ما اذا كان الجسم ( $S$ ) يدور حول المحور ( $\Delta$ ) الذي يمر بالمبدأ ( $O$ ) .

فأن:

$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{L}_{/O} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm$$

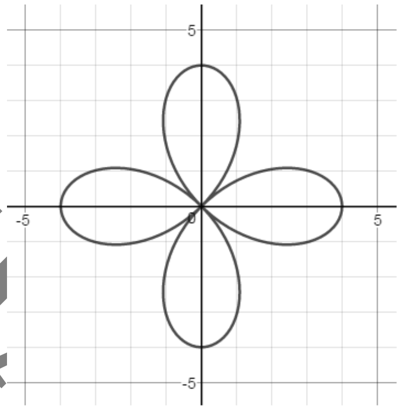
$$\vec{L}_{/O} = \mathbb{J}_{/O}\vec{\omega}$$

## IV-4. تمارين مختارة حول العزم الحركي $\vec{L}_{/O}$ بمؤثر عزم العطالة:

**التمرين الاول :**

أحسب مصفوفة العطالة J لشفرة واحدة من شفرات المروحة ( انظر الشكل اسفله ) ؛ كتلتها موزعة سطحيا بانتظام (σ) :

حيث الكتلة السطحية ثابتة و $\left(\rho = 4\cos(2\theta) \quad ; \; -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}\right)$.

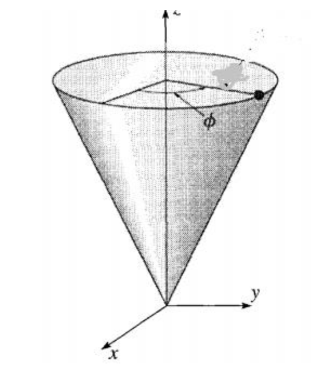





**التمرين الثاني :**

أحسب مصفوفة العطالة J للمخروط ( أنظر الشكل ) ؛ كتلته موزعة حجميا بانتظام (ρ) :

حيث الكتلة الحجمية ثابتة .



# الفصل الخامس

# نظرية ليوفيل

في صياغة هاملتون ان حالة الحركة للأنظمة الميكانيكية ذات $DOF$ درجة حرية في زمن معرف تكون مكتملة الوصف بالإحداثيات المعممة $q_j$ و $p_j$ العزوم المرافقة لها . حيث ان $q_j$ و $p_j$ تفهم على انها فضاء ديكارتي كارتيزي ذو بعدين $2DOF$ و هو فضاء الطور. $DOF$ بعد يمثل $q_j$ و $DOF$ بعد يمثل او يدعى فضاء العزم.

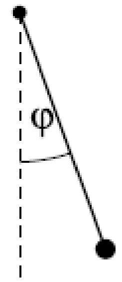
اثناء حركة النظام النقطة التمثيلية للمتحرك تشكل منحنى في فضاء المسارات. اذا كان التابع الهاملتوني $H$ الواصف للمتحرك معروفا فيمكن حساب مسار الطور بشكل كامل و فريد من إحداثيات نقطة واحدة. لذا لكل نقطة مسار واحد فقط مسير واثنين من المسارات المختلفة لا يمكن أن تتقاطع مع بعضها البعض. أي كل مسار في فضاء الطور يعطى في تمثيل وسيطي زمني ممثل من قبل $q_j$ و $p_j$ حيث $(j = 1, \dots \dots, DOF)$ .و هذا بسبب تفردية حلول معادلات هاملتون للحركة.

يتطور النظام في الشروط الحدية المختلفة على طول مسارات مختلفة للأنظمة المحافظة، النقطة تتجه الى مساحة زائديه $(2DOF - 1)$ لفضاء الطور يشرط:

$$H(q_j, p_j, t) = E = \text{ثابت}$$

و لفهم هذا جيدا نأخذ المثال التالي:

مثال : النواس البسيط و تمثيل الحلول في فضاء الطور.



لدينا في هذا المثال احداثية معممة وحيدة هي $\varphi$ و العزم المرافق لها هو $p_\varphi$ .

حيث تابع هاملتون الواصف للنقطة المتحركة ( الكتلة $m$ ) هو على النحو التالي:

$$H(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mglcos\varphi$$

و لدينا عبارة العزم $p_\varphi$ المرافق لـــ $\varphi$ من التعريف:

$$p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi}$$

و عليه عبارة تابع هاملتون تصبح على النحو التالي و هو يمثل الطاقة الكلية لان تابع لاغرانج لا يتعلق بالزمن بصراحة:

$$H(\varphi, p_\varphi, t) = \frac{{p_\varphi}^2}{2ml^2} - mglcos\varphi = E$$

و بإمكان الحصول على مسار النقطة المتحركة في فضاء الطور ( مسار الطور) او بالأحرى الحصول على

$$p_\varphi = p_\varphi(\varphi)$$

$$\frac{{p_\varphi}^2}{2ml^2} - mglcos\varphi = E$$

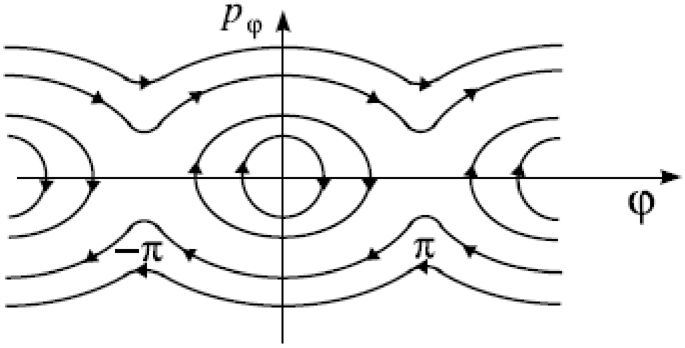
$$\frac{{p_\varphi}^2}{2ml^2} = E + mglcos\varphi$$

$$p_\varphi = \pm\sqrt{2ml^2(E + mglcos\varphi)} = p_\varphi(\varphi)$$

و هذه المعادلة الاخيرة في الحقيقة تمثل مسارات منحنية حسب الوسيط $E$ و الطاقة الكلية الابتدائية حيث نلاحظ انه :

- اذا كانت $(E < mgl)$ فالمسارات النقطة المتحركة في فضاء الطور منحنية مغلقة بشكل بيضوي و النواس يواصل حركته بشكل اهتزاز.

- اذا كانت الطاقة الكلية اكبر من $(mgl)$ فالنواس مازالت له طاقة حركية في اعلى نقطة من مساره تمكنه من استمرار في الحركة بدون عكس الاتجاه اي دوران. و الشكل التوضيحي ادناه يوضح المسارات للنقاط المتحركة في فضاء الطور كلا حسب الطاقة الابتدائية التي يمتلكها.




**نتيجة:**

نعتبر الان النظام الميكانيكي السابق يحتوي على عدد كبير $N$ من النقاط المستقلة و متطابقة ميكانيكيا في حركتها للنواس اي توصف بنفس التابع الهاملتوني $H$ مع الاختلاف في الشروط الابتدائية. كمثال محدد ، يمكننا أن نتخيل الجزيئات كأنها حزمة نقاط متسارعة و الموزعة في المنطقة $G1$ من فضاء الطور عند اللحظة الزمنية $t$ مشكلة حجم $\Delta V$ كما يوضحه الشكل -1- .

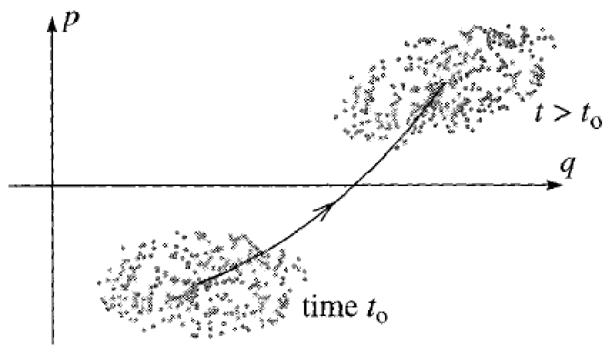
$$\Delta V = \Delta q_1 \ldots\ldots\ldots \Delta q_f . \Delta p_1 \ldots\ldots\ldots \Delta p_f$$

حيث $f$ اختصارا لـــ $DOF$ .

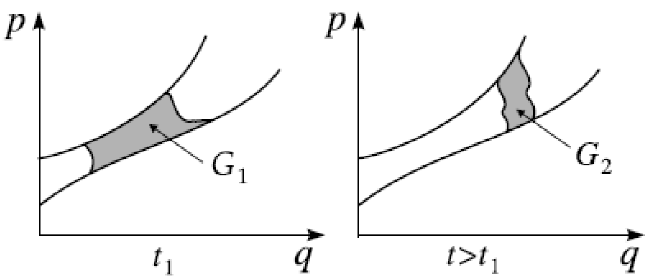
كما يمكننا تعريف كثافة الجزيئات على النحو التالي:

$$\varrho = \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

بفضل الحركة المنطقة $G1$ تتحول طبقا لمعادلات هاملتون الى المنطقة $G2$ كما مبينة في الشكل -2-.




الشكل -1-

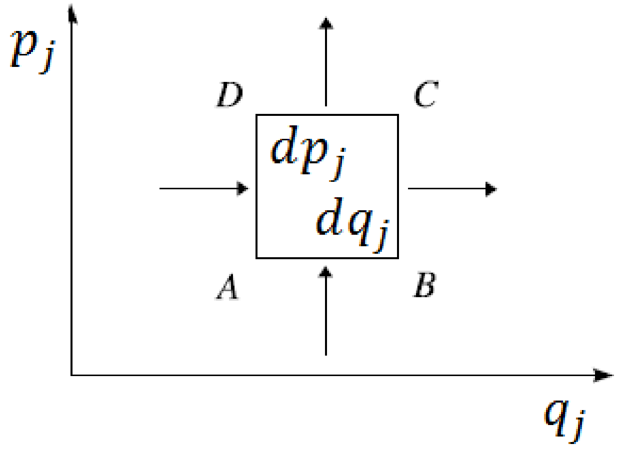



الشكل -2-.



**بيان نظرية ليوفيل**

- ان حجم منطقة من فضاء الطور اذا النقاط حدها تتحرك طبقا للمعادلات القانونية . أو بمعنى آخر ، كثافة النقاط في مساحة الطور في محيط نقطة تتحرك مع السائل ثابت.
- لأثبات ذلك نتحرى في حركة نقاط النظام من خلال عنصر الحجم لفضاء الطور . دعونا أولاً نفكر في مكونات تدفق الجسيمات على طول الاتجاهين $q_j$ و $p_j$.
- تمثل المنطقة $ABCD$ المبينة في الشكل -3- إسقاط عنصر حجم $\Delta V$ على مستوى $q_j, p_j$.




الشكل -3-

ان عدد النقاط الداخلة في حيز عنصر الحجم $\Delta V$ خلال وحدة الزمن هي:

$$\varrho \dot{q}_j dp_j . dV_j$$

اين؛

$$dV_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{f} dq_k \, dp_k$$

هو عنصر حجم الباقي في (2f-2) بعد: $dp_j . dV_j$ هو حجم السطح الجانبي مع الإسقاط $AD$ في المستوى $q_j, p_j$.

توسع تايلور للنقاط التي تغادر في اتجاه $BC$ .

$$\left( \varrho \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_j} (\varrho \dot{q}_j) dq_j \right) dp_j . dV_j$$

بشكل مماثل للجريان في الاتجاه $p_j$ عندنا:

المدخل من خلال $AB$ :

$$\varrho \dot{p}_j dq_j . dV_j$$

المخرج من خلال $CD$ :

$$\left(\varrho\dot{p}_j + \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\varrho\dot{p}_j\right)dp_j\right)dq_j.dV_j$$

من مكونات الجريان في الاتجاهين $q_j$ و $p_j$ عدد نقاط النظام لكل وحدة الزمن هي:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\varrho\dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\varrho\dot{p}_j\right)\right)dV$$

من خلال الجمع على $(j = 1, \ldots \ldots, f)$ نحصل على عدد من النقاط و هذه الكمية تتوافق فقط مع التغير مع الزمن للكثافة مضروبة في $dV$. وبالتالي ، يمكننا أن نستنتج

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{f}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\varrho\dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\varrho\dot{p}_j\right)\right)$$

نحن هنا نتعامل مع شكل معادلة الاستمرارية

$$div\left(\varrho\dot{\vec{r}}\right) + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

يشير التفرق الى $2f$ بعد في فضاء الطور

$$\nabla = \sum_{j=1}^{f}\frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^{f}\frac{\partial}{\partial p_j}$$

في اغلب الاحيان تظهر معادلة الاستمرارية من هذا النوع في فيزياء التدفق (الهيدروديناميكي و الديناميكا الكهربائية و ميكانيك الكم) و تبدي دائما قانون الحفظ.

$$\sum_{j=1}^{f}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial q_j}\dot{q}_j + \varrho\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial\varrho}{\partial p_j}\dot{p}_j + \varrho\frac{\partial\dot{p}_j}{\partial p_j}\right) + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{f}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\varrho}{\partial p_j}\dot{p}_j + \varrho\left(\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial\dot{p}_j}{\partial p_j}\right)\right) + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

و من معادلات هاملتون لدينا:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$$

و عليه:

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial \, \dot{p}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j}$$

و منه:

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \, \dot{p}_j}{\partial p_j} = 0$$

و من هذا يترتب ما يلي و بعد التعويض.

$$\sum_{j=1}^{f} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \varrho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

هذا يساوي فقط مجموع مشتق الكثافة فيما كانت تتعلق بالزمن.

اي نكتب:

$$\sum_{j=1}^{f} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \varrho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \varrho(q_j, p_j, t) = 0$$

و كذلك

$$\varrho(q_j, p_j, t) = \text{ثابت زمني}$$

**<u>مثال تطبيقي</u>:**

كثافة فضاء الطور للجسيمات تتحرك في حقل جاذبية

لنعتبر نضام ميكانيكي متكون من جسيمات ذات الكتلة $m$ تتحرك في حقل جاذبية ثابت $g$ ؛ يكون تابع هاملتون لهذه الجسيمات على النحو التالي:

$$H = E = \frac{p^2}{2m} - mgq$$

الطاقة الكلية للجسيم تبقى ثابتة

و مسارات الطور $p(q)$ تكون قطوع مكافئة.

$$p = \sqrt{2m(E + mgq)} = p(q)$$

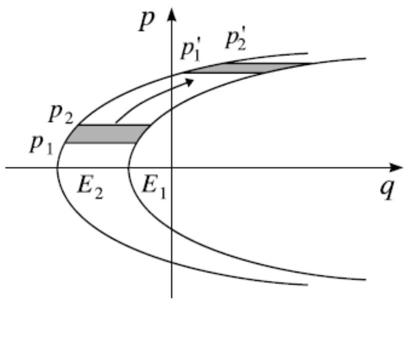
نعتبر عند اللحظة $p_1 \leq p \leq p_2$ عدد الجسيمات ذات العزم المحصور بين و بالطاقات بين $E_1 \leq E \leq E_2$ . يغطون المنطقة $F$ في فضاء الطور و في زمن تالي الجسيمات تغطي المنطقة $F'$ يملكون عزم بالقيمة التالية:

$$p' = p + mgt$$

حيث المنطقة $F'$ بين القطوع المكافئة المحددة بـــ:

$$p_1 + mgt \leq p' \leq p_2 + mgt$$

او كما موضح في الشكل-4- ادناه




الشكل-4-

$$q = (1/mg)\left((p^2/2m) - E\right)$$

$$F = \int_{p_1}^{p_2} dp \int_{(1/mg)\left((p^2/2m)-E_2\right)}^{(1/mg)\left((p^2/2m)-E_1\right)} dq$$

$$F = \frac{(E_2 - E_1)}{mg} \int_{p_1}^{p_2} dp$$

$$F = \frac{(E_2 - E_1)}{mg} (p_2 - p_1)$$

و على نفس النمط.

$$F' = \frac{(E_2 - E_1)}{mg} (p_2' - p_1')$$

$$F' = \frac{(E_2 - E_1)}{mg} (p_2 - p_1)$$

هذا مجرد توضيح لنظرية ليوفيل Liouville : $F' = F$ تعني أن كثافة نقاط النظام في مساحة الطور تظل ثابتة. تكمن أهمية نظرية ليوفيل في مجال الميكانيكا الإحصائية ، حيث ينظر المرء إلى المجموعات بسبب عدم وجود معرفة دقيقة بالنظام.

كتطبيق خاص هو تركيز التيارات للجسيمات في المسرعات حيث يخضع عدد كبير من الجزيئات لظروف مماثلة. هنا يجب أن يؤدي تقليل المقطع العرضي للحزمة إلى توسيع غير مرغوب فيه لتوزيع العزم.

**المراجع:**


1) LANDAU et LIFCHITZ, *Mécanique*, Editions Mir (Moscou) et Ellipses (Paris)
2) BOUCIF, *Introduction à la mécanique analytique*, De Boeck, Bruxelles, (2012)
3) TAYLOR, *Mécanique classique*, Ellipses, Paris, (2007)
4) MARTIN-ROBINE, *Histoire du principe de moindre action*, Vuibert, Paris, (2006)
5) GOLDSTEIN et al, *Classical mechanics*, 3rd Ed, Addison-Wesley (USA), (2001).
6) Wolfgang Nolting *Theoretical Physics 2 Analytical Mechanics* Springer Germany(2016).
7) Claude GIGNOUX et Bernard SILVESTRE-BRAC *PROBLÈMES CORRIGÉS DE MÉCANIQUE ET RÉSUMÉS DE COURS DE LAGRANGE À HAMILTON*