



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي  
كلية العلوم الدقيقة  
قسم الرياضيات

دروس و تمارين

في

التكامل و السلاسل  
للسنة الثانية ليسانس

من اعداد:  
د: ب. بن علي

السنة الجامعية: 2017 - 2018

## مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، و الصلاة و سلام على نبيه الكريم  
من خلال التجربة المتواضعة في التدريس والاحتكاك بالطلبة لاحظت مدى عزوفهم  
على البحث في أمهات الكتب وخاصة إذا كانت باللغات الأجنبية ومع هذه الأعداد  
الهائلة من الطلبة و استحالة توفر المراجع الميسرة وبالعدد الكافي اجتهدت في أن  
ابيض المحاضرات التي قدمتها في السنوات الماضية لمستوى السنة الثانية ليسانس  
علوم مادة متوخيا في هذا العمل الاسلوب الايسر و الاسهل في ايصال المعلومة من  
غير تعمق في البراهين معتمدا التركيز على القواعد التطبيقية ومدعما بوابل كبير  
من الأمثلة التوضيحية.

وقد حظيت بالقبول من طرف نخبة من الاساتذة بعد الاطلاع عليها مع تقديم ت  
بعض الملاحظات و المقترحات وقد استفدت منها كثيرا في تحسين التقديم و تدقيق  
المعلومة و توضيح المعلومة للمطلع على هذا العمل المتواضع.  
يحتوي مضمون هذه المطبوعة و المتمثل في ثلاث فصول.  
في الفصل الأول تطرقت الى التكاملات المضاعفة مقتصرنا على التكامل الثنائي و  
الثلاثي كما نص عليه البرنامج الجديد لهذه الشعبة مبرزا خواص كل منهما  
وموضحا طريقة الحساب لكل منهما مع العديد من الأمثلة مرفقا ما ورد بسلسلة من  
التمارين

أما في الفصل الثاني فقد وضحت بشيء من التفصيل التكامل الوسع الذي يحتوي  
على كثير من المعلومات الجديدة و المعمقة مما يسبب كثير من الغموض بالنسبة  
للطلبة و يولد لديهم حالة من الإحباط و ضياع في تحصيلهم العلمي.  
أما في الفصل الثالث تعرضت الى السلاسل بأنواعها الأربع السلاسل العددية و  
متتاليات الدوال مع سلاسل الدوال وكذلك السلاسل الصحيحة و ختمت الفصل  
بسلاسل فوري، في الحقيقة محتوى هذا الفصل يمثل محتوى مقياس بكامله بسبب  
الكم الهائل من المعلومات المتنوعة و المركزة كما ارفقت هذا الفصل كغيره بسلسلة  
من التمارين يستعين بها الطالب في تدعيم و تثبيت معلوماته التي تحصل عليها.

د. ابراهيم بن علي

# الفصل الأول التكاملات المضاعفة

يعتبر فرع التحليل من الفروع الهامة في الرياضيات الحديثة، والذي يقدم حولا عملية لكثير من المسائل المطروحة في مختلف التخصصات التقنية ومن بين أهم الأدوات المستعملة في هذا التخصص مفهوم التكامل الذي يعد أهم فروع الرياضيات البحتة و التطبيقية، يلعب دورا رئيسيا في تطوير الرياضيات، ويساهم مساهمة فعالة في حل المسائل المطروحة في ميادين شتى كالطب والفيزياء والكيمياء والهندسة... إلخ.

ليس من السهل اعطاء مفهوما بسيطا وميسرا من خلال هذا القدر البسيط من المعلومات حول التكامل الثنائي و الثلاثي وذلك خشية الحشو و الإكثار على الطالب مع ذلك يمكنه الجوع إلى المراجع التي اعتمدت عليها في تلخيصي هذا الفصل و هي المرجع [1-6]، [8-9]، [11-13]، [15].

## 1-1 - تذكير:

### 1-1-1- الدوال متعددة المتغيرات

#### الدالة لمتغيرين:

تعريف(1.1.1): نسمي دالة  $f$  لمتغيرين حقيقيين  $(x, y)$  العلاقة التي ترفق بكل ثنائية  $(x, y)$  من

مجال التعريف  $D_f \supset IR^2$  العدد الحقيقي الوحيد نرسم اليه  $f(x, y)$

مثال(1.1.1): عين مجموعة تعريف الدالة  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$D_f = \{(x, y) \in IR^2 / 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

$$= \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 9\} \quad \text{اي}$$

#### النهايات و الاستمرار:

تعريف(2.1.1): يكون العدد الحقيقي  $l$  نهاية للدالة  $f$  عندما  $(x, y)$  تنتهي الى  $(a, b)$  - ليس

شرطا من  $D_f$  - و نكتب  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$  اذا فقط اذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in D_f; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

مثال(2.1.1): احسب نهاية الدالة  $f$  عندما  $(x, y)$  تنتهي الى  $(0, 0)$  حيث

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

ملاحظة(1.1.1): اذا كانت  $l_1 \rightarrow f(x, y)$  عندما  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  وفق المسار  $C_1$  و كانت

$l_2 \rightarrow f(x, y)$  عندما  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  وفق المسار  $C_2$  بحيث  $l_1 \neq l_2$  فإن

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  غير موجودة

مثال(3.1.1): احسب النهاية ان وجدت عندما  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  الدوال التالية:

$$h(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(x, y) = \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = xy \cos(x - 2y)$$

الاستمرار:

1. تعريف (3.1.1): نقول عن دالة لمتغيرين حقيقيين  $f$  انها مستمرة عند  $(a, b)$  اذا كانت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

و نقول عن الدالة  $f$  انها مستمرة على المنطقة  $D$

اذا كانت مستمرة عند كل نقطة  $(a, b)$  من  $D$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+xy+y^2}; (x,y) \neq (0,0) \\ 0; si, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مثال (4.1.1): بين فيما اذا كانت الدالة التالية مستمرة

الاشتقاق الجزئي:

تعريف (4.1.1): المشتق الجزئي للدالة  $f$  بالنسبة للمتغير  $x$  عند النقطة  $(a, b)$  و نرمز له

$$f'_x(a, b)$$

وذلك بتثبيت  $y = b$  و نحسب المشتق بالنسبة للمتغير  $x$  أي

$$f'_x(a, b) = g'(a)$$

و نكتب

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = f'_x(a, b)$$

الطريقة المشتق الجزئي للدالة  $f$  بالنسبة للمتغير  $y$  عند النقطة  $(a, b)$

$$f'_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

نرمز للمشتقات الجزئية كما يلي:

$$f'_y(x, y) = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f = D_y f, \quad f'_x(x, y) = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f = D_x f$$

مثال (5.1.5): احسب المشتقات الجزئية الأولى و الثانية للدالتين بالنسبة للمتغير  $x, y$

$$g(x, y) = \ln(1 - xy), \quad h(x, y) = xy \sin x$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير  $x, y$ .

المشتقات من الرتب العليا:

$$f_{x^n}^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \dots \dots (f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{و} \quad (f'_x)'_x = f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

مثال (6.1.1): احسب المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغير  $x, y$

$$f(x, y) = e^{xy-3} + y \sin xy$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير  $x, y$ .

## الدوال لثلاث متغيرات او اكثر:

تعريف(5.1.1): نسمي دالة  $f$  لثلاث متغيرات حقيقية  $(x, y, z)$  العلاقة التي ترفق بكل ثلاثية  $(x, y, z)$  من مجال التعريف  $D_f \supset IR^3$  عدد حقيقي وحيد نرسم اليه  $f(x, y, z)$ .

مثال(7.1.1): عين مجموعة تعريف الدالة  $g(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$

$$D_g = \{(x, y, z) \in IR^3 / z - y > 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in IR^3 / z > y\} \quad \text{اي}$$

المشتقات الجزئية:

تعريف(6.1.1): المشتق الجزئي للدالة  $f$  بالنسبة للمتغير  $x$  عند النقطة  $(x, y, z)$  و نرسم

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad \text{و} \quad f'_x(x, y, z)$$

و اذا كانت الدالة ذات  $n$  متغير اي  $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  فان

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} = f_{x_i}^{(i)}$$

و نرسم  $f_{x_i}^{(i)} = D_{x_i} f$  ، المشتقات الجزئية المتتابعة للتابع  $f_{x_1 \dots x_k}^{(k)} = D_{x_1 \dots x_k}^k f$

مثال(8.1.1): احسب المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغير  $x, y$

$$g(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير  $x, y$ .

## 2-1-1 - الدوال الدرجة:

تعريف(7.1.1): نسمي تقسيما للمجال  $[a, b]$  من  $IR$  كل جملة  $(x_0, \dots, x_n)$  من نقط

المجال  $[a, b]$  بحيث  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ندعو خطوة التقسيم

$S = (x_0, \dots, x_n)$  للمجال  $[a, b]$  العدد الحقيقي الموجب  $|S|$  والمعرفة بـ:

$$|S| = \text{Max}_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

تعريف(8.1.1): نسمي الدالة الحقيقية  $f$  المعرفة على المجال  $[a, b]$  من  $IR$  دالة درجة

(سلمية) على المجال  $[a, b]$  اذا وجد تقسيم  $S = (x_0, \dots, x_n)$  بحيث تكون  $f$  ثابتة على كل

مجال جزئي  $[x_i, x_{i+1}]$  ،  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  و نسمي  $S$  تقسيما موصولا بالدالة  $f$  ، ونسمي

ايضا  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]; R(f, s([a, b])) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f(x)$  مجموع ريمان

المرفق بالتقسيم  $S$

**التكامل:**

ليكن  $E([a, b])$  يرمز الى مجموعة الدوال الدرجة المعرفة على  $[a, b]$

تعريف (9.1.1): ليكن  $f \in E([a, b])$  و ليكن التقسيم  $S = (x_0, \dots, x_n)$  للمجال

$[a, b]$  بحيث  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, n; f(x) = c_i$

تكامل التابع  $f$  على المجال  $[a, b]$  العدد الحقيقي الذي نرمز إليه  $\int_a^b f(x) dx$  والمعروف بـ:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x_{i+1} - x_i \rightarrow 0} R(f, S([a, b])) = \lim_{x_{i+1} - x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) c_i$$

نظرية (1.1.1): اذا كان  $f$  تابع مستمر على المجال  $[a, b]$  فانه توجد متتالية من الدوال

الدرجية  $(f_n)$  تقارب بانتظام نحو الدالة  $f$  على المجال  $[a, b]$ .

نتيجة (1.1): كل تابع  $f$  مستمر على المجال  $[a, b]$  فهو قابل للمكاملة عليه.

ملاحظة (2.1): تكفي بعض الامثلة للتذكير بما سبق دراسته في المستوى السابق.

## 2-1- التكامل الثنائي:

تعريف (1.2.1): نسمي منطقة جزئية من المستوي  $IR^2$ ، كل جزء  $D \subset IR^2$  يعرف كما يلي:

$$D = \{(x, y) \in IR^2, a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

حيث  $f_1, f_2$  دالتين مستمرتين على  $[a, b]$  و تأخذان قيمهما في  $IR$

ملاحظة (1.2.1): إذا كان الجزء المغلق  $D' \subset IR^2$  يتكون من اتحاد أجزاء فرعية مغلقة

يدعى متراص جزئي

لتكن المنطقة الجزئية  $D$  المعرفة كالتالي:

$$D = \{(x, y) \in IR^2, a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

حيث  $f : D \rightarrow IR$  دالة محدودة، و ليكن  $[c, d]$  إسقاط للمنطقة  $D$  على المحور  $oy$  و

التقسيمين التاليين للمجالين  $[a, b]$ ،  $[c, d]$  إلى  $m$  و  $n$  جزء على الترتيب أي

$$c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n = d \quad \text{و} \quad a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$$

و المربع الجزئي  $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1$

نعرف التقسيم  $S(D)$  للمنطقة  $D$  كما يلي:

$$S(D) = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$$

$$m_{i,j} = \inf \{f(x, y) / (x, y) \in R_{i,j}\}$$

$$M_{i,j} = \sup \{f(x, y) / (x, y) \in R_{i,j}\}$$

تعريف (2.2.1): نسمي العددين الحقيقيين التاليين

$$\underline{S}(f, S(D)) = \sum_{R_{ij} \subset D} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) m_{ij}$$

$$\bar{S}(f, S(D)) = \sum_{R_{ij} \subset D} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) M_{ij}$$

على الترتيب.

تعريف (3.2.1): في الرباعي  $R_{ij}$  نثبت التقسيم  $S(D)$  و  $\zeta_{ij}$  نقطة من  $R_{ij} \cap D$  واليكن العدد

$$R(f, S(D)) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$\forall \zeta_{ij} \in R_{ij} \cap D, / D \subseteq [a, b] \times [c, d]$$

$$\underline{S}(f, S(D)) \leq R(f, S(D)) \leq \bar{S}(f, S(D))$$

ويحقق المرفق بالدالة المحدودة  $f$  و  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  و  $\mathbb{R}^2 \supset D$  ليكن

تعريف (4.2.1): ليكن  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  دالة محدودة

(1) نقول عن الدالة  $f$  أنها قابلة للمكاملة وفق داربو على المنطقة  $D$  إذا كان المجموعين العلوي و السفلي متساويين.

(2) نقول عن الدالة  $f$  أنها قابلة للمكاملة وفق ريمان على المنطقة  $D$  إذا كان للمجموع

$R(f, S(D))$  نهاية محدودة عندما  $x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j$  ينتهيان الي الصفر.

(3) إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للمكاملة وفق ريمان او داربو على المنطقة  $D$  يكون

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{x_{i+1} - x_i \rightarrow 0 \\ y_{j+1} - y_j \rightarrow 0}} R(f, S(D))(\zeta_{ij})$$

$$= \sup_{R_{ij} \subset D} \underline{S}(f, S(D)) = \inf_{R_{ij} \subset D} \bar{S}(f, S(D))$$

نظرية (1.2.1): ليكن  $\mathbb{R}^2 \supset D$  متراص جزئي فإن كل الدوال  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  و المستمرة

عليه قابلة للمكاملة وفق ريمان (باتجاه ريمان).



### الخواص الجبرية للتكامل الثنائي:

قضية (1.2.1): التكامل الثنائي وفق ريمان لدالة محدودة على متراس تحقق الخواص التالية

(1) الخطية: ليكن  $IR^2 \supset D$  و  $f, g : D \rightarrow IR$  دالتين قابلتين للمكاملة وفق ريمان

على  $D$  فإنه مهما كان العدان الحقيقيان  $\alpha, \beta$

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

(2) الاضافة: ليكن  $IR^2 \supset D_1, D_2$  و  $IR^2 \supset D_1 \cup D_2$  بحيث  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

لدينا  $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

(3) التزايد: إذا كان

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

(4) المتباينة المضاعفة:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy \leq \sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$$

طرق حساب التكامل الثنائي:

نظرية فبيني (Fibini)

نظرية (2.2.1): ليكن  $IR^2 \supset D$  و  $f : D \rightarrow IR$  دالة مستمرة إذا كانت  $D$  معرفة

بالكيفية التالية

$$D = \{(x, y) \in IR^2 / a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$= \{(x, y) \in IR^2 / c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

حيث  $f_1, f_2$  دالتين مستمرتين على  $[a, b]$  وتأخذان قيمهما في مجموعة الاعداد الحقيقية

$IR$  وكذلك  $g_1, g_2$  دالتين مستمرتين على  $[c, d]$  و تأخذان قيمهما في  $IR$

فإن التكامل الثنائي للدالة  $f(x, y)$  على  $D$  هو

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

تنبيه (1.2.1): برهان نظرية فبيني صعب بالنسبة لهذا المستوى لكن يمكن اعطاء تفسير حدسي

للنتيجة التالية

نتيجة (1.2.1): إذا كان  $D = [a, b] \times [c, d]$  فإن

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

تفسير للنتيجة (1.2.1): إذا كان  $\forall (x, y) \in D; f(x, y) \geq 0$  في هذه الحالة التكامل الثنائي  $\iint_D f(x, y) dA$  يفسر على أنه الحجم  $V$  للجسم  $S$  في الحيز  $D$  الى غاية المساحة

$$z = f(x, y), \text{ كما يمكن أن نصيغ } V \text{ كالتالي: } V = \int_a^b A(x) dx \text{ حيث } A(x) \text{ تمثل}$$

مساحة مقطع الجسم  $S$  بالمستوي العمودي على المحور  $ox$  للإحداثية  $x$  و بالتالي  $A(x)$  هي المساحة المحدود بالمنحنى  $C$  الممثل للدالة  $z = f(x, y)$  حيث  $x$  يعتبر ثابت و  $c \leq y \leq d$

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{أي أن}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad \text{و منه}$$

بالنسبة لمساحة مقطع الجسم  $S$  بالمستوي العمودي على المحور  $oy$  للإحداثية  $y$ .

مثال (1.2.1): احسب التكامل الثنائي  $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy$  حيث  $\Delta$  المثلث المحدد كالتالي

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 1-x\}$$

$$\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 x^2 y + y^3 / 3 \Big|_{x-1}^{1-x} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (3x^2(x-1) + (x-1)^3) dx = \frac{1}{3} \quad \text{الحل:}$$

مثال (2.2.1): احسب مساحة الحيز  $D$  حيث

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{\sqrt{3}}{2} R \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R, R - \sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \right\}$$

$$\text{بوضع } Air(D) = \iint_D dx dy = \int_{-\sqrt{3}R/2}^{\sqrt{3}R/2} dy \int_{R - \sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dx = \int_{-\sqrt{3}R/2}^{\sqrt{3}R/2} (2\sqrt{R^2 - y^2} - R) dy$$

وبالتالي  $y = R \sin t$  نستنتج أن  $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$

$$\text{Aire}(D) = R^2 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 \cos t - 1) \cos t dt = \frac{2\pi R^2}{3}$$

تحويل المتغيرين:

نظرية (3.2.1): (قانون تحويل المتغيرين)

ليكن  $D, D'$  منطقتين من  $\mathbb{R}^2$  و  $T : D' \rightarrow D$  تطبيق تقابلي من الصنف  $C^1$  بحيث

$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  إذا كانت المحددة الجاكوبية للتطبيق  $T$  غير معدومة على

المنطقة  $D$  فإنه من أجل كل دالة مستمرة  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  لدينا قانون التحويل التالي

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{حيث}$$

نتيجة (2.2.1): إذا كان  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  يمثل تطبيق (تحويل متغير) من

$D'$  في  $D$  فإنه من أجل كل دالة  $f : D' \rightarrow D$  لدينا قانون التحويل الى الاحداثيات القطبية

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r \quad \text{حيث} \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

مثال (3.2.1): احسب التكامل الثنائي  $\iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$  حيث  $D$  الحيز المحدد بربع الدا

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  لدينا الاحداثيات القطبية  $x \geq 0, y \geq 0$  و  $S(1, o(0,0))$

وبالتالي الحيز الجديد هو  $D' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$  ومنه

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = \iint_{D'} (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^1 (r - r^3) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

مثال (4.2.1): باستخدام الاحداثيات القطبية احسب التكامل الثنائي  $\iint_D (x - y)^2 dx dy$  حيث

$D$  يمثل القرص الذي مركزه  $O(0,0)$  ونصف قطره 1 و  $0 \leq y \leq x$

الحل: لدينا  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

$D' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$

$$\iint_D (x - y)^2 dx dy = \iint_{D'} r^3 (\cos \theta - \sin \theta)^2 dr d\theta$$

$$\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/4} (1 - 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta = \frac{1}{4} [\theta - \sin^2 \theta]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

تحويل المتغيرين بصورة كيفية

مثال (5.2.1): اوجد قيمة التكامل  $\iint_D (y - 2x)^2 \sqrt{x + y} dx dy$

حيث  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

مستعملا التحويل التالي:

$$v = y - 2x, u = x + y \Rightarrow x = \frac{1}{3}(u - v), y = \frac{1}{3}(2u + v)$$

حل: أي  $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq 1, -2u \leq v \leq u\}$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = 1/3 \text{ و المحدد الجاكوبي المرفق بهذا التحويل هو } 1/3$$

$$\iint_D (y - 2x)^2 \sqrt{x + y} dx dy = 1/3 \iint_{D'} v^2 \sqrt{u} du dv = 1/3 \int_0^1 \int_{-2u}^u v^2 \sqrt{u} dv du = 2/9$$

قانون قرين - ريمان:

تعريف (5.2.1): منطقة مستوية (أو مساحة مستوية)  $D \subset \mathbb{R}^2$  نقول أنها موجه في الاتجاه

الموجب اذا كان المتحرك على الحافة  $\partial D$  يتحرك باتجاه حركة عقارب الساعة.

نظرية (4.2.1): ليكن  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\partial D$  حافته متجه بالاتجاه الموجب و كان

$w(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  شكل تفاضلي معرف  $D$  على من الصنف  $C^1$

فإن قانون قرين - ريمان

$$\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

نتيجة (3.2.1): اذا كان الشكل التفاضلي  $w(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  شكل

تفاضلي من الصنف  $C^1$  معرف على المغلق  $D$  فإن  $\oint_{\partial D} w = 0$

نتيجة(4.2.1):مساحة المتراص  $D$  من  $\mathbb{R}^2$  تعطى حسب العلاقة

$$AireD = \frac{1}{2} \iint_D (xdy - ydx)$$

مثال(6.2.1): استخدم قانون قرين - ريمان لحساب التكامل المنحني للشكل التفاضلي التالي

$$w = \ln\left(\frac{y+2}{x^2+1}\right)dx + x\frac{3y+7}{y+2}dy$$

الاتجاه الموجب

$$\int_{\partial D} w = \iint_D \left( \frac{3y+7}{y+2} - \frac{1}{y+2} \right) dxdy = \int_D 3dxdy \quad \text{الحل:}$$

$$= 3Aire(D) = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = 3\pi$$

### 3-1 - التكامل الثلاثي:

تعريف و خواص(1.3.1): ليكن  $IR^3 \supset V$  حجم مغلق و محدود (متراص) معرف بالعلاقة  $IR^2 \supset D$  حيث  $V = \{(x, y, z) \in IR^3 / (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$  و  $g_1, g_2 : D \rightarrow IR$  دالتين مستمرتين، والتكن  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$  مساقط الحجم  $V$  على المحاور  $ox, oy, oz$  على الترتيب. نعتبر متوازي المستطيلات الجزئي  $P_{i,j,l}$  المعرف

$$\text{ب: } P_{i,j,l} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_l, z_{l+1}] \cap V$$

$$\forall X_{i,j,l} \in P_{i,j,k}, R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) \nu_{i,j,l}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} f(X_{i,j,l})(x_{i+1}, x_i)(y_{j+1}, y_j)(z_{l+1}, z_l)$$

تعريف(2.3.1): تكون الدالة المستمرة  $f : V \rightarrow IR$  قابلة للمكاملة على الحجم  $V$  إذا كانت

$$\lim_{\nu_{i,j,l} \rightarrow 0} R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \lim_{\nu_{i,j,l} \rightarrow 0} \sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) \nu_{i,j,l}$$

التكامل الثلاثي للدالة  $f$  على الحجم  $V$  و نكتب

$$\lim_{\nu_{i,j,l} \rightarrow 0} R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \lim_{\nu_{i,j,l} \rightarrow 0} \sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) \nu_{i,j,l} = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz$$

ملاحظة(1.3.1): الخواص الجبرية للتكاملات الثنائية صحيحة من أجل التكاملات الثلاثية.



$$V' = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / (x, z) \in D, \phi_1(x, z) \leq y \leq \phi_2(x, z)\}$$

$$V'' = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / (y, z) \in D, \gamma_1(y, z) \leq x \leq \gamma_2(y, z)\}$$

مثال (2.3.1): احسب حجم المنطقة  $\mathfrak{R}^3 \supset V$  المحددة بالمنحنيين للدالتين

$$\phi_1(x, y) = x^2 + y^2 \text{ و } \phi_2(x, y) = 4 - 3(x^2 + y^2) \text{ و اليكن } D \text{ اسقاط } V \text{ على}$$

المستوي  $oxy$  وبالتالي  $D$  محدد بالمنحنى  $C$  الناتج عن تقاطع تمثلي  $\phi_1, \phi_2$  أي

$$D = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 3(x^2 + y^2)\}$$

وبالتالي حسب نظرية فيني

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \iint_D \left( \int_{x^2+y^2}^{4-3(x^2+y^2)} dz \right) dx dy = 4 \iint_D [1 - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = 2\pi \end{aligned}$$

نظرية (2.3.1):: نعرض أن المنطقة  $V$  معرفة بالمنحنيات التالية:

$$\phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y), p(x) \leq y \leq q(x), a \leq x \leq b$$

بحيث الدوال  $\phi_1, \phi_2, p, q$  مستمرة و كانت الدالة  $f$  مستمرة في  $S$  فإن

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z) dx dy dz$$

مثال (3.3.1):: اوجد قيمة التكامل حيث  $\iiint_V (x^2 - y^2) dv$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3; -y^2 \leq z \leq x^2; (x, y) \in D\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2; 0 \leq y \leq x; 0 \leq x \leq 1\}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 - y^2) dv &= \int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_{-y^2}^{x^2} (x^2 - y^2) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^x (x^4 - y^4) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{4}{5} x^5 dx = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

### تحويل المتغيرات:

نظرية (2.3.1): ليكن  $U_1, U_2$  مفتوحين غير خاليين من  $\mathcal{R}^3$  و ليكن  $T : U_1 \rightarrow U_2$  تطبيق

تقابل من الصنف  $C^1$  وتحويله العكسي  $T^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$  فإنه من أجل كل متراص

$U_1 \supset V'$  من أجل كل دالة مستمرة  $f : U_1 \rightarrow U_2$  لدينا

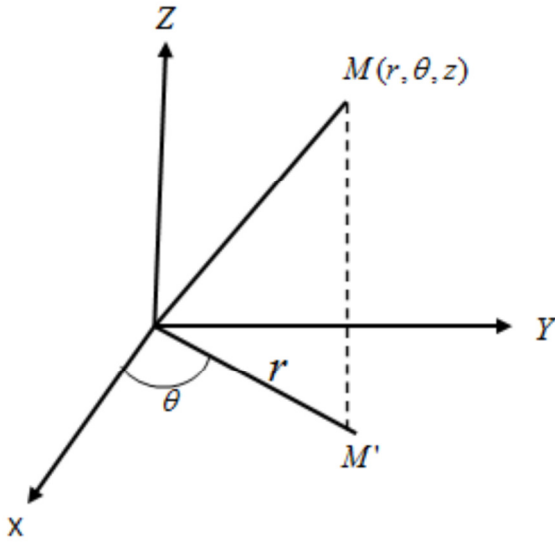
$$\iiint_{T(V')} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} (f \circ T)(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

### الاحداثيات الاسطوانية:

إذا عينا النقطة  $M'$  مسقط النقطة  $M$  على المستوي  $(XOY)$  قطبيا النقطة  $M$  تمثل بالثلاثية

$(r, \theta, z)$  و التي تسمى الاحداثيات الاسطوانية و الانتقال من الاحداثيات الديكارتية الى

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{الاسطوانية بالتحويل التالي:}$$



نتيجة (1.3.1): (الاحداثيات الاسطوانية) إذا كان  $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  فإن

$$\iiint_{T(V')} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \quad \text{و بالتالي} \quad \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = r$$



مثال (4.3.1): احسب التكامل الثلاثي  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  على الاسطوانة

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h, h > 0\}$$

$$V' = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h, h > 0\}$$

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^h r^2 dz \right) d\theta \right) dr = \frac{2\pi}{3} h R^3$$

مثال (5.3.1): احسب التكامل الثلاثي  $\iiint_V x^2 dv$  على الاسطوانة

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, (x^2 + y^2)^2 \leq z \leq 1\}$$

$$V' = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^4 \leq z \leq 1\}$$

$$\iiint_V x^2 dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \int_{r^4}^1 r^2 \cos^2 \theta dz \right) r dr d\theta = \pi \int_0^1 (r^3 - r^7) dr \quad \text{الحل:}$$

$$= \pi \left( \frac{r^4}{4} - \frac{r^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

**الاحداثيات الكروية:**

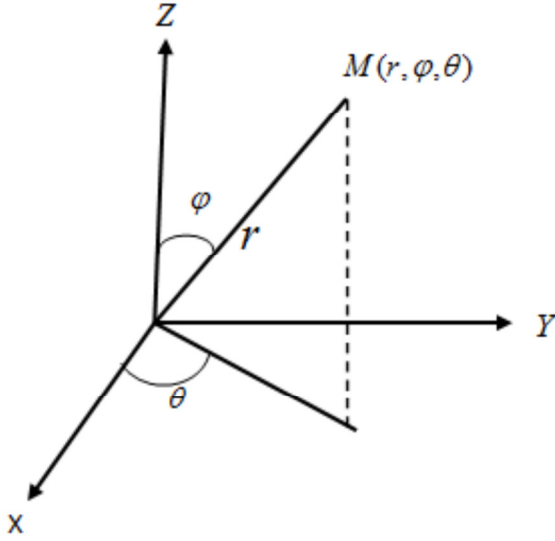
يتم تعيين النقطة  $M$  في الفضاء  $(OX, OY, OZ)$  بالثلاثية المرتبة  $(r, \varphi, \theta)$  و التي نسميها

الاحداثيات الكروية حيث  $r$  هو بعد  $M$  عن المبدأ  $O$  و  $\varphi$  قياس الزاوية  $(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM})$  و  $\theta$  قياس

الزاوية القطبية و يتم التحويل من الاحداثيات الديكارتية الى الكروية وفق العلاقات التالية

$$\left\{ \begin{array}{l} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{array} \right.$$

و يكون هذا التحويل تقابلي إذا تحقق  $(r > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ .



نتيجة (2.3.1): (الاحداثيات الكروية) اذا كان

$$0 \leq r \leq R, R \in \mathbb{R}_+ \text{ حيث } T(r, \varphi, \theta) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ و } 0 \leq \varphi \leq \pi ,$$

$$\text{فان } \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin \varphi \text{ و بالتالي}$$

$$\iiint_{T(V')} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

مثال (6.3.1): احسب حجم الكرة ذات المركز  $o(0,0,0)$  و نصف القطر  $R$  أي

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \text{ و بالتالي}$$

$$V' = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \text{ و منه}$$

$$\text{vol}(V) = \iiint_V dv = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \right) d\varphi \right) dr = 4\pi R^3 / 3$$

مثال (7.3.1): احسب التكامل  $\iiint_V x^2 dv$  حيث  $V$  يمثل المجسم المحصور بين الكرتين

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ و } x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\text{الحل: لدينا } \{V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}\}$$

$$\text{و بالتالي } V' = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / 2 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \text{ و منه:}$$

$$\begin{aligned}\iiint_V x^2 dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_2^3 r^4 \cos^2 \theta \sin^3 \varphi dr d\varphi d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3^5 - 2^5) \sin^3 \varphi \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= -\frac{211}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) d\cos \varphi \cos^2 \theta d\theta = \frac{844}{15} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{844\pi}{15}.\end{aligned}$$

تغيير المتغيرات بصورة كيفية

مثال (8.3.1):  $\Omega$  منطقة من الفضاء  $xyz$  معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y, z); 1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 y + 3xyz) dx dy dz \text{ فأوجد التكامل}$$

الحل: من خلال عبارة الدالة الكاملة وحدود المنطقة  $\Omega$  يستحسن ان نستعمل التحويل التالي:

$$u = x, v = xy, w = 3z \Rightarrow x = u, y = \frac{v}{u}, z = \frac{w}{3}$$

و منه  $G$  صورة المنطقة  $\Omega$  بهذا التحويل تعرف كما يلي:

$$G = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2, 0 \leq w \leq 3\} \text{ والمحدد الجاكوبي}$$

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = 1/3u \text{ المرفق هو}$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 y + 3xyz) dx dy dz = \int_1^2 \left( \int_0^2 \left( \int_0^3 (uv + vw)(1/3u) dw \right) dv \right) du \text{ إذن}$$

$$= \int_1^2 \left( \int_0^2 \left( v + \frac{3v}{2u} \right) dv \right) du = \int_1^2 \left( 2 + \frac{3}{u} \right) du = 2 + \ln 2.$$

## 1-4- سلسلة تمارين للفصل الأول

### التمرين الأول:

أوجد الدوال الأصلية للدوال التالية:

$$, g(x) = \cos x - x \sin^2 x , f(x) = 2x(1 + x^2)^{-1}$$

$$h(x) = (x \ln x \ln(\ln x))^{-1}$$

### التمرين الثاني:

احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx , \int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx , \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} , \int_1^2 x^2 \ln x dx$$

### التمرين الثالث:

أوجد الدوال الأصلية باستخدام التكاملات غير المحدودة

$$\int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x}} , \int \frac{dx}{\sin x} , \int e^x \cos x dx , \int \cos^{2014} x \sin x dx$$

### التمرين الرابع:

احسب التكاملين الثنائيين التاليين في (1 و 2)

$$(1) \text{ لتكن } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 2, \text{ et } 1 < y < 2\}$$

$$\iint_D (x+y)e^{x+y} dx dy$$

$$(2) \text{ و التكن } D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x+y \leq 1\}$$

$$\iint_{D'} (1-x)^2 dx dy$$

### التمرين الخامس:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1, \text{ et } |y| < 1\} \text{ لتكن}$$

$$\iint_D |x+y| dx dy \text{ احسب التكامل الثنائي:}$$

### التمرين السادس:

$$\text{لتكن } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, \text{ et } x+y < 1\} \text{ احسب التكامل:}$$

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy \quad (1)$$

(2) لتكن

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /, x^2 + y^2 - x < 0, x^2 + y^2 - y > 0, \text{et}; y > 0\}$$

$$\iint_D (x+y)^2 dx dy \quad \text{احسب التكامل}$$

التمرين السابع:

$$\text{احسب التكامل} \iint_{D_1} ye^x dx dy \quad \text{حيث } D_1 \text{ يمثل النصف العلوي للقرص}$$

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ /, x^2 + y^2 \leq 5\} \text{ أي } D(o(0,0), \sqrt{5})$$

التمرين الثامن:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /, x^2 + y^2 \leq n^2, n \in \mathbb{N}\} \text{ لتكن (1)}$$

$$\text{احسب التكامل (1') } \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy \text{ ..... بدلالة } n,$$

جد نهايته لما  $n \rightarrow +\infty$

(2) نعيد تعريف  $D$  كما يلي:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /, -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$$

$$\left( \int_{-n}^n e^{-t^2} dt \right)^2 \text{ بين انه يمكن كتابة التكامل (1') على الشكل}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ استنتج قيمة التكامل}$$

التمرين التاسع:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} /, 1/x \leq y \leq -4x + 5\} \text{ نعرف } D \text{ كما يلي:}$$

$$\iint_D x^2 y dx dy \text{ جد قيمة التكامل الثنائي}$$

التمرين العاشر: لتكن

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - y^2, \text{et}, x + y \leq 1.\}$$

$$\iiint_V z dx dy dz \text{ احسب التكامل:}$$

التمرين الحادي عشر:

نعرف الحجم  $V$  كما يلي:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq y \leq 1, \dots, 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

$$\iiint_V y^2 e^x dx dy dz \quad \text{اوجد قيمة التكامل}$$

التمرين الثاني عشر:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 / 0 < z < 1, \text{et}, x^2 + y^2 < z^2\} \text{ لتكن}$$

$$\iiint_V xyz dx dy dz \quad \text{احسب التكامل}$$

التمرين الثالث عشر:

ليكن  $V$  حجم الكرة ذات المركز المبدأ  $(0,0,0)$  و نصف القطر  $R = 1$  ما عدا النقطة

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} \quad \text{احسب التكامل } N(0,0,1)$$

التمرين الرابع عشر:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \leq 1, \text{و } x^2 + y^2 \leq z\} \text{ لتكن}$$

$$\iiint_V x^2 z dx dy dz \quad \text{استخدام الإحداثيات الاسطوانية لحساب التكامل الثلاثي}$$

## الفصل الثاني التكامل المعمم (الموسع)

في المستويات السابقة تم دراسة تكامل الدوال المستمرة على مجال مغلق و محدود (متراص) أي مثل  $[a, b]$  حيث  $a, b$  عدنان حقيقيان، أما في هذا المقياس فسندرس التكاملات على مجالات غير متراصة أي المجالات من الشكل  $[a, +\infty[$ ،  $]-\infty, b]$ ،  $]-\infty, b[$ ،  $]-\infty, +\infty[$ ،  $]-\infty, +\infty[$ ،  $]a, b[$ ،  $]a, b[$ ،  $]a, b[$  و يسمى أي تكامل على المجالات السابقة بالتكامل المعمم أو الموسع وهناك من المراجع من يسمي هذا التكامل بالمعتل للإشارة للمراجع المعتمدة في هذا الفصل [4]، [13-14]، [16] يمكن تقسيم هذا الفصل وفق المجالات السابقة

## 2-1- التكامل على مجال غير محدود

حالة المجال  $[a, +\infty[$

تعريف (1.1.2): ليكن  $f$  تابعاً معرفاً على المجال  $I = [a, +\infty[$  و قابل للمكاملة على كل

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ حيث } F \text{ الدالة } x > 0 \text{ ، } I \supset [a, x] \text{ ومغلق } [a, x]$$

معرفة على  $I$

- إذا كانت  $F$  تقبل نهاية محدودة  $l$  عندما  $x \rightarrow +\infty$  نقول أن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  متقارب نحو  $l$

- وإذا كانت  $F$  لا تقبل نهاية محدودة  $l$  عندما  $x \rightarrow +\infty$  نقول عن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  أنه متباعد.

ملاحظة (1.1.2): ليكن  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  التكاملين  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ،  $\int_a^{+\infty} \lambda f(t) dt$  من نفس طبيعة.

مثال (1.1.2): أدرس طبيعة التكامل  $\int_a^{+\infty} dt/t^k$ ، حيث  $(a > 0, k > 0)$

الحل: نعلم بأن الدالة  $1/t^k \rightarrow t$  معرفة ومستمرة على كل مجال  $I \supset [a, x]$  و بالتالي (1) في حالة  $k \neq 1$

$$F(x) = \int_a^x dt/t^k = \frac{1}{k-1} [a^{1-k} - x^{1-k}] \text{ و بالتالي}$$

إذا كان  $k < 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  أي متباعدة و إذا كان  $k > 1$  فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = a^{1-k} / (k-1) \text{ أي متقاربة}$$



### تكامل الدوال (التوابع) الموجبة:

نظرية(1.1.2): إذا كانت  $f$  دالة موجبة على المجال  $I = [a, +\infty[$  و قابلة للمكاملة على

المجال  $[a, x] \subset I$  فإن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  يكون متقاربا إذا وفقط إذا كان  $\int_a^x f(t)dt$  محدودا من الأعلى.

البرهان: بما أن  $f \geq 0$  فإن الدالة  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  متزايدة وبالتالي فإن نهايتها لما  $x \rightarrow +\infty$  محدودة إذا وفقط إذا كانت  $F$  محدودة من الأعلى أي

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt < +\infty \text{ ، ومنه } \exists M > 0, \forall x \in [a, +\infty[ : F(x) \leq M$$

أما إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  يكون التكامل متباعد أي  $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$ .

نظرية(2.1.2): إذا كان من أجل كل  $t \geq a$  ،  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  لدينا

$$- \text{ إذا كان التكامل } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ متقاربا فإن التكامل } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ متقارب}$$

$$- \text{ وإذا كان التكامل } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ متباعدا فإن التكامل } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ متباعد.}$$

البرهان: الدالتان  $f, g$  موجبتان و مستمرتين على  $I = [a, +\infty[$  و تحققان  $0 \leq f(t) \leq g(t) \forall t \in I$  ، كذلك قابلتين للمكاملة على كل مجال  $[a, x] \subset I$  ،  $x > a$

$$\text{نعرف الدالتين } F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ ، } G(x) = \int_a^x g(t)dt \text{ واضح أن}$$

$(G - F)'(t) \geq 0 \forall t \in ]a, x[$  ومنه الدالة  $G - F$  متزايدة و بالتالي  $F(x) \leq G(x)$  إذا كانت  $G(x)$  تنتهي إلى نهاية  $l$  عندما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $F(x) \leq G(x) \leq l$  ومنه نستنتج أن الدالة  $F$  محدودة و بالتالي فهي نهاية منتهية.

نتيجة(1.1.2): لتكن  $f$  دالة معرفة و موجبة على المجال  $I = [a, +\infty[$  و قابلة للمكاملة على

$$\text{المجال } [a, x] \subset I \text{ ، إذا وجد } r \in \mathbb{R} \text{ بحيث } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r f(x) = l$$

- إذا كان  $r > 1$  فإن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  يكون متقاربا،

- وإذا كان  $r \leq 1$  فإن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  يكون متباعدا.

مثال (2.1.2): لتكن  $f$  دالة لمتغير حقيقي حيث  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}$  ، المعرفة و

المستمرة على  $[1, +\infty[$  و القابلة للمكاملة على المتراص  $[1, x] \subset [1, +\infty[$  من أجل  $r > 1$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{r-1/2}}{\sqrt{1+e^x}} = 0$  وبالتالي حسب النتيجة (1.2) التكامل

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ متقارب.}$$

نتيجة (2.1.2): لتكن  $f$  ،  $g$  دالتين موجبتين معرفتين و مستمرتين على  $I = [a, +\infty[$  و

قابلتين للمكاملة على  $[a, x] \subset [a, +\infty[$

- (1) إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = l$  ،  $l \neq \infty$  ،  $l \neq 0$  فإن التكاملين  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ ، من نفس الطبيعة}$$

- (2) إذا كان  $l = 0$  فإن تقارب  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  يؤدي الى تقارب  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

- (3) إذا كان  $l = \infty$  فإن تباعد  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  يؤدي الى تباعد  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ .

مثال (3.1.2): حقق النتيجة السابقة على الدوال التالية:  $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$  ،

$$k(x) = \frac{e^x}{x} \text{ ، } T(x) = x^2 e^x \text{ عندما } x \rightarrow +\infty$$

ملاحظة (2.1.2): إذا اردنا أن نقسم تكامل متقارب الى مجموع تكاملين يجب التأكد من أن كل منهما متقارب.

مثال (4.1.2): لدينا التكامل  $\int_x^{+\infty} \frac{2}{t^2-1} dt$  متقارب لان  $\frac{2}{t^2-1}$  يكافئ في جوار ألامنهاية  $\frac{1}{t^2}$

(انظر مثال (1.1.2))، لكن لا يمكن كتابة  $\int_x^{+\infty} \frac{2}{t^2-1} dt = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t-1} - \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$  لان كلاهما

متباعدا.

حالة المجال  $]-\infty, b]$ :

ليكن  $f$  تابع معرف على  $]-\infty, b]$  و قابل للمكاملة على  $[x, b]$ ,  $(x < b)$

اذا كان  $F(x) = \int_x^b f(t) dt$  يقبل نهاية محدودة  $l$  عندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $\int_{-\infty}^b f(t) dt$

متقارب نحو  $l$ ، في حالة  $a = b$  و اذا كان  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  ،  $\int_{-\infty}^a f(t) dt$  متقاربين فإن التكامل

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  الناتج عن مجموعهما متقارب.

مثال (5.1.2): التكامل  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2+1} dt$  موجود (متقارب) لان  $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$

و  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2+1} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2+1} dt$  تكامل دالة زوجية و بما أن التكامل  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$  متقارب و

بالتالي التكامل  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2+1} dt$  متقارب

## 2-2- التكامل على مجال محدود غير متراس:

نظرية (1.2.2): ليكن  $f$  تابعا معرفا على المجال  $J = [a, b]$ ,  $a < b$  و قابل للمكاملة

على كل مجال محدود ومغلق (متراس)  $J \supset [a, x]$ ،  $b > x > a$  و الدالة  $F$  حيث

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ معرفة على } J$$

- اذا كان  $F(x)$  يقبل نهاية محدودة  $l'$  عندما  $x \rightarrow b$  نقول أن  $\int_a^b f(t) dt$  موجود وهو

متقارب نحو  $l'$

- إذا كان  $F(x)$  لا يقبل نهاية منتهية عندما  $x \rightarrow b$  نقول أن  $\int_a^b f(t)dt$  متباعد

مثال(1.2.2): ادرس طبيعة التكامل  $\int_{-1}^0 t^2 \ln|t|dt$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x t^2 \ln|t|dt &= \left[ \frac{t^3}{3} \ln|t| \right]_{-1}^x - \frac{1}{3} \int_{-1}^x t^2 dt \quad \text{و بالتالي } [-1, x] \subset [-1, 0[ \\ &= \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

واضح أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9} \right] = \frac{1}{9}$  ومنه نستنتج أن متقارب.

**تكامل التوابع الموجبة:**

نظرية(2.2.2): ليكن  $f$  تابعا موجبا معرفا على المجال  $J = [a, b], a < b$  و قابل

للمكاملة على كل متراص  $[a, x], J \supset [a, x], b > x > a$ ، يكون التكامل  $\int_a^b f(t)dt$  متقاربا اذا و

فقط إذا كان محدودا من الاعلى. أي  $\exists M > 0, \forall x \in [a, b[ \rightarrow \int_a^x f(t)dt \leq M$

البرهان: بما أن  $f \geq 0$  فإن الدالة  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  متزايدة وبالتالي النهاية لما

$x \rightarrow b$  محدودة إذا فقط إذا كانت  $F$  محدودة من الأعلى أي  $\int_a^b f(t)dt < +\infty$  أما إذا

كانت  $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = +\infty$  يكون التكامل متباعد أي  $\int_a^b f(t)dt = +\infty$ .

نظرية(3.2.2): اذا كان  $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$

و اذا كان  $\int_a^x g(t)dt$  متقاربا عندما  $x \rightarrow b$  يكون  $\int_a^x f(t)dt$  متقاربا عندما  $x \rightarrow b$

أما اذا كان  $\int_a^x f(t)dt$  متباعدا عندما  $x \rightarrow b$  يكون  $\int_a^x g(t)dt$  متباعدا عندما  $x \rightarrow b$ .

نتيجة (1.2.2): لتكن  $f$  تابعا معرفا و موجبا على المجال  $J = [a, b]$  و قابلة للمكاملة على

المجال  $J$  ،  $[a, x] \subset J$  ، إذا وجد  $r \in \mathbb{R}$  بحيث  $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^r f(x) = l'$

- إذا كان  $r < 1$  ، و  $l' = 0$  منتهي فان التكامل  $\int_a^b f(t) dt$  يكون متقاربا،

و إذا كان  $l' = 0$  فان التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  يكون متباعدا.

ملاحظة (1.2.2): كل النظريات المدرجة على المجال  $[a, b]$  صحيحة على المجال  $[a, b]$  و

كذلك النتيجة (2.2.2) بحيث  $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^r f(x) = l''$ .

مثال (2.2.2): ادرس تقارب التكامل  $\int_0^1 dt / \sqrt{t(1+e^t)}$

لاحظ أن التابع  $f(t) = 1/\sqrt{t(1+e^t)}$  معرف ، موجب و مستمر على  $[0, 1]$  و قابل

للمكاملة على المتراص  $[0, 1] \subset [x, 1]$  وهو غير محدود لأن  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty$  ، لكن

$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1/2} f(t) = 1/\sqrt{2}$  أي  $r = 1/2 < 1$  و بالتالي حسب النتيجة (1.2.2) و الملاحظة

(1.2.2) التكامل المعطى متقارب.

ملاحظة (2.2.2): لدراسة التكامل المععم غالبا ما نستعمل المقارنة مع تكامل من النمط التالي:

$$(1) \int_a^{+\infty} dt/t^r \text{ الذي هو متقارب اذا كان } r < 1 \text{ و متباعد اذا كان } r \geq 1$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ الذي هو متقارب اذا كان } \alpha > 0 \text{ و متباعد اذا كان } \alpha \leq 0$$

$$(3) \int_a^b dt/(t-a)^r \text{ الذي هو متقارب اذا كان } r < 1 \text{ و متباعد اذا كان } r \geq 1$$

$$(4) \int_a^b \ln(t-a) dt \text{ الذي هو متقارب.}$$

نظرية (4.2.2): معيار كوشي

(1) يكون التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  متقارب اذا و فقط اذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, A > 0: \forall x_1, x_2 > A \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

(2) يكون التكامل  $\int_a^b f(t)dt$  متقارب اذا و فقط اذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in [a, b[; \forall x_1, x_2 \in [x_0, b[ \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

البرهان: يكفي تطبيق وجود النهاية عندما  $x$  تنتهي إلى  $b$

### 2-3- التكامل المتقارب مطلقا:

ندرس التكامل المعمم  $\int_a^b f(t)dt$  بحيث يمكن ( $a = -\infty, b = +\infty$ ) عندما لا يكون للتابع

$f$  اشارة ثابتة في مجال المكاملة

مثال (1.3.2): لاحظ التكامل  $\int_a^{+\infty} k(t) \cos t dt$  حيث  $k(t)$  تابع موجب، لا يمكن دراسة طبيعته

مباشرة لان التابع  $k(t) \cos t$  ليست لديه اشارة ثابتة في المجال  $[a, +\infty[$ .

تعريف (1.3.2): نقول عن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  أنه متقاربا مطلقا اذا كان التكامل  $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$

متقاربا.

نظرية (1.3.2): اذا كان التكامل  $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$  متقارب فإن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  متقارب.

البرهان: لدينا  $f$  تابعا معرفا و مستمرا على المجال  $I = [a, +\infty[$  و قابل للمكاملة على كل

متراص  $[a, x_0]$  ،  $x_0 > a$  ، و بما أن  $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$  متقارب حسب معيار كوشي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 / x_0 > a, \forall x_1, x_2 \in [x_0, +\infty[ \rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \right| < \varepsilon$$

و بما أن

معيار كوشي.  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  و منه التكامل  $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$  متقارب حسب

نتيجة(1.3.2): اذا كان من اجل كل  $x$  ، من مجال المكاملة  $|f(x)| \leq g(x)$  و كان تكامل التابع الموجب  $g$  متقاربا فإن تكامل التابع  $f$  متقارب.

مثال(2.3.2): التكامل  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$  موجود (متقارب) لان  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

لكن التكامل  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$  غير موجود (متباعد) لأن  $\frac{|\sin x|}{x^2}$  يكافئ  $\frac{1}{x}$  على  $]0, +\infty[$ .

## 2-4- التكامل المتقارب شرطيا:

تعريف(1.4.2): نقول عن التكامل  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  أنه متقارب شرطيا اذا كان متقاربا دون أن يتقارب مطلقا.

نظرية(1.4.2): اذا وجد  $x_0$  بحيث من أجل كل  $x (x > x_0)$  التابع  $k$  متناقص نحو الصفر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0 \text{ فإن التكامل } \int_a^{+\infty} k(t) \cos t dt \text{ متقارب (يمكن } a < x_0).$$

البرهان: نستعمل معيار كوشي

مثال(1.4.2): التابع  $1/x \rightarrow x$  متناقص نحو الصفر عندما  $x \rightarrow +\infty$  و بالتالي التكامل

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ موجود(متقارب) لكن غير متقارب مطلقا فهو متقارب شرطي.}$$

## 2-5- التكامل المعمم باستعمال المكاملة بتحويل المتغير او المكاملة بالتجزئة:

### 2-5-1- تحويل المتغير:

نذكر بالنتيجة الواردة في مقياس التحليل 1 على صيغة التالية

نتيجة(1.5.2): ليكن  $f$  تابع مستمر على المتراص  $I = [a, b]$  و ليكن  $g$  تابع قابل للشقاق

مع للاستمرار على  $J = [\alpha, \beta]$  بحيث  $J \subset I$  ، بوضع  $u = g(t)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g)(t)g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$$

و اذا كان  $g$  اميومورفيزم قابل للاشتقاق مع

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g)(t)g'(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

الاستمرار (متزايد تماما) من  $J$  نحو  $I$  فان

يمكن تطبيق هذه النتيجة على التكاملات المعممة، ليكن  $f$  تابع مستمر على المجال غير المتراص  $I' = [a, b[$  (يمكن  $b = +\infty$ ) و  $g$  اميومورفيزم قابل للاشتقاق مع الاستمرار (نفرض انه متزايد تماما) من  $J' = [\alpha, \beta[$  نحو  $I'$  فانه من اجل كل متراص  $J' \subset [\alpha, t]$  و

$$\int_a^x f(u)du = \int_{\alpha}^{g^{-1}(x)} (f \circ g)(t)g'(t)dt$$

حيث  $x = g(t)$  لدينا  $[a, x] \subset I'$  كذلك لما

$$x \rightarrow b \text{ فان } g^{-1}(x) \rightarrow \beta$$

ايضا اذا كان احد التكاملين متقاربا او متقاربا مطلقا فالآخر كذلك ونحو نفس القيمة و العكس صحيح

$$\int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx$$

مثال (1.5.2): ادرس تقارب التكامل

الحل: نضع  $x = 1/t$  و بما ان  $x \in ]0, 1[$  فان  $t \in [1, +\infty[$  و بالتالي

$$\int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

كذلك لدينا  $\frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$  و بالتالي التكامل  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$

متقارب مطلقا ومنه التكامل  $\int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx$  متقارب مطلقا فهو متقارب.

## 2-5-2- المكاملة بالتجزئة:

ليكن  $f, g$  تابعين من الصنف  $C^1$  على المجال غير المتراص  $I = [a, b[$  (يمكن  $b = +\infty$ ) نطبق قانون المكاملة بالتجزئة على كل  $I \supset [a, x]$  أي

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)dt$$

كل طرف من هذه المساواة يمثل تابع اذا كان لأحدهما نهاية عندما  $x \rightarrow b$  يكون للأخر نفس النهاية و التكامل المعطى متقارب أما اذا لم تكن لأحدهما نهاية عندما  $x \rightarrow b$  فالآخر كذلك ليست له نهاية و التكامل متباعد.



مثال (2.5.2): ادرس تقارب التكامل  $\int_1^{+\infty} \frac{Actgx}{x^2} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{Actgx}{x^2} dx = -\frac{Actgx}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة نحصل على

## 2-6- التكامل المعمم المتعلق بوسيط

يعطى المجال  $[a, b[$  ( $b$  منتهي أو غير منتهي) و المجال  $I (I \subset \mathbb{R})$  محدود أو غير محدود و الدالة  $f : [a, b[ \times I \rightarrow C$  المستمرة على  $[a, b[ \times I$ ، نفرض من أجل كل  $x$  ثابتة من  $I$  التطبيق  $t \rightarrow f(t, x)$  يقبل تكامل معمم متقارب على المجال  $[a, b[$  وهو

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

، التابع  $F$  له كل خواص التابع  $f$ .

### 2-6-1-الاستمرار:

نظرية (1.6.2): لتكن  $f$  دالة مستمرة على  $[a, b[ \times I$ . نفرض وجود دالة موجبة  $g$  والتي لها تكامل معمم متقارب على  $[a, b[$  بحيث  $[a, b[ \times I$   $|f(t, x)| \leq g(t)$   $\forall t \in [a, b[$ ،  $\forall x \in I$  فإن الدالة

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

مستمرة على المجال  $I$ .

البرهان: بما أن التكامل المعمم للدالة  $g$  متقارب وحسب معيار كوشي

$$\int_{b'}^b |f(t, x)| dt \leq \int_{b'}^b g(t) dt < \varepsilon$$

لدينا  $\forall y \in I$  بحيث  $\forall \varepsilon > 0, \exists b' \in [a, b[$

لتكن  $x_0 \in I$ ، و اليكن  $J \subset I$  متراص بحيث  $x_0 \in J$  من المتباينة السابقة نستنتج أنه

$$\forall x \in J, |F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^{b'} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + 2\varepsilon$$

و بما أن الدالة  $f$  مستمرة على المتراص  $[a, b'] \times J$  و بالتالي

$$\exists \eta > 0; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(t, x) - f(t, x_0)| \leq \varepsilon / (b' - a)$$

و منه نستنتج أنه  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq 3\varepsilon$

أي أن الدالة  $F$  مستمرة عند  $x_0$ .

نتيجة (1.6.2): إضافة الى شروط النظرية السابقة إذا كان  $I$  متراص و كانت  $f$  مستمرة على المتراص  $[a, b] \times I$  فإن الدالة  $F$  مستمرة على المتراص  $I$ .

## 2-6-2- الاشتقاق تحت التكامل:

نظرية (2.6.2): لتكن  $f$  دالة مستمرة على الشريط  $[a, b] \times I$  نفرض أنه

(1) الدالة  $f$  تقبل مشتقة جزئية أولى بالنسبة للمتغير  $x$  مستمر على  $[a, b] \times I$

(2) توجد دالة  $g : [a, b[ \rightarrow \mathfrak{R}_+$  تكاملها المعمم على  $[a, b[$  متقارب و

$$\forall t \in [a, b[, \forall x \in I; \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq g(t)$$

(3) من أجل كل  $x$  من  $I$  الدالة  $t \rightarrow f(t, x)$  تقبل تكامل معمم متقارب على  $[a, b[$

فإن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق مع الاستمرار على  $I$  و مشتقتها يعبر عنه بـ:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt$$

البرهان: لتكن  $x_0$  نقطة من  $I$  و ليكن  $J \subset I$  بحيث  $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ,  $\alpha > 0$

حسب نظرية التزايديات المنتهية من أجل كل  $t \in [a, b[$  و  $0 < |h| < \alpha$  توجد

$$\frac{f(t, x+h) - f(t, x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \theta(t, h)h) \quad \text{بحيث } \theta(t, h) \in [0, 1]$$

من جهة أخرى  $\forall \varepsilon > 0, \exists b' \in ]a, b[$  بحيث  $\int_{b'}^b g(t) dt \leq \varepsilon$  و منه نستنتج أن

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt \right| \leq 2\varepsilon + \int_a^{b'} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \theta(t, h)h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) \right| dt$$

و بما أن المشتق الجزئي للدالة  $f$  مستمرة على  $[a, b] \times I$  فهو مستمر بانتظام على المتراص

$[a, b'] \times J$  و بالتالي يوجد  $\eta > 0$  بحيث  $\forall (t, x) \in [a, b'] \times J$

$$|h| < \eta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x + \theta(t, h)h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b' - a}$$

و منه  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt \right| \leq 3\varepsilon$  أي أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق

ومشتقتها يمكن الحصول عليه بالاشتقاق داخل رمز المكاملة.

أمثلة: (1) دراسة الدالة  $F(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt (x \geq 1)$

لاحظ أن الدالة  $f : (t, x) \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$  معرفة و مستمرة على  $[0,1] \times [1, +\infty[$   
 إذن الدالة  $F$  معرفة و مستمرة على  $[1, +\infty[$ .

(2) دراسة الدالة  $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2 \cos t + x^2) dt$

الدالة  $f : (t, x) \rightarrow \ln(1 - 2x \cos t + x^2)$  معرفة و مستمرة على  $[-\pi, \pi] \times ]-1, 1[$   
 إذن الدالة  $F$  مستمرة على  $]-1, 1[$ ، كذلك الجزئية للدالة  $f$  على  $]-\pi, \pi[ \times ]-1, 1[$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(1 - 2x \cos t + x^2) = 2 \frac{x - \cos t}{1 - 2x \cos t + x^2}$$

ومنه الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق و  $F'(x) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x - \cos t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt$

**2-6-3- دوال اولر الاكثر استعمالا:**

(1) الدالة قامة و المعرفة كما يلي:  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

لها الخواص التالية:

$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \log t dt$  •

$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  •

$\forall n > 0, \Gamma(n+1) = n!$  •

(2) الدالة بيتا و المعرفة بـ:  $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

لها الخواص التالية:

$\beta(x, y) = \beta(y, x)$  •

$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  •

$\beta(1/2, 1/2) = \pi \Rightarrow \Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$  •

## 2-7- سلسلة تمارين للفصل الثاني

### التمرين الأول:

باستعمال التعريف احسب التكاملات المعممة التالية:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int_0^1 \frac{\ln x dx}{(1+x)^2}, \quad \int_{-1}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^{3/2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^7 dx}{x^{16} + 1}, \quad \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

### التمرين الثاني:

ادرس طبيعة التكاملات الموسعة التالية:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1-2x}{x(1-x)} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

ثم احسب  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1-a}$  و  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a$  للتكاملين 1، 2،

### التمرين الثالث:

ما هي طبيعة التكاملات التالية:

$$\int_1^{+\infty} \left( e^{-1/x} - \cos \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{chx - \cos x dx}{shx}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{shx},$$

### التمرين الرابع:

بين ان التكاملات التالية متقاربة و أنها تساوي الصفر:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \ln(1+x^2)}{x^4+1} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$$

### التمرين الخامس:

(1) بين أن  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$  متقارب (يمكن استعمال الكاملة بالتجزئة والتكامل المتقارب مطلقا)

$$(2) \text{ بين أن } \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx \text{ متقارب}$$

$$(3) \text{ نضع } g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x}, f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$(4) \text{ بين أن } g \text{ تكافئ } f \text{ لكن التكاملين } \int_1^{+\infty} g(x) dx \text{ و } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ ليس لهما نفس الطبيعة.}$$

## الفصل الثالث السلاسل

السلاسل قسم من الاقسام المهمة في التحليل الرياضي وهو وظيفي في كثير من الجوانب سوى في الرياضيات البحتة أم خطوات عملية تطبق في كثير من الاختصاصات التقنية من هندسة أو إحصاء، بيولوجيا، فيزياء. فتقارب السلسلة معناه أن المسألة المدروسة سوى عن طريق الاضطراب أو العينات أن لديها حظ وافر من صدقية الحل. حقيقتا لم يعد من السهل تدريس كثيرا من فروع الرياضيات فقط دون الرجوع الى هذا الجانب المهم من الرياضيات ألا وهو السلاسل وخاصة منها السلاسل الصحيحة أو فوري، لمزيدا من التفصيل يمكن الرجوع إلى المراجع المستعملة في هذا الفصل وهي على التوالي: [9-10]، [13-14]، [16-17]

### 3-1-1- السلاسل العددية

#### 3-1-1-3 مفاهيم عامة

تعريف (1.1.1.3): لتكن  $(U_n)_{n \geq 1}$  متتالية عددية في مجموعة الاعداد  $K$  حيث  $K$  هي مجموعة الاعداد الحقيقية  $IR$  او مجموعة الاعداد المركبة  $C$ ، نسمي سلسلة عددية ذات الحد العام  $U_n$  متتالية المجاميع  $(S_n)_{n \geq 1}$  ذات الحدود المتعاقبة المعطاة كالتالي:

$$\begin{aligned} S_1 &= U_1 \\ S_2 &= U_1 + U_2 \\ S_3 &= U_1 + U_2 + U_3 \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= U_1 + U_2 + \dots\dots U_n \end{aligned}$$

إذا كانت للمتتالية  $(S_n)_{n \geq 1}$  نهاية عندما  $n \rightarrow +\infty$  نقول عن السلسلة ذات الحد العام  $U_n$  انها

متقاربة نحو العدد الحقيقي  $S$  و نكتب  $S = U_1 + U_2 + \dots\dots U_n + \dots\dots$  او  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

و اذا كانت المتتالية  $(S_n)_{n \geq 1}$  لا تقبل نهاية محدودة او ليست لها نهاية عندما  $n \rightarrow +\infty$  نقول عن السلسلة ذات الحد العام  $U_n$  انها ليست متقاربة او متباعدة.

ملاحظة (1.1.3): يمكن كتابة السلسلة ذات الحد العام  $U_n$  كما يلي:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \sum_{n=1}^k U_n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} U_n, k \geq n$$

او  $S = S_n + R_n$  و يسمى الباقي  $R_n$

مثال (1.1.1.3): ادرس تقارب السلاسل العددية التالية

(1) لتكن  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  بوضع  $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$  فإنه يمكن كتابته على الشكل

حيث  $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  و اليكن المجموع الجزئي  $S_n$  من الرتبة  $n$

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

لاحظ ان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$  أي تقبل نهاية محدودة وبالتالي السلسلة متقاربة.

(2) نعتبر السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  و اليكن المجموع الجزئي  $S_n$  من الرتبة  $n$  حيث

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln(1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$  ومنه السلسلة متباعدة.

(3) لتكن السلسلة  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$  لاحظ ان المجموع الجزئي  $S_n$  من الرتبة  $n$  هو  $S_n = 1$

عندما يكون  $n$  زوجي ( $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ) و  $S_n = 0$  عندما يكون  $n$  فردي وبالتالي

$S_n$  لانهاية له عندما  $n \rightarrow +\infty$  و منه السلسلة متباعدة.

الشرط اللازم لتقارب سلسلة:

مبرهنة (1.1.3): اذا كانت  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  متقاربة فإن حدما العام ينتهي الى الصفر عندما

$$n \rightarrow +\infty$$

البرهان: ليكن  $S_n$ ،  $S_{n-1}$  المجموعين الجزئيين من الرتبة  $n$ ،  $n-1$  على الترتيب نلاحظ أن

$$S_n - S_{n-1} = U_n \text{ و بما أن السلسلة المعطاة متقاربة و بالتالي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S \text{ ومنه نستنتج أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \text{ و-ه-م.}$$



مثال (2.1.3): انظر (1) حل مثال (1.1.3) بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$  فالسلسلة متقاربة و بالتالي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \text{ حسب المبرهنة (1.1.3) فإن}$$

ملاحظة (1.1.1.3): اذا كانت  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  لا يستلزم تقارب السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

مثال (2.1.1.3): انظر حل مثال (1.1.1.3) السلسلة ذات الحد العام  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  واضح أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \text{ لكن السلسلة متباعدة.}$$

نتيجة (1.1.3): لدينا الاستلزام العكس النقيض ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0 \leftarrow \sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  متباعدة).

مثال (3.1.3): نعتبر السلسلة العددية  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n+1}$  لاحظ أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$  و بالتالي

السلسلة المعطاة متباعدة.

$$\text{خواص: لتكن السلسلتين } \sum_{n=1}^{+\infty} U_n, \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$$

$$(1) \text{ نعرف السلسلة العددية } \sum_{n=1}^{+\infty} (U_n + V_n) \text{ بأنها مجموع السلسلتين } \sum_{n=1}^{+\infty} U_n, \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$$

$$(2) \text{ كذلك } \forall \lambda \in IK \text{ السلسلة } \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda U_n) \text{ تعرف بأنها السلسلة ذات الحدود ناتجة عن}$$

$$\text{جداء حدود السلسلة } \sum_{n=1}^{+\infty} U_n \text{ بالعدد } \lambda$$

نظرية (1.1.3): اذا كانتا السلسلتين  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n, \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$  متقاربتين نحو العددين  $S_1, S_2$  على

الترتيب فإن السلسلتين  $\sum_{n=1}^{+\infty} (U_n + V_n), \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda U_n)$  تتقاربان على الترتيب نحو العددين

$$S_1 + S_2, \lambda S_1.$$

### 2-1-3 - السلاسل ذات الحدود الموجبة

السلاسل الاساسية

(1) السلسلة الهندسية:

تعريف(1.2.1.3): نسمي سلسلة هندسية السلسلة ذات الحد العام  $U_n = aq^n$  حيث  $n \in \mathbb{N}$  و  $q, a \in \mathbb{R}$ .

ملاحظة(1.1.2.3): اذا كان  $a = 0$  فإن حدود السلسلة معدومة كذلك إذا كان  $q = 0$  عدا الحد الاول عندما  $U_0 = a \neq 0$  فيما يلي من الفصل نعتبر  $a, q \neq 0$

دراسة التقارب: نعلم بأنه إذا كان  $|q| \geq 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0$  وبالتالي  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$  متباعدة و إذا

كان  $|q| < 1$  لدينا المجموع الجزئي  $S_n$  من الرتبة  $n$  حيث

$$S_n = a + aq + \dots + aq^n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

مثال(1.1.2.3): السلسلة  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$  سلسلة هندسية اساسها  $1/2 < 1$  فهي متقاربة كذلك

السلسلة  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-3)^n}$  سلسلة هندسية واساسها يحقق  $|q| = 1/3 < 1$  فهي متقاربة.  
(2) سلسلة ريمان

تعريف(2.2.1.3): نسمي سلسلة ريمان السلسلة من الشكل  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

مبرهنة: تكون سلسلة ريمان  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  إذا و فقط إذا كان  $\alpha > 1$

البرهان: إذا كان  $\alpha \leq 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$  وبالتالي السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  متباعدة

أما إذا كان  $\alpha > 0$  يمكن كتابة السلسلة بالشكل التالي

$$\begin{aligned} & 1 + \left[ \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right] + \left[ \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \right] + \left[ \frac{1}{8^\alpha} + \dots + \frac{1}{15^\alpha} \right] + \dots \\ & \leq 1 + \left[ \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} \right] + \left[ \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} \right] + \left[ \frac{1}{8^\alpha} + \dots + \frac{1}{8^\alpha} \right] + \dots \\ & \leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + \dots \end{aligned}$$

لاحظ أن السلسلة الحادة من الاعلى تمثل سلسلة هندسية اساسها  $1/2^{\alpha-1}$  و التي تكون متقاربة اذا و فقط اذا كان  $1/2^{\alpha-1} < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$  أي  $\alpha > 1$  و هم.

ملاحظة(2.2.1.3): في حالة  $\alpha = 1$  تسمى سلسلة ريمان  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  بالسلسلة التوافقية وهي متباعدة.

مقاييس التقارب للسلاسل ذات الحدود الموجبة:

نعتبر السلسلة العددية  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  ذات الحدود الموجب واليكن  $S_n, S_{n-1}$  المجموعين الجزئيين

من الرتبة  $n, n-1$  على الترتيب وبالتالي  $S_n - S_{n-1} = U_n > 0$  ومنه لكي تكون المتتالية  $(S_n)_{n \geq 1}$  متقاربة يجب أن تكون محدودة من الأعلى وهو شرط تقارب السلسلة المعطاة

نظرية(1.2.1.3): نعتبر السلسلتين  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n, \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$  كل منهما ذات حدود موجبة بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq V_n$$

(1) إذا كانت السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$  متقاربة تكون  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  متقاربة

(2) وإذا كانت السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  متباعدة تكون  $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$  متباعدة.

مثال(2.2.1.3): ادرس طبيعة كل من السلسلتين العدديتين

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 - \sin n}{n}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 + \cos^2 n}{2^{2n+2}}$$

الحل: بما أن  $3 + \cos^2 n \leq 4 \iff \forall n \in \mathbb{N}, 3 + \cos^2 n \leq 4$  و بما أن

$1/4^n$  يمثل حد عام في سلسلة هندسية اساسها  $1/4$  فهي متقاربة و بالتالي حسب النظرية (1.2.1.3) و منه السلسلة (1) متقاربة.

كذلك واضح أن  $\frac{2 - \sin n}{n} \geq \frac{1}{n}$  و نعلم أن  $\frac{1}{n}$  يمثل حد عام لسلسلة توافقية فهي متباعدة

و بالتالي حسب النظرية (1.2.3) و منه السلسلة (2) متباعدة.

النظرية (2.2.1.3): ليكن  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n, \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$  سلسلتين لحدود موجبة لدينا

(1) إذا وجد عدنان حقيقيان موجبان  $a, b$  بحيث  $a \leq \frac{U_n}{V_n} \leq b$  فإن السلسلتين

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_n, \sum_{n=1}^{+\infty} U_n \text{ من نفس الطبيعة}$$

(2) إذا كان  $U_n, V_n$  متكافئان فالسلسلتان من نفس الطبيعة.

$$\text{مثال (3.2.1.3): السلسلتان } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(n+1)(n+2)}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{2(n+1)(n+2)} \text{ من نفس}$$

الطبيعة (متباعدتان) لأن  $\frac{1}{4} \leq \frac{U_n}{V_n} \leq 1$  حيث  $U_n$  و  $V_n$  يمثلان الحدين العاميين للسلسلتين

على الترتيب. كذلك  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  و  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  من نفس الطبيعة (متقاربتان) لأنهما

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} = 1 \text{ متكافئتان أي}$$

ملاحظة (2.2.1.3): إذا كان  $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$  يمكن مقارنة السلسلتين  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ،

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_n \text{ حسب النظرية (1.2.3).}$$

مقياس النسبة (مقياس دالنبير): لتكن السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  ذات الحدود الموجبة و التكن النسبة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{U_{n+1}}{U_n} = k, k \in \mathbb{R}_+ \text{ و كان}$$

(1)  $k < 1$  تكون السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  متقاربة،  $k > 1$  تكون السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  متباعدة،

(3) أما إن كان  $k = 1$  السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  لا متقاربة و لا متباعدة.

كذلك إذا كانت النسبة تتعلق بالعدد  $n$  نحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l; l \in \mathbb{R}_+$  و بالتالي:

(1) إذا كان  $l < 1$  تكون السلسلة متقاربة، (2) و إذا كان  $l > 1$  تكون السلسلة متباعدة، (3) اما ان كان  $l = 1$  السلسلة لا متقاربة و لا متباعدة.

مثال (4.2.1.3): ادرس طبيعة السلسلة التالية:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$

الحل: لاحظ ان النسبة تتعلق بالعدد  $n$  أي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3)} \times$$

$$\frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+3} \text{ و بالتالي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

مقياس كوشي:

نعتبر السلسلة العددية  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$  ذات الحدود الموجبة و اليكن الجذر النوني  $\sqrt[n]{U_n}$  اذا

وجد عدد حقيقي موجب  $k$  بحيث  $\sqrt[n]{U_n} = k$  و كان

(1)  $k < 1$  تكون السلسلة متقاربة، (2) و اذا كان  $k > 1$  تكون السلسلة متباعدة،

(3) أما إن كان  $k = 1$  السلسلة لا متقاربة و لا متباعدة

كذلك لما  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$ ، (1) و كان  $l < 1$  تكون السلسلة متقاربة، (2) و اذا كان  $l > 1$

تكون السلسلة متباعدة، (3) أما إن كان  $l = 1$  السلسلة لا متقاربة و لا متباعدة.

مثال (5.2.1.3): ناقش حسب قيم العدد الحقيقي  $a$  تقارب السلسلة ذات الحد العام

$$U_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2} \text{ واضح أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(1 + a/n)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a/n)^{-n} = e^{-a}$$

اذا كان  $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0 \Leftrightarrow e^{-a} < 1$  تكون السلسلة متقاربة و اذا كان

$a < 0 \Leftrightarrow e^{-a} > 1$  فالسلسلة متباعدة، أما ان كان اذا كان  $a = 0 \Leftrightarrow e^{-a} = 1$  السلسلة لا متقاربة و لا متباعدة

نعوض  $a = 0$  في عبارة الحد العام نجد  $U_n = (1)^{-n^2} = 1$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1 \neq 0$  أي أن

السلسلة متباعدة.

خاصية (1.2.1.3): (سلسلة برتر) تكون السلسلة العددية  $T_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  و تكون

(1) متقاربة عندما  $\alpha > 1, \forall \beta$ ، (2) متباعدة عندما  $\alpha < 1, \forall \beta$

(2) اذا كان  $\beta > 1, \alpha = 1$  متقاربة و متباعدة اذا كان  $\beta \leq 1, \alpha = 1$

نظرية(3.2.3): اذا كانت  $f$  دالة مستمرة ومتناقصة نحو الصفر على  $IR_+$  تكون السلسلة

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ و التكامل } \int_0^n f(t) dt \text{ من نفس الطبيعة.}$$

### 3-1-3- السلاسل ذات الحدود الكيفية:

التقارب المطلق:

تعريف(1.3.1.3): نرفق بالسلسلة الكيفية  $\sum_{n \geq 0} U_n$  السلسلة ذات الحدود الموجبة  $\sum_{n \geq 0} |U_n|$  عندما

تكون هذه السلسلة متقاربة نقول عن السلسلة  $\sum_{n \geq 0} U_n$  انها متقاربة مطلقا

نظرية(1.3.3): كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة

مثال(1.3.1.3): ادرس تقارب السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^2}$ ,  $x \in IR$

لاحظ ان  $\left| \frac{e^{inx}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$  و الذي يمثل حد عام في سلسلة ريمان و  $\alpha = 2$  فهي متقاربة و

بالتالي  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^2}$  متقاربة مطلقا وحسب النظرية فهي متقاربة.

ملاحظة(1.3.1.3): عكس النظرية السابقة غير صحيح

مثال(2.3.1.3): السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  متقاربة وليست متقاربة مطلقا.

ملاحظة(2.3.1.3): كل النظريات و مقاييس للتقارب المنصوص عليها في السلاسل ذات الحدود الموجبة تطبق على السلاسل المتقاربة مطلقا.

ملاحظة(3.3.1.3): اذا كانت السلسلة الكيفية ليست متقاربة مطلقا لتحديد طبيعتها نستخدم

مقياس ابييل

نظرية(2.3.3): (مقياس ابل)

اذا كانت السلسلة الكيفية  $\sum_{n \geq 0} U_n$  ليست متقاربة مطلقا وكانت حدودها من الشكل

$$\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n + \dots$$

(1)  $(\alpha_n)$  متتالية اعداد حقيقية موجبة و متناقصة نحو الصفر (اي  $\alpha_n \downarrow 0$   $n \rightarrow +\infty$ )

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n > m, \exists k > 0: \left| \sum_{p=m}^n \beta_p \right| \leq k \quad (2)$$

مثال (3.3.3): ادرس طبيعة (تقارب) السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  حيث  $\theta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

(الحل: 1) اذا كان  $\alpha > 1$  السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  متقاربة مطلقا فهي متقاربة

(2) واضح انه اذا كان  $\alpha \leq 1$  السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  ليست متقاربة مطلقا

(ا) اذا كان  $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  لدراسة تقارب السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  نستخدم نظرية ابل

$$\text{بوضع } \beta_n = e^{in\theta}, \lambda_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ حيث } \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \lambda_n \cdot \beta_n$$

لاحظ اولا أن  $\lambda_n = \frac{1}{n^\alpha} < \lambda_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$  اي  $(\lambda_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$

$$\text{و الشرط للمتتالية الثانية لان } \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \left| \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|$$

$$= \frac{|e^{i(n+1)\theta/2}| |e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}|}{|e^{i\theta/2}| |e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}|}$$

$$= \frac{|e^{i(n+1)\theta/2}| |2 \sin(n+1)\theta/2|}{|e^{i\theta/2}| |2 \sin \theta/2|} \leq \frac{1}{|\sin \theta/2|} = c, c \text{ ثابت}$$

ومنه حسب نظرية ابل و في حالة  $\alpha \leq 1$  السلسلة  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  متقاربة

(ب) اما اذا كان  $\alpha \leq 1$  و  $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  فالسلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  متباعدة.

خاصية (1.3.1.3): من أجل أي تبديل (تجميع) لعناصر السلسلة المتقاربة مطلقا تبقى متقاربة مطلقا و بصورة خاصة السلسلة ذات الحدود الموجبة، و بالتالي مجموع السلسلة المتقاربة مطلقا هو مجموع تبديلي و تجمعي.

$$\text{مثال مضاد (1.3.1.3): } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \dots = \ln 2$$

$$\text{لكن } \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) = \frac{\ln 2}{2}$$

اي المجموع غير تجميعي.

نظرية(3.3.1.3): حاصل جمع، باقي طرح او حاصل ضرب سلسلتين متقاربتين سلسلة متقاربة.

جداء سلسلتين متقاربتين مطلقا:

تعريف(2.3.1.3): لتكن السلسلتين  $\sum_{n \geq 0} x_n$  ،  $\sum_{n \geq 0} y_n$  و المتقاربتين مطلقا في  $C$  من خلالهما

نعرف السلسلة  $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0$  كما يلي: وهو حد عام للسلسلة المتقاربة مطلقا

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

(1) بين أن  $F(x)$  سلسلة متقاربة مطلقا

(2) أثبت أنه  $\forall (x, y) \in C^2; F(x+y) = F(x)F(y)$  وهي سلسلة متقاربة مطلقا.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

ومنه السلسلة  $F(x)$  متقاربة مطلقا

(2) جداء السلسلتين  $F(x)$  ،  $F(y)$  يعرف سلسلة الجداء

$$\begin{aligned} & 1 \times \frac{y^n}{n!} + x \times \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \times y + \frac{x^n}{n!} \times 1 = \\ & \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n! x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \\ & = \frac{(x+y)^n}{n!} = f_n(x+y) \end{aligned}$$

و هو حد عام في سلسلة متقاربة مطلقا حسب مقياس دالنبير.

### 3-1-4- السلاسل المتناوبة:

تعريف(1.4.1.3): تكون السلسلة  $\sum_{n \geq 0} x_n$  للأعداد الحقيقية متناوبة اذا كان

$$\forall n \in \mathbb{N}; x_n = (-1)^n |x_n| \text{ او } \forall n \in \mathbb{N}; x_n = (-1)^{n+1} |x_n|$$



مثال (1.4.1.3): السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  لاحظ أنه بوضع  $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  فإن  $|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$  ومنه  $x_n = (-1)^n |x_n|$  و بالتالي السلسلة المعطاة متناوبة.

نظرية لينز (1.4.1.3): لتكن  $\sum_{n \geq 0} U_n$  سلسلة متناوبة وليست متقاربة مطلقا و تحقق  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = 0$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1}| \leq |U_n|$  ، فإن السلسلة متقاربة.

مثال (2.4.1.3): واضح من المثال (1.4.1.3) أن  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  سلسلة متناوبة ليست متقاربة

مطلقا وحدودها تحقق  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  فهي متقاربة حسب

لينز

نتيجة (1.4.1.3): اذا كانت  $\sum_{n \geq 0} U_n$  سلسلة متناوبة وتحقق شرطي نظرية لينز وكان  $S$  هو

القيمة المقربة لمجموعها و  $S_n$  مجموعها الجزئي من الرتبة  $n$  فإن  $|S - S_n| \leq |U_{n+1}|$

ملاحظة (1.4.1.3): شرط التناقص للسلسلة  $\sum_{n \geq 0} |U_n|$  ليس لازما، قد تكون السلسلة المتناوبة

متقاربة و السلسلة  $\sum_{n \geq 0} |U_n|$  ليست متناقصة مثل السلسلة  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$

### 3-1-5- السلسلة نصف متقاربة:

تعريف (1.5.1.3): تكون السلسلة الكيفية  $\sum_{n \geq 0} U_n$  نصف متقاربة اذا كانت متقاربة وليست

متقاربة مطلقا

نتيجة (1.5.1.3): مما سبق نستنتج ان السلاسل المتقاربة حسب ابييل او لينز هي سلاسل نصف متقاربة.

مثال (1.5.1.3): واضح من المثال (1.4.1.3) أن  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  سلسلة متناوبة ليست متقاربة

مطلقا وهي متقاربة حسب لينز كما هو في المثال (2.4.1.3) و بالتالي فهي نصف متقاربة.

## 2.3- متتاليات الدوال- سلاسل الدوال

### 1.2.3- متتاليات الدوال:

لتكن  $H(I, IR)$  مجموعة الدوال المعرفة على  $(I \subset IR)$  و تأخذ قيمها في  $IR$  تعريف (1.1.2.3): متتالية الدوال هي التطبيق من  $N$  في المجموعة  $H(I, IR)$  الذي يرفق بكل  $n$  عدد طبيعي الدالة  $h_n$  و نرسم اليها  $(h_n)_{n \geq 0}$ .

مثال (1.1.2.3): لتكن متتالية الدوال  $(g_n)_{n \geq 1}$  المعرفة كالتالي

$$g_n: [0, \pi] \rightarrow IR \quad \text{و حدودها } x \rightarrow \sin nx/n$$

$$g_1(x) = \sin x \quad \text{و } g_2(x) = \sin 2x/2, \dots, g_n(x) = \sin nx/n.$$

ملاحظة (1.1.2.3): ينبغي ان نميز بين التقارب من أن كل نقطة  $x$  من  $I$  لمتتالية الدوال

العديدية ذات الحد العام  $h_n(x)$  و التقارب على المجال  $I$  لمتتالية الدوال  $(h_n)$ .

#### تقارب متتاليات الدوال

##### التقارب البسيط:

لتكن  $(h_n)$  متتالية الدوال من المجموعة  $H(I, IR)$

تعريف (2.1.2.3): نقول عن متتالية الدوال  $(h_n)$  انها تتقارب ببساطة نحو الدالة  $h$  من

$H(I, IR)$  اذا كان من اجل كل  $x$  من  $I$  المتتالية العددية  $(h_n(x))$  تتقارب نحو  $h(x)$  اي

انه  $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = h(x)$  او بعبارة اخرى

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = h(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in I; \exists N(x, \varepsilon),$$

$$n > N(x, \varepsilon) \rightarrow |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$$

مثال (2.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال  $(f_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بعبارة حدتها العام كما يلي

$$\forall x \in IR_+, f_n(x) = e^{-nx}$$

الحل: لدينا  $f_n(0) = 1$  و بالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$

كذلك  $\forall x \in IR_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$  و منه نستنتج أن متتالية الدوال

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si; x \neq 0 \\ 0, & si; x > 0 \end{cases}$$

$(f_n)_{n \geq 1}$  تتقارب ببساطة نحو الدالة  $f$  و المعرفة كما يلي

##### التقارب المنتظم:

تعريف (2.1.2.3): نقول عن متتالية الدوال  $(h_n)$  انها تتقارب بانتظام نحو الدالة  $h$  من

$H(I, IR)$  على المجال  $I$  اذا كان الحد الاعلى لـ  $|h_n(x) - h(x)|$  ينتهي الى الصفر عندما

$$\forall x \in I, \limsup_{n \rightarrow +\infty} |h_n(x) - h(x)| = 0, \text{ أي } I \text{ من } x \text{ كل أجل من } n \rightarrow +\infty$$

مثال (3.1.2.3): لتكن متتالية الدوال  $(f_n)$  ذات الحد العام  $f_n(x) = \sin nx/n$ ،  $n \geq 1$ ،  
تتقارب ببساطة نحو الدالة المعدومة و بالتالي

$$\forall x \in [0, \pi], \sup |f_n(x) - f(x)| = \sup |\sin nx/n| = 1/n \rightarrow 0 \text{ و منه نستنتج أن}$$

متتالية الدوال  $(f_n)$  تتقارب بانتظام نحو الدالة المعدومة على  $[0, \pi]$ .

مثال (4.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال  $(g_n)_{n \geq 0}$  بحيث  $g_n(x) = x(1-x)^n$ ،  $\forall x \in [0, 1]$   
ادرس التقاربات لمتتالية الدوال  $(g_n)_{n \geq 0}$  على المجال  $[0, 1]$

الحل: واضح أن  $g_n(0) = g_n(1) = 0$  و بالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(1) = 0$

$$\text{و إذا كان } x \in ]0, 1[ \Leftrightarrow 0 < x < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(1-x)^n = 0$$

ومنه متتالية الدوال  $(g_n)_{n \geq 0}$  تتقارب ببساطة نحو الدالة المعدومة

التقارب المنتظم: لدراسته نستعمل المشتقة لتحديد القيمة العظمى للدالة  $g_n$  أي

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/n + 1 \text{ و } \forall x \in ]0, 1[, g'_n(x) = (1-x)^{n-1} [1 - x(1+n)]$$

وبالتالي

$$\forall x \in [0, 1], \limsup_{n \rightarrow +\infty} |g_n(x) - g(x)| = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |g_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |g(1/n)|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 0 \times e = 0 \text{ و منه } (g_n)_{n \geq 0} \text{ متقاربة بانتظام على } [0, 1].$$

ملاحظة (2.1.2.3): التعاريف السابقة تدل على أن التقارب المنتظم لمتتالية الدوال يستلزم

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \text{ لان ذلك لان}$$

عكس هذه الملاحظة غير صحيح

مثال (5.1.2.3): متتالية الدوال  $(k_n)_{n \geq 0}$  حيث  $k_n(x) = x^n$ ،  $\forall x \in [0, 1]$  تتقارب ببساطة نحو

$$\text{الدالة } k(x) = \begin{cases} 0 & \text{لما } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{لما } x = 1 \end{cases} \text{ لكن } \limsup_{n \rightarrow +\infty} |k_n(x)| = 1 \text{ و بالتالي}$$

$(k_n)_{n \geq 0}$  ليست متقاربة بانتظام على  $[0, 1]$ .

متتالية الدوال و الاستمرار:

نظرية (1.1.2.3): النهاية المنتهية لمتتالية الدوال المستمرة و المتقاربة بانتظام على المجال

$$[a, b] \text{ مستمرة على } [a, b]$$

البرهان: لتكن متتالية الدوال  $(f_n)$  نفرض انها مستمرة على  $[a, b]$ ، لنبين أنها اذا كانت متقاربة بانتظام نحو الدالة  $f$ ، فان  $f$  مستمرة على  $[a, b]$

$$(x, x_0) \in [a, b]^2, |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

ليكن من التقارب المطلق للمتتالية  $(f_n)$  نستنتج انه،

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \dots \dots \dots (1) \\ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

و بما أن  $f_n$  مستمرة عند  $x_0$  يمكن ان نجد  $\alpha(\varepsilon, x_0)$  بحيث (3)  $|x - x_0| < \alpha \rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3 \dots \dots \dots$

من (1)، (2) و (3) نجد  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  اي  $f$  مستمرة على  $[a, b]$ .

مثال (6.1.2.3): من المثال (4.1.2.3) متتالية الدوال  $(g_n)$  مستمرة و متقاربة بانتظام على  $[0, 1]$  حسب النظرية السابقة نستنتج أن  $g$  مستمرة على  $[0, 1]$ .

ملاحظة (3.1.2.3): اذا كانت متتالية الدوال المستمرة تتقارب نحو دالة ليست مستمرة فإنها ليست متقاربة بانتظام

مثال (7.1.2.3): انظر المثال (5.1.2.3).

مكاملة متتالية الدوال:

نظرية (2.1.2.3): اذا كانت متتالة الدوال المستمرة  $(f_n)$  تتقارب بانتظام على المجال  $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

نحو الدالة  $f$  فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

او نكتب

البرهان: لتكن  $f$  نهاية منتظمة لمتتالية الدوال المستمرة فهي مستمرة حسب النظرية (1.1.2.3)

و بالتالي قابلة للمكاملة، اضافة لذلك يوجد  $N(\varepsilon)$  لا يتعلق بالمتغير  $x$  بحيث

$$\forall x \in [a, b], n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\int_a^b f_n(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{و منه نستنتج} \quad \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a)$$

مثال (8.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال المستمرة  $(h_n)$  بحيث

$$\forall x \in [0,1], h_n(x) = nx^n(1-x)$$

هل  $(h_n)$  تتقارب بانتظام على  $[0,1]$ ؟ - ان كانت كذلك احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(x) dx$

الحل: (1) لدينا  $h_n(0) = h_n(1) = 0$  كذلك

$$\forall x \in ]0,1[, nx^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

نحو الدالة المعدومة  $h$

$$(3) \text{ لاحظ أنه } h'(x) = n^2 x^{n-1}(1-x) - nx^n \text{ و } \forall x \in ]0,1[ \text{ و بالتالي}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x = n/n - 1$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |h_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(n/n - 1) = e^{-1} \neq 0$$

اي ان  $(h_n)$  ليست

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(x) dx \neq \int_0^1 h(x) dx = 0 \text{ و منه } [0,1] \text{ متقاربة بانتظام على}$$

الاشتقاق و متتالية الدوال:

نظرية (3.1.2.3): نعتبر  $(f_n)$  متتالية الدوال المستمرة و القابلة للاشتقاق مع الاستمرار

على المجال  $[a,b]$  و كان، (1)  $(f_n)$  تتقارب ببساطة نحو الدالة  $f$

(2) متتالية الدوال المشتقة  $(f'_n)$  تتقارب بانتظام نحو الدالة  $g$  على  $]a,b[$

فان  $(f_n)$  تتقارب بانتظام نحو الدالة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $]a,b[$  و

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \right| \text{ او بعبارة اخرى } \forall x \in ]a,b[, f'(x) = g(x)$$

مثال (10.1.2.3): لتكن متتالية الدوال  $(f_n)$  بحيث  $f_n : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in ]-1,1[, f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}} \text{ لكن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = |x|$$

واضح أن  $(f'_n)$  تتقارب على  $] -1,1[$  نحو الدالة  $g$  حيث  $g(x) = x/|x|$  غير معرفة عند الصفر فهي

تختلف مشتق الدالة  $f$  اي  $f'(x) \neq g(x)$  و بالتالي  $(f_n)$  ليست متقاربة بانتظام.

### 3-2-2 - سلاسل الدوال

لتكن متتالية الدوال ذات الحد العام  $f_n : ]a, b[ \rightarrow IR$  يمكن  $(a = -\infty, b = +\infty)$  والتكن السلسلة

$$S_0(x) = f_0(x)$$

$$S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

نسمي  $D$  مجموعة الاعداد  $x$  من  $]a, b[$  بحيث تكون السلسلة العددية  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  متقاربة

وهي مجال تعريف دالة المجموع  $F$  و نكتب  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  ،  $\forall x \in D$  ،  
أو نكتب  $S_n(x) \rightarrow F(x)$  لما  $n \rightarrow +\infty$  .

**تقارب سلاسل الدوال:**

التقارب البسيط:

تعريف(1.2.2.3): نقول سلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  أنها تتقارب ببساطة نحو دالة مجموعها  $F$  على

المجال  $] \alpha, \beta [ \supset D$  إذا كانت السلسلة العددية  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  متقاربة من أجل كل  $x$  من  $] \alpha, \beta [$

أي أن  $S_n(x)$  تتقارب نحو  $F(x)$

مثال(1.2.2.3): في المجال  $[0,1]$  سلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  بحيث

$$\forall n \in IN, \forall x \in [0,1]; f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

لاحظ أن السلسلتين  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1)$  ،  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0)$  متقاربتين

$$\forall x \in ]0,1[, \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|x^{n+1} - x^{n+2}|}{|x^n - x^{n+1}|} = |x| < 1$$

ومنه سلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  تتقارب ببساطة على المجال  $[0,1]$  .

## التقارب المنتظم:

تعريف(2.2.2.3): نقول عن سلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  أنها تتقارب بانتظام نحو دالة مجموعها  $F$

على المجال  $]\alpha, \beta[$  يعني  $D \supset ]\alpha, \beta[$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); \forall n > m \geq N(\varepsilon) \rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f_m(x) + f_{m+1}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$$

مثال(2.2.2.3): ادرس التقارب المنتظم لسلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$  حيث

$$\forall x \in [0,1]; g_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

لبنز، من جهة اخرى إذا كان  $R_n(x)$  باقي هذه السلسلة لدينا

$$\forall x \in [0,1]; |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \rightarrow 0$$

ومنه نستنتج أن  $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$  تتقارب بانتظام على المجال  $[0,1]$ .

شرط كافي للتقارب المنتظم (التقارب النظيمي):

تعريف(3.2.2.3): نقول عن سلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  أنها تتقارب نظيميا على المجال  $]\alpha, \beta[$

عندما توجد سلسلة عددية ذات حدود موجبة متقاربة  $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$  بحيث

$$\forall x \in ]\alpha, \beta[, |f_n(x)| \leq V_n$$

نظرية(1.2.2.3)(نظرية ديني): إذا كانت سلسلة الدوال ذات الحد العام  $f_n$  متقاربة نظيميا على  $]\alpha, \beta[$  فإنها تتقارب بانتظام عليه.

نظرية(2.2.2.3): إذا كانت سلسلة الدوال المحدودة  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  متقاربة مطلقا على  $I$  فإنها تقبل

سلسلة حادة من الاعلى تحقق  $\forall x \in I, \exists V_n > 0; |f_n(x)| \leq V_n$  أي أنها متقاربة نظيميا.

مثال(3.2.2.3): لتكن الدالة العددية  $f_n$  المعرفة كالتالي:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}; x \rightarrow \sin nx/n^2$

واضح أنه  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = 1/n^2$  وأن  $1/n^2$  يمثل حد عام لسلسلة عددية متقاربة و بالتالي حسب النظرية(2.2.2.3) السلسلة المعطاة متقاربة نظيميا و منه فهي متقاربة بانتظام على  $\mathbb{R}$ .

سلاسل الدوال و الاستمرار:

نظرية(3.2.2.3): في الفضاء النظيمي المعرف على  $I(I \subset IR)$  إذا كانت سلسلة الدوال

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

مستمرة و محدودة على  $I$  فإنها تتقارب بانتظام نحو دالة مجموعها  $F$  المستمرة على  $I$ .

مثال(4.2.2.3): نعتبر سلسلة الدوال  $g_n$  بحيث  $\forall x \in [0,1], g_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$

بين أن دالة المجموع  $G$  لهذه السلسلة مستمرة

(الحل: 1) إذا كان  $x = 0$  لدينا  $g_n(0) = 0$  و بالتالي  $\sum_{n \geq 1} g_n(0)$  متقاربة

(2) إذا كان  $\forall x \in ]0,1[, |g_n(x)| \leq \frac{nx^2}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$  ، يمثل حد عام لسلسلة متقاربة و

بالتالي سلسلة الدوال متقاربة نظيميا على  $[0,1]$  و منه السلسلة متقاربة بانتظام على  $[0,1]$  و

بما أن الدوال  $g_n$  مستمرة على  $[0,1]$  حسب النظرية(3.2.2.3) دالة المجموع  $G$  مستمرة

على  $[0,1]$ .

تكامل سلاسل الدوال:

نظرية(4.2.2.3): إذا كانت سلسلة دوال مستمرة و متقاربة بانتظام على

$$\mathfrak{R} \supset [a,b]$$

نحو دالة مجموعها  $G$  المستمرة على  $[a,b]$  فإنه توجد سلسلة دوال  $k_n$   $\sum_{n \geq 0}$

معرفة على  $[a,b]$  كالتالي:  $k_n(x) = \int_a^x g_n(t) dt$   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$  تتقارب

بانتظام على  $[a,b]$  نحو الدالة  $K(x) = \int_a^x G(t) dt$  و لدينا كذلك

$$\sum_{n \geq 1} \int_a^x g_n(t) dt = \sum_{n \geq 1} k_n(x) = \int_a^x \left( \sum_{n \geq 1} g_n(t) \right) dt$$

(تكامل السلسلة=سلسلة التكاملات)

مثال(5.2.2.3): استخدم تكامل السلاسل لحساب المجموع  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n / (3n + 1)$

الحل: نعرف سلسلة الدوال بسلسلة صورها  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{3n}$  على المجال  $[0,1]$  وهي متقاربة

بانتظام عليه و بالتالي حسب النظرية لدينا من جهة



$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{3n} \text{ من جهة اخرى } \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{3n} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

يمثل نشر معمم في جوار الصفر للدالة  $1/1+x^3$  و  $x \rightarrow 1$  منه

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

سلاسل الدوال و الاشتقاق:

نعتبر في المجال  $I = ]a, b[$  سلسلة الدوال  $\sum_{n \geq 0} f_n$  و القابلة للاشتقاق مع

الاستمرار (محدودة) أي من الصنف  $C^1(I, IR)$ ، وبفرض أن  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  متقاربة بانتظام

نحو الدالة  $G$  على  $I$  فإنه حسب متتالية الدوال و الاشتقاق و من أجل كل  $x_0$  من  $I$  السلسلة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I; h(x) = \sum_{n \geq 0} h_n \text{ و المعرفة بـ: } h(x) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

متقاربة بانتظام (نظيميا) على  $I$  نحو الدالة  $H(x) = \int_{x_0}^x G(t) dt$

نظرية (5.2.2.3): لتكن الدوال  $f_n$  من المجال  $I (I \subset IR)$  في  $E (E = IR)$  او

$E = C$  عناصر سلسلة الدوال من الصنف  $C^1(I, IR)$ ، و لدينا

$$(1) \sum_{n \geq 0} f'_n \text{ سلسلة متقاربة بانتظام (نظيميا) على } I \text{ نحو الدالة } G$$

(2) توجد على الاقل  $x_0$  من  $I$  بحيث  $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$  تتقارب ببساطة نحو العدد  $\mu$

فإن سلسلة الدوال  $\sum_{n \geq 0} f_n$  تتقارب بانتظام (نظيميا) على  $I$  نحو الدالة

$$\sum_{n \geq 0} f'_n(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n \geq 0} f_n(x) \right) \text{ و المساواة صحيحة } x \rightarrow \mu + \int_{x_0}^x G(t) dt$$

مثال (6.2.2.3): نعتبر سلسلة الدوال  $\sum_{n \geq 0} f_n$  المعرفة بعبارة الحد العام للسلسلة العددية

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (n+1)x^n e^{inx}$$

ادرس تقارب هذه السلسلة.

الحل: (1) إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| \neq 0$  و  $|x| \geq 1$  و منه السلسلة  $\sum_{n \geq 0} f_n$  متباعدة

(2) إذا كان  $|x| < 1$  حسب دالنبير  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} < 1$  فهي متقاربة على  $D \supset ]-1,1[$  كذلك

$$\sup_{x \in ]-a,a[} |f_n(x)| = (n+1)a^n \rightarrow 0 \quad \text{و بالتالي نستنتج أن سلسلة}$$

الدوال متقاربة بانتظام على  $D$ .

نعتبر سلسلة الدوال  $\sum_{n \geq 0} k_n$  حيث  $k_n(x) = (xe^{ix})^{n+1}$  واضح أن

$$\forall x \in D, k'_n(x) = (1+ix)e^{ix} f_n(x) \quad \text{و التكن } K \text{ دالة المجموع للسلسلة } \sum_{n \geq 0} k_n$$

$$\text{على } D, \text{ من أجل } x=0, \sum_{n \geq 0} k_n(0) \text{ تتقارب ببساطة نحو } K(0)$$

كذلك لتكن  $F$  دالة المجموع للسلسلة  $\sum_{n \geq 0} f_n$  حسب النظرية  $K'(x) = \alpha(x)F(x)$  حيث

$$\text{الدالة } \alpha \text{ تتعلق بـ } x \text{ فقط، مما سبق نستنتج أن } K(x) = \frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}} \text{ و بالتالي}$$

$$K'(x) = \frac{(1+ix)e^{ix}}{(1-xe^{ix})^2} \quad \text{نأخذ } \alpha(x) = (1+ix)e^{ix} \text{ ومنه نستنتج أن}$$

$$F(x) = 1/(1-xe^{ix})^2 \text{ وهي صورة دالة المجموع لسلسلة الدوال } \sum_{n \geq 0} f_n.$$

### 3-3- السلاسل الصحيحة (المتغير حقيقي):

تعريف(1.3.3): نسمي سلسلة صحيحة لمتغير حقيقي  $x$  السلسلة التي حدها العام

$$U_n(x) = a_n(x - x_0)^n, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 \text{ قيمة ثابتة وتكتب بالعبرة}$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + \dots$$

و اليكن  $S_n(x)$  مجموعها الجزئي من الرتبة  $n$  و بالتالي السلسلة الصحيحة تمثل كثير حدود معمم للمتغير  $x$ .

مثال(1.3.3) السلسلة الهندسية  $\sum_{n \geq 0} x^n$  ذات الاساس  $x$  هي سلسلة صحيحة مجموعها

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \text{ حيث } S_n(x) \text{ الجزئي}$$

$$\text{و الذي له النهاية المحدودة } S(x) = \frac{1}{1 - x} \text{ من أجل } |x| < 1$$

هذا المثال يوضح أن دالة المجموع لهذه السلسلة في حالة التقارب هي دالة للمتغير  $x$  و منه نستنتج أن المطلوب هو تحديد مجموعة قيم  $x$  التي من أجلها تكون السلسلة متقاربة ثم ندرس خواص دالة المجموع.

#### مجال تقارب السلاسل الصحيحة:

لتبسيط الدراسة ندرس السلاسل الصحيحة من الشكل  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  و سلسلة القيم المطلقة

$$\sum_{n \geq 0} |a_n x^n|$$

نظرية(1.3.3)(نظرية ابيل): إذا كانت السلسلة الصحيحة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  متقاربة من أجل  $x_0$

فهي متقاربة مطلقا من أجل كل  $x$  يحقق  $|x| \leq |x_0|$

البرهان: ليكن العدد الحقيقي  $x_0$  بحيث تكون  $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$  متقاربة فإن  $a_n x_0^n \rightarrow 0$  و بالتالي

$$|x| < |x_0| \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right| < k \left| \frac{x}{x_0} \right| \text{ حيث } \exists k > 0, \text{ و اليكن } x \text{ بحيث}$$

$$\sum_{n \geq 0} |a_n x^n| \text{ ومنه السلسلة } \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \text{ لكن}$$

محدودة من الاعلى بسلسلة متقاربة فهي متقاربة و بالتالي متقاربة مطلقا من أجل  $|x| < |x_0|$

لتكن  $E$  مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة  $r$  بحيث  $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$  تكون متقاربة مما سبق ، إذا

كان  $r_0 \in E$  فإن  $[0, r_0] \subset E$  أي  $E$  غير خالية نميز حالتين

(1) المجموعة  $E$  تقبل عنصر حاد من الاعلى  $R$  تكون السلسلة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  متقاربة مطلقا

إذا كان  $|x| < R$  و تكون متباعدة إذا كان  $|x| > R$ ، نسمي  $R$  نصف قطر التقارب كما

يسمى  $]-R, R[$  مجال التقارب عندما  $R = 0$  السلسلة متقاربة من أجل  $x = 0$

(2) إذا كانت المجموعة  $E$  عنصر حاد من الاعلى فإن السلسلة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  متقاربة مطلقا من

أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  و مجال تقاربها غير محدود.

الطريقة العملية لإيجاد نصف قطر التقارب

بتطبيق مقياسي دالنبير أو كوشي على السلاسل المتقاربة مطلقا أي

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ حيث } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = l|x| \text{ و حسب شرط}$$

دالنبير السلسلة  $\sum_{n \geq 0} |a_n x^n|$  متقاربة إذا كان  $|x| < 1/l \Rightarrow |x| < 1$

و متباعدة إذا كان  $|x| > 1/l$  ومنه نضع  $R = 1/l$  (في حالة  $l = 0 \Rightarrow R = +\infty$ )

وبنفس الطريقة في حالة استخدام مقياس كوشي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = l|x|$  و  $R = 1/l$

ملاحظة(1.3.3): في حالة  $|x| = R$  أي عند حدود مجال التقارب تدرس كل حالة بمفردها

مثال(2.3.3): حدد نصف قطر التقارب و طبيعة كل سلسلة من السلاسل التالية عند حدود

مجال تقاربها إن أمكن:

$$\sum_{n \geq 1} n^{2n} x^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

الحل: (1) حسب مقياس دالنبير

$$l = 1 \Rightarrow R = 1 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \times |x|$$

طبيعة السلسلة على اطراف مجال تقاربها

من أجل  $x = -1$  ، السلسلة  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / n$  هي سلسلة توافقية متقاربة حسب لينز

من أجل  $x = 1$  ، السلسلة  $\sum_{n \geq 1} 1/n$  هي سلسلة متباعدة

(2) بنفس الطريقة السلسلة الثانية حسب مقياس النسبة

$$l = 0 \Rightarrow R = +\infty \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \times |x|$$

(3) لتعيين نصف قطر التقارب للسلسلة الثالثة نستعمل مقياس كوشي

$$. l = +\infty \Rightarrow R = 0 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{2n} |x|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 |x| = +\infty \times |x|$$

**العمليات الجبرية و نصف قطر التقارب**

نظرية(2.3.3): لتكن  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  ،  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$  سلسلتين للمتغير الحقيقي  $x$  و ليكن  $R_1, R_2$

نصفي قطريهما على الترتيب فإن  $R \geq \inf(R_1, R_2)$  يمثل نصف قطر التقارب للسلسلتين

$$. \forall x, |x| < R; \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n , \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

**التقارب المنتظم و الاستمرار**

دراسة التقارب على مجال مفتوح

نظرية(3.3.3): السلسلة الصحيحة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  ذات نصف قطر التقارب  $R$  تتقارب بانتظام

(نظيميا) على كل مجال مفتوح محتوي في  $D_R$  ( $D_R$  مجال تقاربها).

نظرية(4.3.3): دالة المجموع  $F$  للسلسلة الصحيحة للمتغير الحقيقي  $x$  ذات نصف قطر

التقارب  $R$  مستمرة على المجال المفتوح  $] -R, R[$

مثال(3.3.3): نعتبر السلسلة الصحيحة التالية:  $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$  بين أنها متقاربة بانتظام على

$] -R, R[$  و أن دالة مجموعها مستمرة عليه

الحل: السلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على  $] -1, 1[$  و دالة مجموعها

$x \rightarrow (x-1)\ln(1-x) + x$  مستمرة عليه.

**التقارب عند اطراف المجال**

السلسلة الصحيحة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  ذات نصف قطر التقارب  $R$  متقاربة بانتظام على المجال المفتوح

$] -R, R[$  و السلسلة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  المتناوبة متقاربة حسب لينز نت أجل كل  $x$  من  $] -R, R[$  و

بالتالي  $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$  حسب لينز  $\forall x \in [-R, R]$ ,  $\left| \sum_{k \geq 0} a_k x^k \right| \leq |a_{n+1}| |x|^{n+1} \leq |a_{n+1}| R^{n+1}$  متقاربة.

مثال (4.3.3): من المثال (3.3.3)  $R = 1$  و بالتالي السلسلتين  $\sum_{n \geq 2} \frac{(1)^n}{n(n-1)}$ ,  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

متقاربتين أي السلسلة  $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$  متقاربة عند اطراف المجال.

### 3-3-2- تكامل سلسلة صحيحة (المتغير حقيقي)

نظرية (5.3.3): لتكن  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  سلسلة صحيحة للمتغير الحقيقي  $x$  و نصف القطر  $R (R > 0)$  فإنه

$$\forall x \in \mathfrak{R}, 0 < |x| < R; \int_0^x \left( \sum_{n \geq 0} a_n t^n \right) dt = \sum_{n \geq 0} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} / n + 1$$

نظرية (6.3.3): للسلسلة الصحيحة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  و السلسلة الصحيحة الناتجة عن مكاملتها نفس

نصف قطر التقارب  $R (R > 0)$ .

$$\forall x \in ]-1, 1], \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{مثال (5.3.3): بين أنه}$$

الحل:  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$  سلسلة صحيحة ونصف قطر تقاربها  $R = 1$  ودالة مجموعها على

المجال  $]-1, 1[$  هي  $\frac{1}{x+1}$   $x \rightarrow$  بالمكاملة نجد

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وباستبدال  $n$  بـ  $n-1$  يكون لدينا  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$   $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\ln(1+x) =$

من جهة اخرى لما  $x = 1$  السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  متقاربة حسب لينز و بالتالي

$$\forall x \in ]-1, 1], \ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n / n .$$

ملاحظة(2.3.3): للسلسلة الصحيحة و السلسلة الصحيحة الناتجة عن مكاملتها نفس مجال التقارب، لكن قد تكونا من طبيعتين مختلفتين عند أطرافه.

مثال(6.3.3): السلسلتين  $\sum_{n \geq 1} x^n/n^2$  ،  $\sum_{n \geq 1} x^{n-1}/n$  لهما نفس مجال التقارب  $]-1,1[$  لكن

من أجل  $x = 1$  لاحظ أن  $\sum_{n \geq 1} 1/n$  متباعدة ،  $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$  متقاربة.

### 3-3-3- اشتقاق سلسلة صحيحة (لمتغير حقيقي)

تعريف(2.3.3): لتكن  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  سلسلة صحيحة للمتغير الحقيقي  $x$  ، نسمي

السلسلة المشتقة الأولى وإذا وجد عدد طبيعي  $p (p \geq 1)$  نسمي السلسلة

$\sum_{n \geq p} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p}$  (باستبدال  $n-p$  بـ  $n$  نحصل على السلسلة

$\sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_n x^n$  بالسلسلة المشتقة من الرتبة  $p$  للسلسلة المعطاة.

نظرية(7.3.3): للسلسلة الصحيحة والسلسلة الصحيحة المشتقة عنها نفس نصف قطر التقارب  $R (R > 0)$ .

نظرية(8.3.3): اذا كانت  $F$  دالة المجموعة للسلسلة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  للمتغير الحقيقي  $x$  و نصف

قطر التقارب  $R (R > 0)$  وكانت  $F_p$  دالة المجموع للسلسلة المشتقة من الرتبة

$p (p \in \mathbb{N}^*)$  فإنه  $F_p(x) = F^{(p)}(x)$  حيث  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]-R, R[$

تمثل الدالة المشتقة من الرتبة  $p$  للدالة  $F$

وكذلك  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]-R, R[; \sum_{n \geq p} \frac{d^p}{dx^p} (a_n x^n) = \frac{d^p}{dx^p} \left( \sum_{n \geq p} a_n x^n \right)$

مثال(7.3.3): نعتبر السلسلة الصحيحة التالية  $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

(1 عين نصف قطر التقارب، 2) جد السلسلتين المشتقتين الاولى والثانية

(3) جد دالة المجموع للسلسلة المشتقة الثانية، 4) استنتج دالة المجموع للسلسلة المعطاة

الحل: (1) حسب مقياس النسبة  $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{n(n-1)} = 1$

(2) السلسلة الصحيحة متقاربة بانتظام على كل مجال مغلق محتوى في  $]-1,1[$  و بالتالي

$$\left( \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} \right)' = \sum_{n \geq 2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)} \quad \text{لدينا (8.3.3) حسب النظرية}$$

السلسلة الناتجة أيضا متقاربة بانتظام على كل مجال مغلق محتوى في  $]-1,1[$  و

$$\text{بالتالي } \sum_{n \geq 2} x^{n-2} = \left( \sum_{n \geq 2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)} \right)' \quad \text{و باستبدال } n-2 \text{ بـ } n \text{ تكون السلسلة}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad \text{هي الدالة } \sum_{n \geq 0} x^n \quad \text{نعلم بأن دالة المجموع للسلسلة } \sum_{n \geq 0} x^n = \sum_{n \geq 2} x^{n-2} \quad (3)$$

(4) ، بالمكاملة مرتين للدالة المحصل عليها نستنتج الدالة  $x \rightarrow (1-x)\ln(1-x) + x$  و التي تمثل دالة المجموع للسلسلة المعطاة.

### 3-3-4- النشر الى سلسلة صحيحة

الدوال القابلة للنشر:

تعريف(3.3.3): نقول عن الدالة  $f : IR \rightarrow IR$  أنها قابلة للنشر إلى سلسلة

صحيحة في جوار الصفر(المبدأ) إذا فقط إذا وجدت سلسلة صحيحة  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  ذات

نصف قطر  $R (R \geq 0)$  و جوار  $U$  للصفر بحيث

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n .$$

مثال(8.3.3):  $f : IR \rightarrow IR$  دالة قابلة للنشر في جوار الصفر الى سلسلة

$$\forall x \in IR, |x| < 1; 1/(1-x) = \sum_{n \geq 0} x^n \quad \text{صحيحة و}$$

نظرية(9.3.3): إذا كانت  $f : IR \rightarrow IR$  قابلة للنشر في جواره فإن  $f \in C^\infty(U(0))$  و

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{هي السلسلة}$$

نظرية(10.3.3): تعطى  $f : IR \rightarrow IR$  بحيث  $f \in C^\infty(U(a)), a \in IR$

حيث  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n (x-a)^n$  السلسلة الصحيحة  $f \in C^\infty(U(a)), a \in IR_+$

$\alpha_n = f^{(n)}(a)/n!$  نشر تايلور للدلة  $f$  في جوار النقطة  $a$  ، في حالة  $a = 0$  نسمي

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{سلسلة ماكلوران للدلة } f$$



نظرية(11.3.3): إذا كانت  $f : IR \rightarrow IR$  قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار 0 (جوار  $a$ ) فإن هذا النشر وحيد.

النشر باستعمال شكل ماكلوران:

لتكن  $f : IR \rightarrow IR$  من الصنف  $C^\infty ]-a, a[$ ,  $a \in IR_+$  قابلة إلى النشر إلى سلسلة ماكلوران بباقي ( $R_n(x) \neq 0$ )

باستعمال متباينة تليور-لاقرانج

لدينا باقي لاقرانج  $\forall n \in N^*, \forall x \in V(0); R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  و

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t \in [0, x]} |f^{(n)}(t)| \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \|f^{(n)}(t)\|_\infty$$
 بالتالي

حسب التعريف لكي تكون  $f$  قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار 0 يجب أن يوجد عدد

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \subset V(0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0 \text{ بحيث } \alpha > 0$$

هذا الشرط يحقق وجود  $M > 0$  بحيث  $\forall t \in ]-\alpha, \alpha[; |f^{(n)}(t)| \leq M$

وبالتالي  $\forall x \in ]-\alpha, \alpha[; |R_n(x)| \leq M \frac{\alpha^n}{n!}$  ، العدد  $M \frac{\alpha^n}{n!}$  يمثل حد عام في سلسلة

متقاربة حسب دالنبير ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0$ .

باستعمال شكل تليور بباقي تكاملي

لدينا  $\forall n \in N^*, \forall x \in V(0); f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \text{ أي}$$

و لكي تكون  $f$  قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار 0 يجب أن يوجد  $\alpha > 0$  بحيث

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = 0$$

تطبيقات:

$$(1) f(x) = e^x \text{ نعلم بأنه}$$

$$\forall n \in IN, \forall x \in IR; f^{(n)}(x) = e^x \leq e^R, R > 0, |x| < R$$

$$\frac{|x|^n}{n!} e^x \text{ يمثل حد عام في } |R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^x dx \right| < \frac{|x|^n}{n!} e^x$$

سلسلة عددية ذات حدود موجبة وهي متقاربة حسب مقياس دالبير و بالتالي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \text{ أي أنه يمكن نشر الدالة } f \text{ على شكل سلسلة صحيحة في جوار}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty) \text{ الصفر تسمى سلسلة ماكلوران ونكتب}$$

$$g(x) = \cos x \text{ كذلك يمكن التحقق من أنه}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; \cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2) \Rightarrow |\cos^{(n)} x| \leq 1$$

$$\text{و بالتالي } |R_n(x)| \leq \frac{R^n}{n!} \text{ أي محدود بحد عام لسلسلة متقاربة، و منه}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty) \text{ و بالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

بنفس الطريقة يمكن نشر الدالة  $h(x) = \sin x$  إلى سلسلة ماكلوران أي

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

(3) الدوال الزائدية: الدالتين  $ch(x), shx$  من الصنف  $C^\infty(\mathbb{R}^*)$  و  $C^\infty(\mathbb{R})$  على

الترتيب و بالتالي النشر غير المنتهي لماكلوران لكل منهما هو على الترتيب

$$shx = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty), \quad chx = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

(4) الدوال من الشكل:  $k(x) = (1+x)^\alpha; \alpha \in \mathbb{Q}$  من الصنف  $C^\infty(I)$  حيث

$$\forall x \in I = ]-1, +\infty[, k^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

و بالتالي سلسلة ماكلوران المرفقة بالدالة  $k$  هي

$$(R=1)$$

$$k(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^{\alpha-n}$$

مثال(9.3.3): نشر ماكلوران للدالة  $x \rightarrow \sqrt[3]{1+x}$  هو

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{5}{27}x^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/3(-2/3)\dots(1/3-n+1)}{n!} x^{1/3-n}$$

### 3-3-5- طرق اخرى للنشر على شكل سلسلة صحيحة

مكاملة نشر معلوم:

بتطبيق النظريات حول السلاسل و التكامل لدينا الأمثلة

$$\text{نعلم بأنه } \forall x \in ]-1,1[; \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n \quad (R=1)$$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد

$$\forall x \in [-1,1[; \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (R=1)$$

و باستبدال  $(-x)$  ب  $x$

$$\forall x \in ]-1,1[; \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (R=1)$$

نتحصل على النشر

$$\forall x \in ]-1,1[; \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (R=1)$$

كذلك باستبدال  $(-x^2)$  ب  $x$  نجد

$$\forall x \in ]-1,1[; \text{Arctg}x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد

$$\forall x \in ]-1,1[; \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x^{2n} \quad (R=1)$$

كذلك باستبدال  $(x^2)$  ب  $x$  نجد

$$\forall x \in ]-1,1[; \text{Argth}x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد

اشتقاق نشر معلوم:

بتطبيق النظريات على النشر و الاشتقاق لدينا

$$\text{مثال (3.3.9): جد دالة المجموع للسلسلة } \sum_{n=1}^{n=+\infty} n(n+1)x^n \quad (R=1)$$

$$x \sum_{n=1}^{n=+\infty} n(n+1)x^{n-1} \quad (R=1)$$

الشكل على الشكل

وباستبدال  $n-1$  ب  $n$  نجد

$$x \sum_{n=1}^{n=+\infty} n(n+1)x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \quad (R=1)$$

كذلك لاحظ أن السلسلة

( $R=1$ )  $\sum_{n=2}^{n=+\infty} n(n-1)x^{n-2}$  تمثل السلسلة المشتقة الثانية للسلسلة  $\sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n$  و التي دالة

مجموعها  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$  ، اذن لإيجاد دالة المجموع للسلسلة المعطاة يكفي أن نشق الدالة

السابقة مرتين في المجال  $]-1,1[$  ثم نضرب في  $x$  فنحصل على الدالة

$$x \rightarrow \frac{2x}{(1-x)^3} \text{ وهو المطلوب.}$$

### 3-4-4- سلاسل فوري

#### 3-4-1- تذكير:

تعريف(1.4.3):  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي  $x$  معرفة و مستمرة على المجال

$J = [-a, a], a > 0$  تكون الدالة  $f$  زوجية على  $J$  إذا وفقط إذا تحقق

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \int_{-\pi}^0 \cos x dx + \int_0^{\pi} \cos x dx \quad \text{مثال(1.4.3): واضح أن}$$

$$= \int_{\pi}^0 \cos(-x)d(-x) + \int_0^{\pi} \cos x dx = 2 \int_0^{\pi} \cos x dx$$

تعريف(2.4.3):  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي  $x$  معرفة و مستمرة على المجال

$J = [-a, a], a > 0$  تكون الدالة  $f$  فردية على  $J$  إذا وفقط إذا تحقق  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \quad \text{مثال(2.4.3): لاحظ أن}$$

$$= \int_{\pi}^0 \sin(x)dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = 0$$

تعريف(3.4.3):  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي  $x$  معرفة و مستمرة على المجال  $I = [a, b]$

تكون الدالة  $f$  دورية على  $I$  ودورها  $T$  إذا وفقط إذا تحقق

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$

مثال(3.4.3): لاحظ أن الدالة  $x \rightarrow \sin x$  دالة دورية و دورها  $2\pi$  و بالتالي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

#### السلاسل الدورية

تعريف(4.4.3): نسمي سلسلة دورية (مثلثية) السلسلة ذات الحدود الحقيقية من الشكل

متتاليتين  $(a_n), (b_n)$ ،  $\omega \in \mathbb{R}^*_+$  حيث  $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega n t + b_n \sin \omega n t)$   
عدديتين، وحدها العام  $U_n(x) = a_n \cos \omega n t + b_n \sin \omega n t, n \in \mathbb{N}$  هو دالة للمتغير  
الحقيقي  $x$  مستمرة، قابلة للاشتقاق و دورية و دورها  $T_n = 2\pi/\omega n$ . في حالة تقارب هذه  
السلسلة فإن دالة مجموعها هي دالة دورية و دورها  $T = 2\pi/\omega$ .

ملاحظة(1.4.3): من التعريف(4.4.3) لدينا المتباينة التالية  $|U_n(x)| < |a_n| + |b_n|$

البرهان: يكفي أن نكتب  $\cos, \sin$  باستخدام صيغة أولر أي

$$\cos \omega n x = \frac{e^{i\omega n x} + e^{-i\omega n x}}{2} \Rightarrow |\cos \omega n x| \leq \frac{|e^{i\omega n x}| + |e^{-i\omega n x}|}{2} \leq 1$$

$$\sin \omega n x = \frac{e^{i\omega n x} - e^{-i\omega n x}}{2i} \Rightarrow |\sin \omega n x| \leq \frac{|e^{i\omega n x}| + |e^{-i\omega n x}|}{2} \leq 1$$

ومنه نستنتج أن  $|U_n(x)| < |a_n| + |b_n|$ .

مثال(3.4.3): لتكن  $f$  دالة عددية معرفة كما يلي  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  و  $a_0 = 1 - e^{-1}$

$$|f_n(x)| < \frac{2(1 - e^{-1})(1 + 2n\pi)}{1 + 4n^2\pi^2} \Leftarrow b_n = \frac{4n\pi(1 - e^{-1})}{1 + 4n^2\pi^2}, a_n = \frac{2(1 - e^{-1})}{1 + 4n^2\pi^2}$$

### 3-4-2- سلسلة فوري

تعريف(4.4.3): لتكن  $f$  دالة حقيقية دورية و دورها  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ،  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ، قابلة لمكاملة

على مجال  $I$  طوله الدور  $T$  نسمي سلسلة فوري المرفقة بالدالة  $f$  السلسلة الدورية

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega n x + b_n \sin \omega n x)$$

حيث  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}^*$  تسمى

معاملات فوري

حساب معاملات فوري:

نفرض أن السلسلة قابلة للمكاملة حدا بحد على المجال  $[0, 2\pi/\omega]$ ،  $\omega \in \mathbb{R}^*$  و بالتالي:

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) dx = \int_0^{2\pi/\omega} a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi/\omega} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x] dx$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x] dx = \left[ a_n \frac{\sin n\omega x}{n\omega} - b_n \frac{\cos n\omega x}{n\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

ومنه  $a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) dx$  ، كذلك النسبة لحساب  $a_n$  ،  $b_n$

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin p\omega x dx \quad \text{و} \quad \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos p\omega x dx \quad \text{نحسب التكاملين}$$

لدينا  $\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos p\omega x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi/\omega} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x] \cos p\omega x dx$  ، إذا كان

$$\begin{aligned} p \neq n, \int_0^{2\pi/\omega} \cos n\omega x \cos p\omega x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} [\cos(n+p)\omega x + \cos(n-p)\omega x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n+p)\omega x}{(n+p)\omega} + \frac{\sin(n-p)\omega x}{(n-p)\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 n\omega x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (1 + \cos n\omega x) dx = \frac{\pi}{\omega} \quad \text{و إذا كان } n = p \text{ فإن}$$

كذلك إذا كان  $n \neq p$  فإن

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin n\omega x \cos p\omega x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} [\sin(n+p)\omega x + \sin(n-p)\omega x] dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin n\omega x \cos p\omega x dx = \left[ \frac{\sin^2 n\omega x}{2n\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} = 0 \quad \text{و إذا كان } n = p \text{ فإن}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos p\omega x dx = \frac{\pi}{\omega} a_n \quad \text{مما سبق نستنتج أن و منه}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos p\omega x dx$$

بنفس الطريقة يمكن تبسيط التكامل

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin p\omega x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi/\omega} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x] \sin p\omega x dx$$

و بطريقة

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin p\omega x dx = \frac{\pi}{\omega} b_n \text{ نجد } n = p \text{ حالة وفي مماثلة ومنه}$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin p\omega x dx \text{ مثال (4.4.3): لتكن } f \text{ دالة حقيقية دورية و دورها } 2\pi,$$

قابلة لمكاملة على المجال  $[0, \pi]$

حيث  $f(x) = 2x$  ، - احسب معاملات فوري ثم استنتج سلسلة فوري الموقفة بهذه الدالة

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} [x^2/2]_0^{\pi} = \pi/2 \text{ باستعمال النتائج السابقة فإن}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[ \left[ \frac{x \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \text{ و}$$

$$= \frac{2}{\pi n} [\cos nx/n]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -4/\pi n^2, n=2k+1 \\ 0, n=2k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi n} \left[ -[x \cos nx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \text{ كذلك}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \left[ 2 \frac{\sin nx}{\pi n^2} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 2/\pi n, n=2k+1 \\ -2/\pi n, n=2k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ومنه سلسلة المرفقة بهذه الدالة هي

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \cos nx + \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin nx \right)$$

ملاحظة (2.4.3): اذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال محدود  $[a, b]$  . لكي تكون قابلة للنشر الى سلسلة فوري من الضروري تمديدها الى دالة دورية.

و التكن إذن  $g$  الدالة ذات الدور  $T = b - a$  و المطابقة للدالة  $f$  على المجال  $[a, b]$  أي

$$\begin{cases} g(x) = f(x), x \in [a, b] \\ g(x+T) = g(x) \end{cases} \text{ و التالي } g \text{ تحقق النشر الى سلسلة فوري ذات الحد العام } U_n(x) \text{ من أجل}$$



الدور  $T/n$  حيث  $U_n(x) = a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x$ ، بوضع  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ومن أجل

$$g(x) = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega n x + b_n \sin \omega n x) \quad \text{لدينا } x \in ]a, b[$$

ملاحظة (3.4.3): إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  طوله الدور  $T$  فإنه يمكن صياغة

$$b_n = \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin \omega n x dx \quad \text{معاملات فوري على الشكل التالي:}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_I f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos \omega n x dx$$

حالات خاصة

لتكن  $f$  دالة حقيقية دورية و دورها  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , قابلة للمكاملة على مجال  $I$  طوله

الدور  $T$  و اليكن  $[-T/2, T/2]$

الدوال الفردية:

الدالة  $f$  دالة فردية على  $I$  و بالتالي

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(x) dx + \int_0^{T/2} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ - \int_0^{T/2} f(x) dx + \int_0^{T/2} f(x) dx \right] = 0 \end{aligned}$$

كذلك بما أن الدالة  $\cos$  زوجية على  $\mathbb{R}$  فهي زوجية على  $I \subset \mathbb{R}$  و بالتالي الدالة

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \omega n x dx = 0 \quad \text{منه } x \rightarrow f(x) \cos x \text{ فردية على } I$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \omega n x dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \omega n x dx \quad \text{لكن}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \omega n x \quad \text{أي أن سلسلة فوري المرفقة بالدالة الفردية هي}$$

مثال (5.4.3): لتكن  $f$  دالة دورية و دورها  $2\pi$  معرفة كما يلي:

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

الحل: واضح أن الدالة  $f$  فردية و قابلة للمكاملة على المجال المعطى و بالتالي سلسلة فوري

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin n t dt \quad \text{حيث } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n x \text{ هي المرفقة بالدالة } f$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos n t \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos n t dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{أي}$$

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n x \quad \text{و منه}$$

الدوال الزوجية:

الدالة  $f$  دالة زوجية على  $I$  و بالتالي

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(x) dx + \int_0^{T/2} f(x) dx \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} f(x) dx + \int_0^{T/2} f(x) dx \right] = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx$$

كذلك بما أن الدالة  $\cos$  زوجية على  $IR$  فهي زوجية على  $I \supset IR$  و بالتالي الدالة

$$x \rightarrow f(x) \cos x \text{ زوجية على } I$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \omega n x dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \omega n x dx \quad \text{و منه}$$

لكن و بما أن الدالة  $\sin$  فردية على  $IR$  فهي فردية على  $I \supset IR$  و بالتالي الدالة

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \omega n x dx = 0 \quad \text{و بالتالي } x \rightarrow f(x) \sin x \text{ فردية على } I$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \omega n x \text{ هي المرفقة بالدالة الفردية هي}$$

مثال(6.4.3): لتكن  $f$  دالة دورية و دورها  $2\pi$  معرفة كما يلي:

$$f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$$

الحل: واضح أن الدالة  $f$  زوجية و قابلة للمكاملة على المجال المعطى و بالتالي سلسلة فوري

المرفقة بالدالة  $f$  هي  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$  حيث

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos n t dt$$

و

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin n t \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin n t dt$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]$$

أي

$$f(x) = \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2} \cos nx$$

و منه

$$f(x) = \pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

وإذا كان  $n$  فردي أي  $n = 2k + 1$  فإن

### 3-4-3- نشر دالة على شكل سلسلة فوري:

الدالة الدورية:

نعلم بأنه من أجل كل دالة  $f$  دورية و دورها  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , قابلة لمكاملة على

مجال  $I$  طوله الدور  $T$  يمكن أن نرفق السلسلة  $(a_n \cos \omega n x + b_n \sin \omega n x)$  و  $a_0$  التي

تسمى سلسلة فوري، و السؤال الذي يمكن أن نطرحه هل إذا كانت لدينا سلسلة فوري متقاربة

فهي تتقارب نحو الدالة  $f$ ، للإجابة لدينا النظرية التالية

نظرية (1.4.3): إذا كانت  $f$  دالة دورية و دورها  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , مستمرة و قابلة

للاشتقاق مع الاستمرار ماعدا عند عدد منتهي من النقط في مجال طوله الدور  $T$  بحيث للدالة

$f$  أو للدالة المشتقة الأولى  $f'$  تقبل نهاية من اليمين و نهاية من اليسار عند هذه النقط، فإن

سلسلة فوري المرفقة بالدالة  $f$  تتقارب على  $\mathbb{R}$  و دالة مجموعها  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$

وفي كل نقط استمرار الدالة  $f$  لدينا  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos \omega n x + b_n \sin \omega n x)$ .

مثال (7.4.3): لدينا من المثال (5.4.3) الدالة  $f(x) = x$  دورية و دورها  $2\pi$ ، وهي

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$
 ومرفقة بسلسلة فوري

$$\frac{1}{2} [f(\pi+0) + f(\pi-0)] = 0$$
 لاحظ من أجل  $x = \pi$  السلسلة تحقق المجموع

$$f(\pi/2) = 2[1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \dots]$$
 أما من أجل  $x = \pi/2$  نتحصل على المجموع

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \dots$$
 أي

**الدوال الكيفية:**

لتكن  $f$  دالة معرفة ومحدودة على المجال  $[a, b]$ ، لكي تتمكن من نشر الدالة  $f$  الى سلسلة فوري يجب تمديدها الى دالة دورية.

لتكن دالة  $g$  دورية دورها  $T = b - a$  بحيث من أجل كل  $x$  من  $[a, b]$  فإن

$$g(x) = f(x)$$

و  $g(x+T) = g(x)$ ، الدالة وتحقق شروط النظرية السابقة و بالتالي فهي تقبل النشر الى سلسلة

فوري ذات الحد العام  $U_n(x)$  من أجل الدور  $T/n$  و المعرف بـ:

$$U_n(x) = a_n \cos(2\pi n/T)x + b_n \sin(2\pi n/T)x$$

ومنه بعد وضع  $\omega = 2\pi/T$  و من أجل  $x \in [a, b]$  فإن

$$g(x) = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

و كما أسلفنا سابقا اذا كان المجال  $I$  طوله الدور  $T$  فإنه يمكن صياغة معاملات فوري كالتالي

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_I f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos \omega n x dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin \omega n x dx$$

مثال (8.4.3): انشر على شكل سلسلة  $\sin$  الدالة  $f$  المعرفة بـ:

$$f(x) = 1 \text{ على المجال } [0, 1]$$

الحل: لتكن  $g$  دالة دورية و دورها  $T = 2l$  معرفة كما يلي:  $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < l \\ -1, & -l < x < 0 \end{cases}$ ، الدالة  $g$

قابلة للنشر على شكل سلسلة  $\sin$  و  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\omega x$  حيث  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$

$$b_n = \int_{-1}^1 g(x) \sin n\omega x dx = \frac{2}{l} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{n\pi} \left[ -\cos \frac{n\pi x}{l} \right]_0^1 \text{ و منه}$$

- إذا كان  $n = 2p$  فإن  $b_{2p} = 0$

$$b_{2p} = \frac{4}{\pi(2p+1)} \text{ و إذا كان } n = 2p+1 \text{ فإن}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)} \sin(2p+1) \frac{\pi}{l} x \text{ فإن } 0 < x < 1$$

### 3-4-4- الشكل المركب لسلسلة فوري

لتكن  $f$  دالة دورية و دورها  $\omega \in IR^*$  ،  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  قابلة للنشر إلى سلسلة فوري

$$U_n(x) \text{ يمكن } a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

كتابة

$$U_n(x) = a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

$$= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}$$

نضع  $c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$  مما سبق نستنتج أن

$$c_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos n\omega x dx - \frac{2i}{T} \int_I f(x) \sin n\omega x dx \right]$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_I f(x) e^{-in\omega x} dx \text{ أي}$$

و بالتالي  $U_n(x) = c_n e^{in\omega x} + \bar{c}_n e^{-in\omega x}$  و بما أن

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) \text{ منه}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \text{ و إذا ما وضعنا } a_0 = c_0 \text{ يكون لدينا}$$

مثال (9.4.3): لتكن  $f$  دالة عددية معرفة كما يلي  $f : IR \rightarrow IR$  دورية و دورها  $2\pi$  بحيث

$$f(x) = e^x \text{ على المجال } ]-\pi, \pi]$$

احسب معاملات فوري ثم ادرس التقارب (البسيط والمنتظم) لسلسلة فوري.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{(1-in)x}}{(1-in)} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

الحل: لدينا

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{(1-in)} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ (-1)^n \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{(1-in)} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n (1+in)sh\pi}{2\pi(1+n^2)}$$

نعلم بأن سلسلة فوري المرفقة بهذه الدالة هي  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1+in)sh\pi}{2\pi(1+n^2)} e^{inx}$  و التي تتقارب نحو  $f(x)$  إذا كان  $x \in ]-\pi, \pi[$ ، و تتقارب نحو  $ch\pi$  و  $(f(\pi_+) + f(\pi_-))/2 = ch\pi$  لما  $x = \pi$ . من الملاحظ أن نهاية  $e^x$  عندما  $x \rightarrow \pi$  تختلف عن  $ch\pi$ ، ومنه دالة المجموع لهذه السلسلة غير مستمرة على  $]-\pi, \pi[$  وبالتالي هذا التقارب غير منتظم.

### 3-4-5- دستور بيسل- برسفيل

نعرف الجداء السلمي للدالتين  $f, g$  المعرفتين على  $I \subset \mathbb{R}$  بأنه الشكل الثنائي الخطي

$$(f, g) \rightarrow \frac{1}{T} \int_I f(x)g(x)dx$$

المرفق  $(f, f)$  من الجداء السلمي  $(f, f)$  نبرهن مساواة

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \text{ و بما أن } \frac{1}{T} \int_I f^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

$$\text{و منه نستنتج } \frac{1}{T} \int_I f^2(x)dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$$

نظرية (2.4.3): إذا كانت  $f$  دالة دورية و دورها  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ،  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ، و قابلة للمكاملة

$$\frac{1}{T} \int_I f^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$$

على مجال  $I$  طوله الدور  $T$  فإن

مثال (10.4.3): لتكن  $f$  الدالة دورية و دورها  $2\pi$ ، حيث  $f(x) = 1$  على المجال  $]0, \pi[$  و  $f(\pi) = 0$ .

(1) عين معاملات فوري ثم استنتج سلسلة فوري

$$(2) \text{ استنتج قيم المجاميع } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

الحل: واضح أن المعاملات  $a_n = 0$  و منه الدالة فردية و  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2[1 - (-1)^n]}{\pi}$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2k+1)x \text{ و بالتالي}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4} \text{ ومنه } \sin(k\pi + \pi/2) = (-1)^k \text{ فإن } x = \pi/2 \text{ إذا كان}$$

بما أن الدالة  $f$  فردية وحسب دستور بارسفيل

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ ومنه } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \text{ و}$$

### 3-5- سلسلة تمارين حول الفصل الثالث

#### التمرين الأول:

بين أن السلاسل التالية متقاربة ثم احسب مجموع كل منها:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)n(n+1)}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

#### التمرين الثاني:

بين فيما إذا كانت السلاسل التالية و المعرفة بعدها العام متقاربة أم متباعدة:  $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right), \quad W_n = e^{\sin n}, \quad U_n = \frac{1}{e^n + e^{-n}}, \quad U_n = n!$$

$$H_n = \ln \cos \frac{1}{n}, \quad K_n = na^{-n}, \quad T_n = \left( a + \frac{1}{n} \right)^n, \quad G_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$E_n = e^{1/n} - 1$$

#### التمرين الثالث:

ادرس طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 + \cos n}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 + \cos n}{3^{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(n+1)^2}{n^2 + 1} \right)^{-n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.4.6 \dots 2n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(1/n) - 1$$

#### التمرين الرابع:

حدد طبيعة السلاسل التالية و المعرفة بعدها العام:

$$G_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}, \quad W_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}, \quad U_n = \frac{\cos \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$V_n = \sin \left( \pi \sqrt{n^2 + k^2} \right), k \in \mathbb{R}, \quad H_n = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n dt}{(1+t^2)^n}$$

$$Q_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \quad T_n = \frac{(-1)^n}{(n + \pi)^2 - 1},$$

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{x}{1 + a^{2^n} x^2}; a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \text{ من أجل } \underline{\text{التمرين الخامس:}}$$

أدرس حسب قيم العدد الحقيقي  $a$  تقاربات سلسلة الدوال ذات الحد العام  $f_n$



**التمرين السادس:** أدرس التقارب البسيط ثم التنظيمي لسلسلة الدوال  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  و المعرفة بالحد

$$\forall x \in \mathbb{R}; f_n(x) = (\cos^2 x + n^{\pi/2} x^2)^{-1} \text{ حيث } f_n(x) \text{ العام للسلسلة العددية}$$

**التمرين السابع:** أدرس التقاربات سلسلة الدوال  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  و المعرفة بالحد العام  $f_n$  حيث

$$. C^1(D_F) \text{ حيث } \forall x \in \mathbb{R}; f_n(x) = (-1)^n e^{-nx} / (n^2 + 1)$$

**التمرين الثامن:** عين نصف قطر التقارب السلاسل ذات الحد العام ثم حدد طبيعتها عند الأطراف:

$$, H_n = \frac{x^n}{chn} , W_n = 2^{n+1} (x-2)^n , V_n = \frac{x^n}{n^n} , U_n = \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

$$, R_n = (1+a^n)x^n, a \geq 0 , T_n = (-2)^n \frac{x^{3n+1}}{n^2 + 1} , K_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$F_n = \left( 4^n + n^n + \frac{2n+1}{(n!)^2} \right) x^n$$

**التمرين التاسع:** حدد نصف قطر التقارب ثم عين دالة المجموع لكل من السلاسل التالية:

$$, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 3n + 2} , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} , \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n + e^{-n}) x^n , \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

**التمرين العاشر:** (1) أنشر كل من الدوال التالية الى سلسلة صحيحة في جوار المبدأ:

$$h(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt , k(x) = \text{Arctg}x , g(x) = \ln(1+x^2) , f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

(2) حدد نصف قطر التقارب وطبيعة السلسلة من أجل  $x = \pm R$  و المعرفة بحددها العام

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)} ; n \geq 2 \text{ عين دالة مجموعها } F(x) \text{ مستنتجا قيمة}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

**التمرين الحادي عشر:**

لتكن  $f$  دالة دورية دورها  $2\pi$  معرفة على  $[-\pi, \pi]$  كما يلي:  $f(x) = x^2$

$$(1) \text{ بين أن } a_0 = \frac{\pi^2}{3} \text{ وانه } a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \dots (1), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \dots$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \dots$$

(2) استنتج نشر الدالة  $f$  الى سلسلة فوري و ماهو مجموع سلسلة فوري على المجال  $[-\pi, \pi]$

(3) استنتج قيمة المجموع (1) و باستعمال دستور بارسافيل قيمة المجموع (2)

**التمرين الثاني عشر:** لتكن  $f$  دالة دورية دورها  $2\pi$  معرفة على  $[-\pi, \pi]$  كما يلي:

$f(x) = \cos \alpha x$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R} / \mathbb{Z}$  ، (1) عين معاملي فوري  $a_n$  و  $b_n$

$$(2) \text{ استنتج قيمتي المجموعين } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2} \text{ ، } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \text{ و استنتج قيمة } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

**التمرين الثالث عشر:** نعتبر الدالة الدورية  $f$  ذات الدور  $2\pi$  و المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \pi - |x|, \forall x \in [-\pi, \pi]$$

(1 - انشر الى السلاسل فوري الدالة  $f$

$$(2) \text{ استنتج قيمة المجموع } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \text{ من أجل } x = 0$$

(3) ادرس التقارب المنتظم لسلسلة فوري المرفقة بالدالة  $f$  .

## المحتوى

- 01..... (1) الفصل الاول التكاملات المضاعفة
- 02..... 1-1-1 تذكير
- 02..... الدوال متعددة المتغير المتغيرات
- 02..... - الدوال لمتغيرين (ثلاث متغيرات)
- 03..... - النهايات و الاستمرار
- 04..... - الاشتقاق
- 04..... 1-1-1- الدوال الدرجية
- 05..... - تعاريف
- 05..... - التكامل
- 05..... 2-1 - التكامل الثنائي
- 06..... - تعاريف
- 07..... - الخواص الجبرية
- 07..... - طرق حساب التكامل الثنائي
- 10..... - قانون قرين-ريمان
- 11..... 3-1 - التكامل الثلاثي
- 11..... - تعاريف
- 12..... - طرق حساب تكامل ثلاثي
- 14..... - تحويلات المتغيرات
- 18..... 4-1 - سلسلة تمارين للفصل الأول
- 21..... (2) الفصل الثاني التكامل المعمم (الموسع)
- 22..... 1-2 - التكامل على مجال غير محدود
- 22..... - حالة المجال  $[a, +\infty[$
- 23..... - تكامل التوابع الموجبة
- 25..... - حالة المجال  $] -\infty, b]$
- 25..... 2-2 - التكامل على مجال محدود و غير متراص
- 26..... - تكامل الدوال الموجبة
- 28..... - معيار كوشي
- 28..... 3-2 - التكامل المتقارب مطلقا
- 29..... 4-2 - التكامل المتقارب شرطيا
- 29..... 5-2 - التكامل المعمم باستعمال تحويل المتغير و المكاملة بالتجزئة

- 29.....1-5-2- المكاملة بتحويل المتغير
- 30.....2-5-2- المكاملة بالتجزئة
- 31.....6-2- التكامل المعمم المتعلق بوسيط
- 31.....1-6-2- الاستمرار
- 32.....2-6-2- الاشتقاق تحت رمز التكامل
- 33.....3-6-2- دوال اولر الاكثر استعمالا
- 34.....7-2- سلسلة تمارين للفصل الثاني
- 36.....(3) الفصل الثالث السلاسل
- 37.....1-3- السلاسل العددية
- 37.....1-1-3- مفاهيم عامة
- 39.....2-1-3- السلاسل ذات الحدود الموجبة
- 39.....- السلاسل الاساسية
- 41.....- مقاييس التقارب للسلاسل ذات الحدود الموجبة
- 44.....3-1-3- السلاسل ذات الحدود الكيفية
- 44.....- التقارب المطلق
- 45.....- نظرية ايبيل
- 46.....4-1-3- السلاسل المتناوبة
- 46.....- تعريف
- 47.....- نظرية لبنز
- 47.....5-1-3- السلاسل نصف المتقاربة
- 48.....2-3- متتاليات الدوال وسلاسل الدوال
- 48.....1-2-3- متتاليات الدوال
- 48.....- تقارب متتاليات الدوال
- 49.....- متتاليات الدوال و الاستمرار
- 50.....- مكامل متتاليات الدوال

- 51..... اشتقاق متتاليات الدوال -
- 52..... 2-2-3- سلاسل الدوال
- 52..... تقارب وسلاسل الدوال -
- 53..... شرط كاف للتقارب المنتظم -
- 54..... الاستمرار وسلاسل الدوال -
- 54..... تكامل سلاسل الدوال -
- 55..... اشتقاق سلاسل الدوال -
- 57..... 3-3- السلاسل الصحيحة لمتغير حقيقي
- 57..... 1-3-3- مجال القارب
- 58..... الطرق العملية لإيجاد نصف قطر التقارب -
- 58..... العمليات الجبرية ونصف قطر التقارب -
- 59..... التقارب المنتظم و مجال التقارب -
- 60..... 2-3-3- تكامل سلسلة صحيحة
- 61..... 3-3-3- اشتقاق سلسلة صحيحة
- 62..... 4-3-3- نشر دالة الى سلسلة صحيحة
- 63..... الدوال القابلة للنشر -
- 63..... النشر باستعمال دستور ماكلوران -
- 64..... 5-3-3- طرق اخرى للنشر
- 64..... المكاملة -
- 65..... الاشتقاق -
- 67..... 4-3- سلاسل فوري
- 67..... 1-4-3- تنكير
- 67..... خواص الدوال -
- 67..... سلاسل الدورية -
- 68..... 2-4-3- سلسلة فوري
- 68..... تعريف -
- 71..... حالات خاصة -

73-3-4-3- نشر دالة لمتغير حقيقي الى سلسلة فوري.....73

73.....الدوال الدورية -

74.....الدوال الكيفية -

75-4-4-3- الشكل المركب (العقدي) لسلسلة فوري.....75

76-5-4-3- دستور بيسل بارسفيل.....76

78-5-3- سلسلة تمارين.....78

(4) قائمة المراجع

## قائمة المراجع

- [1] م. أبوزيد، مراجعة ترجمة نخبة نت الاساتذة. سلسلة شوم كتاب حساب التكامل والتفاضل، الطبعة العربية الثامنة، 2006 الدار الدولية الاستثمارات الثقافية، مصر
- [2] م. ر. شبيجل، سلسلة شوم كتاب التكامل و التفاضل، الطبعة العربية الثامنة، 2008 الدار الدولية الاستثمارات الثقافية، مصر
- [3] إ. الحمصي، التحليل الشعاعي و التوابع العقدية، ديوان المطبوعات الجامعية
- [4] ل. بن عيسى، م. سعود، التحليل الرياضي الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية
- [5] د. عبد الرقيب، محاضرات في التكامل المتقدم، جامعة عدن، كلية التربية ردفان 2010
- [6] ر. محمد جهيمة، أ. عبد العالي هب الريح، التفاضل و التكامل، الطبعة الثالثة الجزء الثاني، دار الكتاب الجديد المتحدة، الفصل الثاني و الثالث. 1999/09/01 مصر مطرأة ليبيا.
- [7] و. عبد الحق، الرياضيات للمهندسين التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية .
- [8] Y.Bougrov, S. Nikolski, Cours de mathématiques supérieurs Tome II, Mir moscou 1975.
- [9] M. Cheline, C. Vorathemsche, Analyse concepts et Contextes fonctions plusières variables, Deboeck paris 2006
- [10] A. Colin, C. Bernard, D.jacques, C. Adina, B. Françoise, Exercices d'analyse, paris 5, 1984.
- [11] A. Donedou, Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle Tome4, Librairie vuibert, 75005paris 1979.
- [12] L. Ferrand, Cours de mathématiques, Tome 4, Dunod 1974.
- [13] G. Genet, G. Pupion, Anlyse moderne 2, Librairie vuibert, 75005 paris 1981.

[14] M. Goultier, Analyse exercices et problèmes, 5155-(II)-osB89 pub COD/002/2008 Belgiques.

[15] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral Tome II Mir.Moscou ,1977.

[16] Z. Khelifa, Intégrales généralisées et séries, office des publications universitaires

[17] P. Thuillier, J-C. Belloc, Mathématiques 3 Analyse, Masson , paris 1982.