الاستاذ : فرحات محمد السعيد

المنطق الرياضي

1) القضية المنطقية:

1-1: تعريف القضية

نسمي قضية منطقية كل جملة خبرية يمكن الحكم عليها بالصحة او الخطأ نرمز للقضية بأحرف مثل : P,S,R,V....

مثال :

$1440 < 2018$ قضية صحيحة

1-2: جدول الحقيقة table de vérité

نرمز للقضية الصحيحة بالرمز 1 وللقضية الخاطئة بالرمز 0

الجدول التالي يسمى جدول الحقيقة للقضية P

P
1
0

1-3: نفي القضية المنطقية

نفي القضية المنطقية P هو القضية المنطقية $\bar{P}$

والتي تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة

وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

جدول الحقيقة للنفي هو:

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

مثال : نفي القضية $P: (3 \geq 1)$ هو القضية $\bar{P}: (3 < 1)$

1-4: أدوات الربط المنطقي

1-4-1: الوصل

وصل القضيتين P و Q هو القضية التي نرمز لها بالرمز $P \wedge Q$ (P و Q) والتي لا تكون صحيحة إلا إذا كانت P و Q صحيحتين معا

1-4-2: الفصل

فصل القضيتين P و Q هو القضية التي نرمز لها بالرمز $P \vee Q$ (P أو Q) والتي لا تكون خاطئة إلا إذا كانت P و Q خاطئتين معا

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

1-4-3: الاستلزام

نسمي الاستلزام $P \Rightarrow Q$ القضية $\bar{P} \vee Q$

والتي لا تكون خاطئة إلا اذا كانت P صحيحة و Q خاطئة

1-4-4: التكافؤ المنطقي

نسمي القضية $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ تكافؤا منطقيا

ونرمز إليها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$

والتي لا تكون صحيحة إلا اذا كانت P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

أمثلة :

1- (2018 مضاعف لـ 2) و($\sqrt{5}$ عدد كسري) خاطئة

2- (2018 مضاعف لـ 2) أو($\sqrt{5}$ عدد كسري) صحيحة

3- $3^0 = 3 \Rightarrow 3 > 15$ صحيحة

4- (تونس دولة عربية) $\Leftrightarrow$ (201=20+1) خاطئة

5-1: خواص الروابط المنطقية

لتكن P , Q و R ثلاث قضايا باستعمال جداول الحقيقة يمكن التأكد من صحة الخواص :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ ، $P \wedge P \Leftrightarrow P$, $P \vee P \Leftrightarrow P$
- $P \wedge \bar{P}$ خاطئة دوما (مبدأ عدم التناقض)
- $P \vee \bar{P}$ صحيحة دوما (مبدأ الثالث المرفوع)
- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$, $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ (التبديل)
- $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ (الفصل تجميعي)
- $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ (الوصل تجميعي)
- $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$ (نفي الوصل)
- $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$ (نفي الفصل)
- $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ (العكس النقيض)

تمرين :

لتكن Q و P قضيتين

اثبت صحة ما يلي : $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$

الحل:

الطريقة 1: باستعمال جدول الحقيقة

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$P \wedge \bar{Q}$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

الطريقة 2:

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\bar{P} \vee Q}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \bar{Q}$$
$$\Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$$

2- الجمل المفتوحة والمكممات

2-1: الجمل المفتوحة

نسمي جملة مفتوحة معرفة على المجموعة A كل جملة تحوي متغيرا أو أكثر بحيث تصبح قضية إذا أستبدل المتغير بأي عنصر من عناصر A ونرمز إليها بالرمز P(x)

أمثلة:

$P(x): x+5 = 4$ حيث x عدد حقيقي , جملة مفتوحة معرفة على **R**

$P(x,y) : x+y = 21$ حيث x و y عددين حقيقيين هي جملة مفتوحة ذات متغيرين

2-2: المكممات

إذا كانت الجملة P(x) صحيحة من أجل كل عنصر x من A نكتب : $\forall x \in A : P(x)$

اذا وجد على الأقل عنصر x من A بحيث تكون P(x) صحيحة نكتب : $\exists x \in A : P(x)$

نسمي ∀ بالمكمم الكلي ، ونسمي ∃ بالمكمم الوجودي أو الجزئي

أمثلة :

$\forall x \in \mathbf{R} : x^2+5 \geq 0$ صحيحة

$\forall x \in \mathbf{N} : x + 4 = 2x$ خاطئة لأن x=1 لا تحققها

$\exists x \in \mathbf{Z} : x<10$ صحيحة

$\forall x \in \mathbf{N} , \exists y \in \mathbf{N} : x < y$ صحيحة

2-3: نفي قضية مكممة

يتم نفي قضية مكممة باستبدال الرمز ∀ بالرمز ∃ والعكس بالعكس مع نفي الجملة المفتوحة

أمثلة:

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R} : x^2+5 \geq 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2+5 < 0$$

$$\overline{\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 5} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq 5$$

$$\overline{\forall x \in \mathbb{N} , \exists y \in \mathbb{N}: x < y} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} , \forall y \in \mathbb{N}: x \geq y$$

3- أنماط البرهان

هناك عدة أنماط من البراهين

3-1: البرهان بالتراجع

لإثبات صحة خاصية $P(n)$ على $\mathbb{N}$ يكفي أن نثبت:

- ✓ صحتها من أجل أول رتبة n_0
- ✓ صحة الاستلزام $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

مثال : أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

- اثبات صحة $P(0)$:

نلاحظ أن: $0 = \frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0^2$ ، ومنه: $P(0)$ صحيحة

- اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي:? $0^2 + 1^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا:

$$T_1 = \underbrace{1 + 7 + \cdots + (6n - 11)} + 6(n+1) - 11$$

$$T_1 = \quad 3n^2 - 8n + 5 \qquad + 6(n+1) - 11$$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6n + 6 - 11$$

والطرف الثاني:

$$T_2 = 3(n^2 + 2n + 1) - 8n - 8 + 5$$

$$T_2 = 3n^2 - 2n$$

نلاحظ أن طرفا $P(n+1)$ متساويان

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 2$

2-3:البرهان بالخلف

لكي نبرهن أن قضية P صحيحة نفرض أن $\bar{P}$ صحيحة

ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض

مثال: أثبت أن P صحيحة

الحل:

نفرض أن $\sqrt{n^2+1} < n$ و منه $n^2 + 1 < n^2$

يكافؤ $1 < 0$ و هذا تناقض ومنه P صحيحة

3-3: البرهان بالعكس النقيض

لكي نبرهن أن $P \Rightarrow Q$ صحيحة يكفي أن نبرهن صحة $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

مثال : أثبت أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}: x^3 + 3x - 10 = 7 \Rightarrow x \neq 1$$

الحل:

يكفي اثبات أن : $x = 1 \Rightarrow x^3 + 3x - 10 \neq 7$

و هذا محقق كون $1^3 + 3 - 10 \neq 7$

4-3: البرهان بمثال مضاد

لكي نبرهن عدم صحة القضية $\forall\, x \in E : P(x)$

يكفي إيجاد عنصر x_0 من E بحيث تكون $P(x)$ خاطئة

مثال: أثبت أن القضية التالية خاطئة

الحل:

القضية خاطئة لأنه يوجد على الأقل مثال مضاد لصحتها

بأخذ $n = 3$ نجد: $3^2 + 3 + 2 = 14 \ngeq 3^3 = 27$

5-3:البرهان بفصل الحالات

لإثبات صحة قضية P على مجموعة كلية E ، يكفي تجزئة E إلى عدة مجموعات جزئية E_1 , E_2 , E_n ,... وإثبات أن صحيحة على كل جزء

مثال: أثبت أن :

الحل:

نميز حالتين:

- ✓ n زوجي أي $n=2k'$
- ✓ n فردي أي $n=2k'+1$

التمرين 1:

اذكر صحة أو خطأ القضايا التالية:

1) $3{,}14 = \pi \Longrightarrow pgcd(45{,}12) = 4$

2) $(4! = 12) \wedge (ppcm(4{,}5) = 20)$

3) $\left(\sqrt[3]{27} = 2\right) \vee (ln2 > 0.69)$

4) $(\forall\, x \in \mathbb{Z} , \forall\, y \in \mathbb{N})(x + 3y > 0)$

5) $(\forall\, x \geq -3 , \exists\, y \geq 6)(x + 10 = 4y)$

6) $(\exists\, x \in \mathbb{Z} , \exists\, y \in \mathbb{N})\left(x^{1440} = sin(2018y)\right)$

7) $(\exists\, x \in \mathbb{R} , \forall\, y \in \mathbb{N})(x \leq y^{24} + |y|)$

التمرين 2:

عين نفي القضايا التالية:

1) $(\forall\, x \in \mathbb{Z} , \forall\, y \in \mathbb{N})(x \leq 100 \Longrightarrow x^2 > 3y)$

2) $(\forall\, x \geq -3 , \exists\, y < 6)(x^2 + 2|x| = 4y)$

3) $(\forall\, x \geq 0 , \exists\, y \geq 0)(x^2 < 2y) \vee (x = y)$

4) $(\forall\, t \in]0, +\infty[\,)(lnt < t) \wedge (e^t > t)$

التمرين 3:

باستخدام جدول الحقيقة أثبت:

1) $P \wedge \bar{P}$ قضية خاطئة دوما

2) $P \vee \bar{P}$ قضية صحيحة دوما

3) $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$

4) $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow \bar{R}) \Leftrightarrow \overline{(P \wedge Q) \wedge R}$

التمرين 4:

ليكن n عدد طبيعي برهن بالتراجع أن:

1) $\forall n \geq 2 : 1 + 7 + \cdots + (6n - 11) = 3n^2 - 8n + 5$

2) $\forall n \geq 0 : 1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

3) $\forall n \geq 0 : 2^n > n$

4) $\forall n \geq 0 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$

ملاحظة: $(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2$

التمرين 5:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$

1) عين الحدين الثالث والرابع

2) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0 : U_n \geq n$

التمرين 6:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = 1 \ ; \ U_1 = \cos(3) \\ U_{n+1} = 2U_1 U_n - U_{n-1} \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$

1) تحقق أن: $U_2 = \cos(6)$

2) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0 : U_n = \cos(3n)$

التمرين 7:

مستخدما العكس النقيض أثبت أن:

1) a زوجي $\Longrightarrow$ a^2 زوجي

2) a عدد فردي $\Longrightarrow a^2 + 9 = 2^n$

التمرين 8:

باستخدام البرهان بالخلف أثبت أن:

1) مجموع عدد ناطق وعدد أصم هو عدد أصم

2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3) $\left(n \text{ زوجي}\right) \Longrightarrow \left(n^2 - 1 \text{ ليس مضاعف لـ } 8\right) : n > 0$

مساعدة: أي عدد طبيعي فردي n يكتب بالشكل:

التمرين 9:

بفصل الحالات أثبت أنه:

إذا كان n مجموع مربعين، فإن باقي قسمة n على 4 تختلف عن 3

التمرين 10:

بمثال مضاد بين خطأ القضايا التالية:

التمرين 1:

1) $3{,}14 = \pi \Longrightarrow pgcd(45,12) = 4$

الاستلزام صحيح لأن القضية الأولى $3{,}14 = \pi$ خاطئة

2) $(4! = 12) \wedge (ppcm(4,5) = 20)$

الوصل خاطئ لان القضية الأولى $(4! = 12)$ خاطئة

3) $(\sqrt[3]{27} = 2) \vee (ln2 > 0.69)$

الفصل صحيح لان القضية الثانية $(ln2 > 0.69)$ صحيحة

4) $(\forall\, x \in \mathbb{Z} , \forall\, y \in \mathbb{N})(x + 3y > 0)$

القضية خاطئة لأن الثنائية (-2 , 0) لاتحققها

5) $(\forall\, x \geq -3 , \exists\, y \geq 6)(x + 10 = 4y)$

من أجل x=-2 ، نلاحظ أن y=2 *والتي لا تحقق* $y \geq 6$

ومنه القضية خاطئة

6) $(\exists\, x \in \mathbb{Z} , \exists\, y \in \mathbb{N})\left(x^{1440} = sin(2018y)\right)$

القضية صحيحة لأن الثنائية (0 , 0) تحققها

7) $(\exists\, x \in \mathbb{R} , \forall\, y \in \mathbb{N})(x \leq y^{24} + |y|)$

القضية صحيحة لأنه يوجد بالفعل عنصر x يحقق المطلوب

مثل x= - 4 والسبب أن $y^{24} + |y|$ عدد موجب دوما

التمرين 2:

1) نفي: $(\forall\, x \in \mathbb{Z} , \forall\, y \in \mathbb{N})(x \leq 100 \Longrightarrow x^2 > 3y)$

هو $(\exists x \in \mathbb{Z} , \exists\, y \in \mathbb{N})(x \leq 100) \wedge (x^2 \leq 3y)$

تذكير: نفي الاستلزام $P \Longrightarrow Q$ هو $P \wedge \bar{Q}$

2) نفي: $(\forall\, x \geq -3 , \exists\, y < 6)(x^2 + 2|x| = 4y)$

هو $(\exists x \geq -3 , \forall\, y < 6)(x^2 + 2|x| \neq 4y)$

3) نفي: $(\forall\, x \geq 0 , \exists\, y \geq 0)(x^2 < 2y) \vee (x = y)$

هو $(\exists x \geq 0 , \forall\, y \geq 0)(x^2 \geq 2y) \wedge (x \neq y)$

4) نفي: $(\forall\, t \in]0, +\infty[\,)(lnt < t) \wedge (e^t > t)$

هو $(\exists\, t \in]0, +\infty[\,)(lnt \geq t) \vee (e^t \leq t)$

الاستاذ : فرحات محمد السعيد

التمرين 3:

1) و 2) نستخدم جدول واحد لاثبات خطأ $P \wedge \bar{P}$ ، وصحة $P \vee \bar{P}$

P	$\bar{P}$		
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

3) $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$

P	Q				
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

4) $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow \bar{R}) \Leftrightarrow \overline{(P \wedge Q) \wedge R}$

P	Q	R	$\bar{R}$	Q	P	(	$\overline{(}$	P
1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

التمرين 4:

1) $\forall n \geq 2: 1 + 7 + \cdots + (6n - 11) = 3n^2 - 8n + 5$

- اثبات صحة $P(2)$:

نلاحظ أن: $6n-11=1$ من أجل $n=2$ ومنه: الطرف الاول $T_1=1$

$$T_2 = 3n^2 - 8n + 5 = 3(2)^2 - 8(2) + 5 = 1$$

الطرفان متساويان ومنه: $P(2)$ صحيحة

- اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي:

$$\forall n \geq 2: 1 + 7 + \cdots + (6n - 11) = 3n^2 - 8n + 5$$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي:

$$\forall n \geq 2: 1 + 7 + \cdots + 6(n + 1) - 11 = 3(n + 1)^2 - 8(n + 1) + 5 \ ?$$

لدينا: $T_1 = \underbrace{1 + 7 + \cdots + (6n - 11)} + 6(n + 1) - 11$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6(n + 1) - 11$$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6n + 6 - 11$$

والطرف الثاني:

$$T_2 = 3(n^2 + 2n + 1) - 8n - 8 + 5$$

$$T_2 = 3n^2 + 6n + 3 - 8n - 8 + 5$$

$$T_2 = 3n^2 - 2n$$

نلاحظ أن طرفا $P(n+1)$ متساويان

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 2$

2) $\forall n \geq 0: 1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

- اثبات صحة $P(0)$:

نلاحظ أن: $T_1 = 2^0 = 1$ و $T_2 = 2^{0+1} - 1 = 1$

الطرفان متساويان ومنه: $P(0)$ صحيحة

- اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1 \ ?$

لدينا: $T_1 = \underbrace{1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^n} + 2^{n+1}$

$$T_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$T_1 = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 = T_2$$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

3) $\forall n \geq 0 : 2^{n} > n$

- اثبات صحة $P(0)$:

نلاحظ أن: $T_1 = 2^0 = 1$ و $T_2 = 0$

$T_1 > T_2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

- اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $2^{n} > n$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $2^{n+1} > n + 1$?

لدينا: $2^{n+1} = 2 \times 2^{n} = 2^{n} + 2^{n} > n + 1$

لأنه: من المعطيات $2^{n} > n$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $2^{n} \geq 2^{0} = 1$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

4) $\forall n \geq 0 : (1 + x)^{n} \geq 1 + nx$

- اثبات صحة $P(0)$:

نلاحظ أن: $T_1 = (1 + x)^{0} = 1$ و $T_2 = 1 + 0x = 1$

$T_1 \geq T_2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

- اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $(1 + x)^{n} \geq 1 + nx$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$?

لدينا: $T_1 = (1 + x)^{n+1} = (1 + x)^{n}(1 + x)$

$T_1 \geq (1 + nx)(1 + x)$

بما أن: $(1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^{2}$

أي: $(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^{2}$

فإن: $T_1 \geq 1 + (n + 1)x = T_2$ لأن: $nx^{2} \geq 0$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

التمرين 5:

لدينا حيث: $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \;;\; n \geq 1 \end{cases}$

1) تعيين الحدين الثالث والرابع:

نعوض n بـ 1 لنجد: $U_2 = U_1 + U_0 = 1 + 1 = 2$

نعوض n بـ 2 لنجد: $U_3 = U_2 + U_1 = 2 + 1 = 3$

2) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0 : U_n \geq n$

➢ اثبات صحة $P(0)$:

نلاحظ أن: $U_0 = 1 \geq 0$ ومنه: $P(0)$ صحيحة

➢ اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $U_n \geq n$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $U_{n+1} \geq n + 1$?

نستطيع أن نبرهن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما وعليه نستنتج أن: $U_{n-1} \geq 1$

ولدينا من المعطيات: $U_n \geq n$ إذن $U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \geq n + 1$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

التمرين 6:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = 1 \;;\; U_1 = \cos(3) \\ U_{n+1} = 2U_1U_n - U_{n-1} \;;\; n \geq 1 \end{cases}$

1) التحقق من أن: $U_2 = \cos(6)$

بتعويض بـ 1 نجد: $U_2 = 2U_1U_1 - U_0 = 2{U_1}^2 - U_0$

$$U_2 = 2(\cos 3)^2 - 1 = 2(\cos 3)^2 - (\cos 3)^2 - (\sin 3)^2$$

$$U_2 = (\cos 3)^2 - (\sin 3)^2 = \cos(2 \times 3) = \cos(6)$$

2) البرهان بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0 : U_n = \cos(3n)$

➢ اثبات صحة $P(0)$:

لدينا: $U_0 = 1$ و $\cos(3 \times 0) = \cos(0) = 1$ ومنه: $P(0)$ صحيحة

➢ اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $U_n = \cos(3n)$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $U_{n+1} = \cos\ 3(n+1)$?

لدينا: $U_{n+1} = 2U_1U_n - U_{n-1} = 2\cos 3\cos 3n - \cos 3(n-1)$

$$U_{n+1} = 2\cos 3\cos 3n - \cos(3n - 3)$$

$$U_{n+1} = 2\cos 3\cos 3n - (\cos 3n\cos 3 + \sin 3n\sin 3)$$

$$U_{n+1} = 2\cos 3\cos 3n - \cos 3n\cos 3 - \sin 3n\sin 3$$

$$U_{n+1} = \cos 3\cos 3n - \sin 3n\sin 3$$

$$U_{n+1} = \cos 3n\cos 3 - \sin 3n\sin 3$$

$$U_{n+1} = \cos(3n+3) = \cos\ 3(n+1)$$

إذن: P(n+1) محققة والاستلزام صحيح

ومنه P(n) صحيحة $\forall n \geq 0$

التمرين 7:

1) لاثبات الاستلزام a زوجي $\Longrightarrow$ a^2 زوجي ، يكفي أن نثبت عكس نقيضه

الذي هو: a^2 فردي $\Longrightarrow$ a فردي

a فردي $\Longrightarrow a = 2k+1\ /\ k \in \mathbb{N}$

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4\,k^2 + 4k + 1 = 2(2\,k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

ومنه a^2 فردي وهو المطلوب

إذن: الاستلزام الأول صحيح

2) لاثبات الاستلزام a عدد فردي $\Longrightarrow a^2 + 9 = 2^n$ ، يكفي أن نثبت عكس نقيضه

الذي هو: $a^2 + 9 \neq 2^n$ فردي $\Longrightarrow$ a زوجي

a زوجي $\Longrightarrow a = 2k\ /\ k \in \mathbb{N}$

$T_1 = a^2 + 9 = 4k^2 + 9$ نلاحظ أن الطرف الأول فردي أكبر أو يساوي 9

$T_2 = 2^n$ إما يساوي 1 أو هو عدد زوجي

الطرفان إذن غير متساويان وهو المطلوب

إذن: الاستلزام الأول صحيح

التمرين 8:

1) مجموع عدد ناطق وعدد أصم هو عدد أصم

لنثبت أن: $\frac{a}{b} + x = y$ حيث: x و y عددان أصمان أي من $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

لذلك نفرض أن نفيها صحيح أي:

نفرض أن مجموع عدد ناطق وعدد أصم هو عدد غير أصم

بمعنى نفرض $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ و $y \in \mathbb{Q}$

لدينا: $x = y - \frac{a}{b}$

$$y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow y = \frac{c}{d}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathbb{Q}$$

وهنا التناقض لأن: $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ومنه القضية المعطاة صحيحة

2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

نفرض أن النفي صحيح أي: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حيث a و b أوليان فيما بينهما

بالتربيع نجد: $2 = \frac{a^2}{b^2}$ أي: $a^2 = 2b^2\ \ldots(*)$ ومنه: a^2 عد زوجي

إذن: a عدد زوجي (حسب التمرين 7 سؤال 1) أي: $a=2k$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $4k^2 = 2b^2$ وينتج: $b^2 = 2k^2$

إذن: b عدد زوجي (حسب التمرين 7 سؤال 1) أي: $b=2l$

نلاحظ أن a و b ليسا أوليين فيما بينهما لأن من قواسمهما المشتركة 1 و 2

وهنا التناقض ومنه: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3) $\left(\text{n زوجي}\right) \Rightarrow \left(\text{n}^2 - 1 \text{ ليس مضاعف لـ } 8\right) : \text{n} > 0$

نفرض أن نفي الاستلزام صحيح أي نفرض أن:

$\left(\text{n}^2 - 1 \text{ ليس مضاعف لـ } 8\right)$ و(n فردي)

ونستخدم المساعدة: أي عدد طبيعي فردي n يكتب بالشكل:

في حالة: $n = 4k + 1$ ، $\text{n}^2 - 1 = 16\,k^2 + 8k$

في حالة: $n = 4k + 3$ ، $\text{n}^2 - 1 = 16\,k^2 + 24k + 8$

نلاحظ في الحالتين أن: $\text{n}^2 - 1$ مضاعف لـ 8 وهذا يناقض الفرضية

ومنه الاستلزام صحيح

<u>التمرين 9:</u>

بفصل الحالات أثبت أنه:

إذا كان n مجموع مربعين، فإن باقي قسمة n على 4 تختلف عن 3

نضع: $n = a^2 + b^2$ ولدينا الحالات التالية:

الحالة 1: $a = 2\text{k} ; \text{b} = 2\text{l}$

$n = 4k^2 + 4l^2$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 0

الحالة 2: $a = 2\text{k} + 1 ; \text{b} = 2\text{l}$

$n = 4k^2 + 4l^2 + 4\text{k} + 1$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 1

الحالة 3: $a = 2\text{k} ; \text{b} = 2\text{l} + 1$

$n = 4k^2 + 4l^2 + 4\text{l} + 1$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 1

الحالة 4: $a = 2\text{k} + 1 ; \text{b} = 2\text{l} + 1$

$n = 4k^2 + 4l^2 + 4\text{l} + 4\text{k} + 2$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 2

<u>التمرين 10:</u>

بمثال مضاد بين خطأ

المثال المضاد هو:x=-3 *لأن:* $-3 \leq 2$ بينما: $(-3)^2 = 9 > 4$

التمرين 1:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 - \frac{9}{U_n+5} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: U_n > -2$

التمرين 2:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: \frac{2n+3}{2n+1} > 1$

2) استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

التمرين 3:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{{U_n}^2+1}{U_n-1} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: -3 \leq U_n \leq -1$

2) بين أنه: $\forall n \geq 0: U_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(U_n + 1)$

3) استنتج أنه: $\forall n \geq 0: U_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ واستنتج نهاية المتتالية

التمرين 4:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = \frac{5}{4e} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{e\,U_n+1} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: U_n > \frac{1}{e}$

التمرين 5:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 7\,U_n + 8 \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

1) احسب الحدين الثاني والثالث للمتالية (U_n)

2) استنتج خطأ القضية المكممة التالية: $\forall n \geq 0: U_n \leq 111$

3) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: 3U_n = 7^{n+1} - 4$

التمرين 6:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{-1}{U_n - 2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: U_n < 1$
2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)
3) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة

التمرين 7:

ليكن n عدد طبيعي برهن بالتراجع أن:

$\forall n \geq 4: 2^n \geq n^2$

التمرين 8:

لتكن المتتالية (U_n) حيث: $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_0 + \cdots + U_n \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$

1) عين الحد الثالث
2) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 1: U_n = 2^{n-1}$

التمرين 9:

باستخدام البرهان بالخلف أثبت أن:

1) $n > 0 : \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$
2) مستطيل مساحته $170\, m^2$ ، أثبت أن طوله $l \geq 13\, m$
3) $a \geq 0 , b \geq 0 , \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b$
4) $a \in \mathbb{Z} , b \in \mathbb{Z} : a + b\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow a = b = 0$
5) $a \in \mathbb{Z} , b \in \mathbb{Z} : b \neq 0 \Longrightarrow a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
6) n>0 : (n مربع لعدد طبيعي) $\Longrightarrow$ (2n ليس مربعا لعدد طبيعي)
7) (n فردي) $\Longrightarrow$ (n^2 فردي)
8) جداء عدد ناطق غير معدوم بعدد أصم هو عدد أصم
9) الجذر التربيعي لعدد أصم هو عدد أصم

التمرين 10:

بفصل الحالات أثبت أنه:

1) $\forall x \in \mathbb{R}: |x - 1| \leq x^2 - x + 1$
2) $\forall n \in \mathbb{N}: 3^n - 1 = 2k$

<u>التمرين 11:</u>

بمثال مضاد بين خطأ القضايا التالية:

كل عدد طبيعي n ، هو مجموع ثلاث مربعات

<u>التمرين 12:</u>

مستخدما العكس النقيض أثبت أن:

1) $\frac{a}{3}$ عدد فردي $\Longrightarrow$ (a^2 ليس للعدد مضاعف 36)

2) $a = 0 \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \,;\, |a| < \varepsilon)$

3) $a \leq 0 \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \,;\, a \leq \varepsilon)$

برنامج الرياضيات في السداسي 1

- المنطق وأنماط البرهان
- المجموعات
- التطبيقات
- العلاقات
- الدوال العددية ذات متغير حقيقي
- الدوال المألوفة والعكسية لها
- النشر المحدود
- العمليات الداخلية والبنى الجبرية
- الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

تجدون في العدد 2 من المجلة الاول

- المجموعات
- التطبيقات
- العلاقات