I. RAPPEL DES NOTIONS DE PUISSANCE COMPLEXE

Introduction

À cause de l'importance de la tension alternative en électrotechnique, nous allons ici réviser les concepts de base de circuits alternatifs.
Les **réseaux électriques** sont constitués d'**éléments** que nous nous attacherons à définir. Il sont **interconnectés** et régis par des **lois** qui régissent cet assemblage.
La finalité de cette démarche est de **déterminer** les **grandeurs inconnues** à partir de celles **connues** par l'intermédiaires des lois de comportement issues de l'étude.

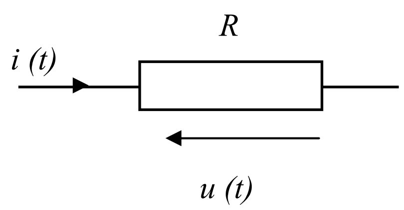
1. Les éléments de base

Les éléments disposent d'un nombre fini de **bornes** destinées à établir les connexions (2 bornes = dipôle, 4 bornes = quadripôle, *n* bornes = multi-pôles,…). Chacune des bornes est placée à un certain potentiel tandis qu'elle véhicule un courant (entrant ou sortant). Ces deux grandeurs électriques sont des fonctions réelles du temps (voir §1.1, §1.2 et §1.3 pour les notations et définitions).

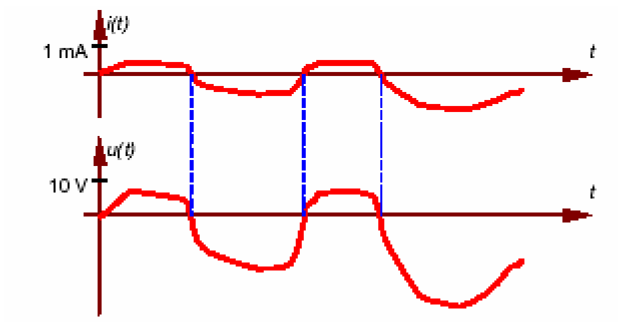
1.1. La résistance

Loi de fonctionnement (loi d'Ohm) : $u(t) = Ri(t)$. où R est la résistance électrique en Ohms (Ω). u et i sont exprimés respectivement en Volts (V) et en Ampères (A).
On écrit aussi $i(t) = Gu(t)$. où G ($= 1/R$) est la conductance en Siemens (S).

Symbole, schéma et notations (conv. récepteur)



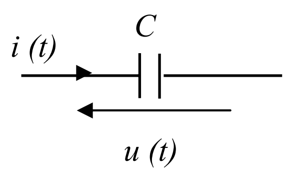
Si R (resp. G) est constante, on dit que la résistance est linéaire. Dans le cas contraire, la résistance est non linéaire. La représentation graphique $i = f(u)$ est la caractéristique tension courant
de la résistance.
La loi d'Ohm est illustrée pratiquement en montrant l'homothétie des relevés temporels sur la figure ci-contre.



1.2 Condensateur

Loi fondamentale : $I(t)= Cdu(t)/dt$
où C est la capacité en Farads (F) du condensateur, indépendante du temps.
dém : $q(t)= i(t)dt$ et $q(t) = Cu(t)$ d'où le résultat en éliminant q.

Symbole, schéma et notations



Conclusion et conséquence pratique:

À partir de la loi fondamentale $u(t)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx$, la tension u(t) est une fonction continue du temps.
En conséquence, on n'observe jamais de discontinuité de tension aux bornes d'un condensateur.

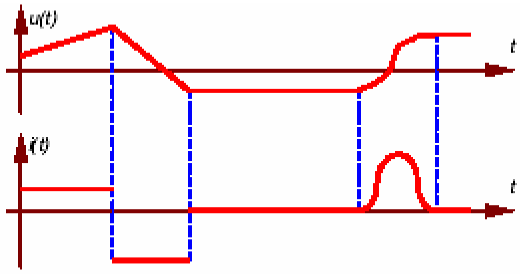


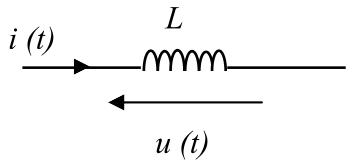
Fig. II-1 : illustration de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

1.3 Inductance ou self

Loi fondamentale : *u(t)= Ldi(t)/dt*

où *L* est l'inductance du dipôle self en Henrys (H), indépendante du temps.

Symbole, schéma et notations



Conclusion et conséquence pratique:

À partir de la loi fondamentale $i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t u(x)dx$, le courant i(t) est une fonction continue du temps.

En conséquence, on n'observe jamais de discontinuité de courant traversant une inductance.

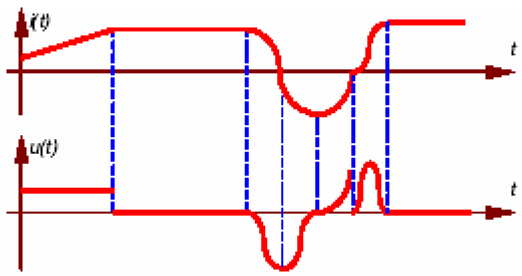


Fig. II-2 : illustration de la continuité du courant traversant une inductance.

2. Représentation d'une grandeur sinusoïdale

2.1. Représentation instantanée

Soit une grandeur sinusoïdale, on a alors:

$V = V_m \cos(\omega t + \phi)$

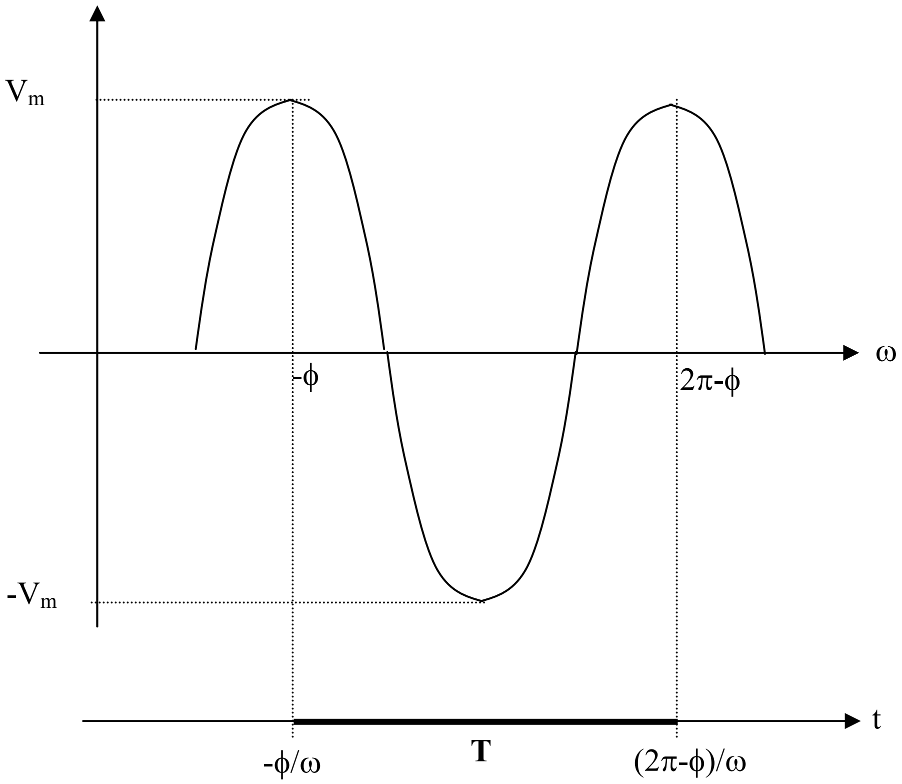
avec :

V_m : l'amplitude ou la valeur maximale,
ω : la pulsation = $2\pi f$,
ϕ : l'angle de déphasage,
$T= 2\pi/\omega$: la période,
$f = 1/T$: la fréquence du réseau (Hz),

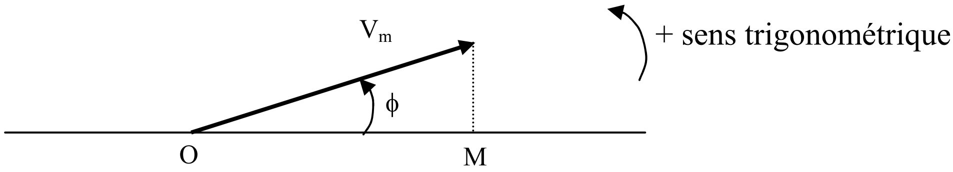
$$V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt$$

$$V_{eff}{}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt$$

$V = V_{eff} = V_{moy}/\sqrt{2}$: valeur efficace



2.2- Représentation vectorielle



On choisit une direction origine des phases et on représente V par un vecteur module V_m en faisant l'angle ϕ avec la direction.

2.3- Représentation complexe :

On écrit $V = V_m\, e^{j(\omega t+\phi)}$

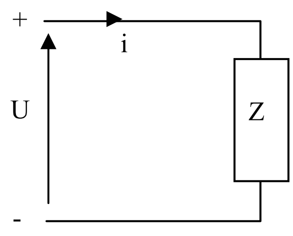
On utilise surtout la représentation suivante :

$$\overline{V} = V_{eff}\, e^{j\phi} = V\, e^{j\phi}$$

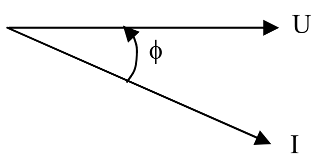
avec $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$

ou encore $\overline{V} = V\underline{/\phi}$

2.4. Convention de signe

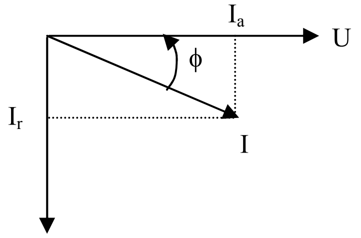


On choisit toujours une tension comme origine des phases et on comptera ϕ>0 dans le sens $\phi = (\vec{I}\,,\,\vec{U})$



3. Expression de la puissance

3.1 Pour un réseau quelconque.



I_a : composante active
I_r : composante réactive
$u = U_m \cos\omega t$
$i = I_m \cos(\omega t - \phi)$ courant en retard

Soit p la puissance instantanée, alors on a :
$p = u\, i = V_m I_m \cos\omega t.\cos(\omega t - \phi) = 2UI \cos\omega t.\cos(\omega t - \phi)$

comme : $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$**, en posant :** $x = \phi$ et $y = 2\omega t - \phi$

on a alors : $\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi) = 2\cos\left(\frac{2\omega t}{2}\right).\cos\left(\frac{2\omega t - 2\phi}{2}\right)$

$$\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi) = 2\cos\omega t.\cos(\omega t - \phi)$$

$\Rightarrow$ $p = UI\cos\phi + UI\cos(2\omega t - \phi)$

$$p = \underbrace{UI\cos\phi}_{P_{moyenne}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t - \phi)}_{P_{fluctuante}} \qquad (1)$$

Rappel : $P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$

On définit:
- la puissance active P par $P = UI_a = UI\cos\phi$
- la puissance réactive Q par $Q = UI_r = UI\sin\phi$
- la puissance apparente S par $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$

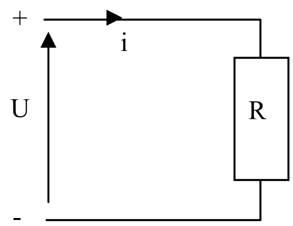
  P s'exprime en Watts (W), Q s'exprime en volts - ampères - réactifs (VAR) et S s'exprime en volts-ampères (VA)

NB : La puissance active s'identifie à la puissance moyenne.

$$P = UI\cos\phi \text{ avec } 0 < \cos\phi \leq 1$$

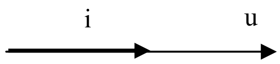
⇒ La puissance apparente est la limite supérieure de la puissance active qu'un système peut absorber. Elle donnera donc une indication sur les valeurs limites en tension et en courant d'un récepteur.

3.2 Cas d'une résistance



$u = U_m \cos\omega t$

$i = I_m \cos\omega t$



$p = U_m I_m \cos^2\omega t$

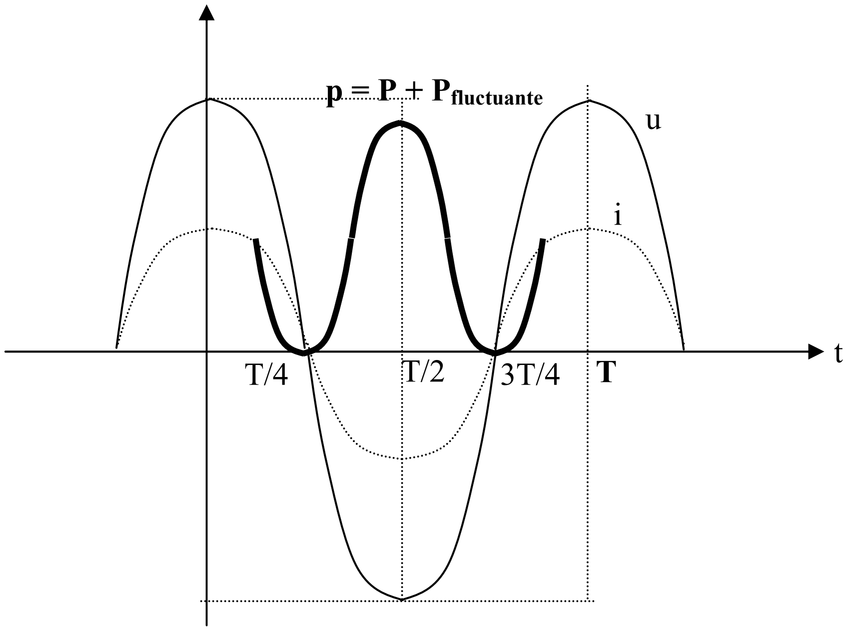
on sait que : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

alors $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

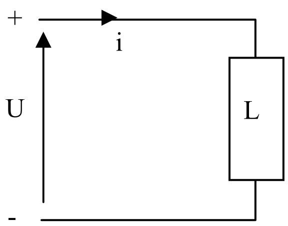
$\Rightarrow$ $p = 2UI\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

d'où : $\boxed{p = UI(1+\cos 2x)}$

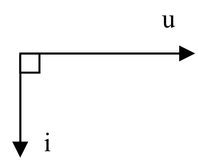
Dans l'équation (1), en posant ϕ = 0 on a alors la bonne formulation.



3.3 Cas d'une inductance



Pour les inductances parfaites, le courant est en retard de π/2 sur la tension : $\phi=\pi/2$.



$u = U_m \cos \omega t$

$i = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin \omega t$

or : $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

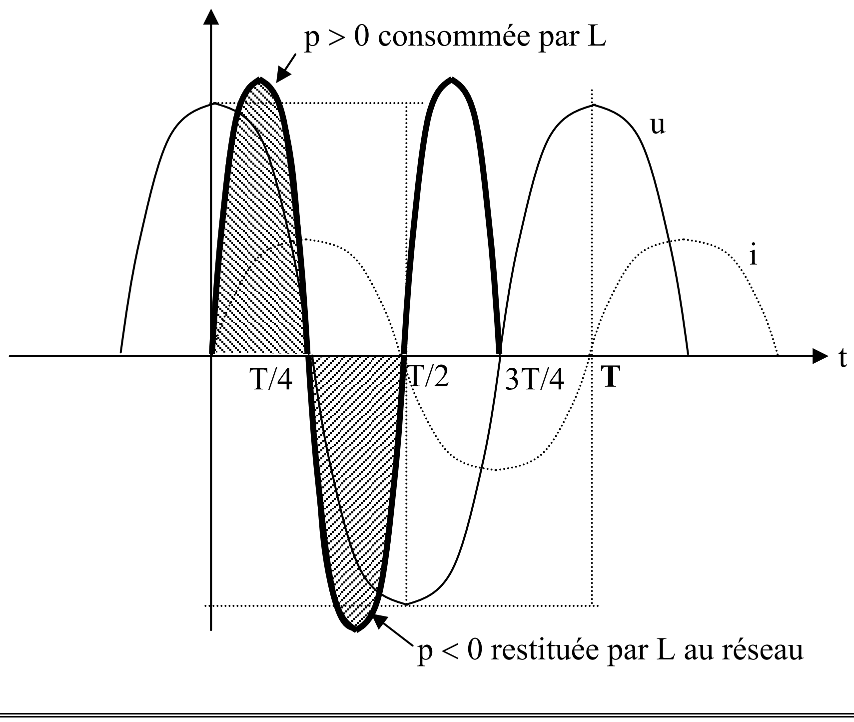
$p = U_m I_m \cos \omega t . \sin \omega t$

alors $= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$

d'où : $\boxed{p = 2UI \sin 2\omega t}$ $\Rightarrow$ la valeur moyenne de p est nulle!

En effet : $p_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T (UI \sin 2\omega t)\, dt = 0$

NB: Une inductance parfaite ne consomme pas de puissance active (cos ϕ = 0)



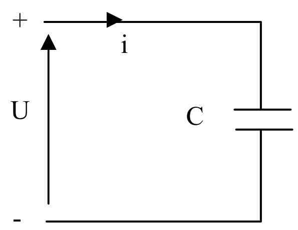
L'énergie consommée par L de 0 à π/4 vaut :

$$W = \int_0^{T/4} u\,i\,dt = \int_0^{T/4}\left(L\frac{di}{dt}\right) i\,dt = L\int_0^{I_m} i\,di \qquad \boxed{W = \frac{1}{2}L{I_m}^2 = LI^{\,2}}$$

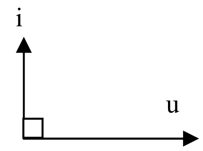
Dans ce cas on a $\phi = \pi/2$ d'où : $Q = UI\sin\phi = UI = (L\omega I)I$ $\boxed{Q = L\omega I^2}$

N.B. Une inductance parfaite consomme de la puissance réactive.

3.4 Cas d'un condensateur



Pour les condensateurs parfaits, le courant est en avance de π/2 sur la tension : $\phi = -\pi/2$.



$u = U_m \cos\omega t$

$$i = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -I_m \sin\omega t$$

$$p = -U_m \cos\omega t . I_m \sin\omega t$$

alors $= -U_m I_m \cos\omega t.\sin\omega t$

$= -2UI\cos\omega t.\sin\omega t$

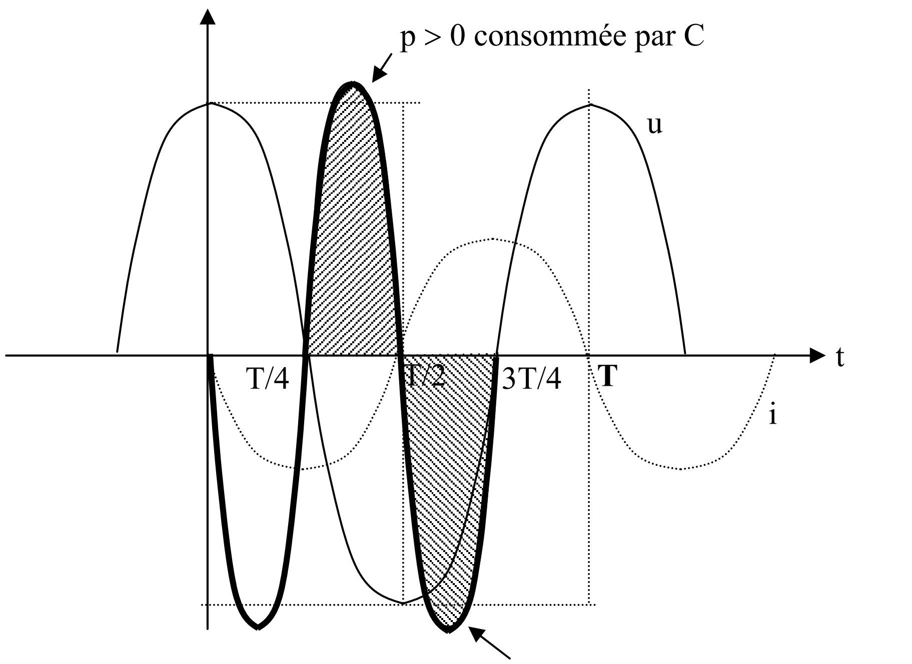
sachant que : $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

alors : $\boxed{p = -UI\sin 2\omega t}$

⇒ la valeur moyenne de p est nulle!

En effet : $p_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T (-UI\sin 2\omega t)\,dt = 0$

NB: le condensateur parfait ne consomme pas de puissance active



L'énergie consommée par C de 0 à π/4 vaut :

$$W = \int_0^{T/4} u\,i\,dt = \int_0^{T/4}\left(C\frac{du}{dt}\right) u\,dt = C\int_0^{I_m} \frac{du}{dt} u dt = C\int_0^{I_m} u du \qquad \boxed{W = -\frac{1}{2}C{U_m}^2 = -CU^2}$$

Dans ce cas on a $\phi = -\pi/2$ d'où : $Q = UI\sin\phi = -UI$ $\boxed{Q = -\frac{I^2}{C\omega}}$

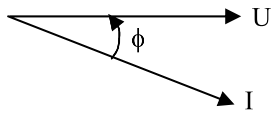
N.B. Le condensateur fournit de la puissance réactive au réseau!

Dans le cas où une inductance L et une capacité C sont montés en parallèle avec $LC\omega^2=1$, on aura alors : $W = LI^2 - CU^2 = 0$. On dit alors qu'il y a compensation d'énergie réactive : l'énergie réactive consommée par L est fournie par C et non par le réseau. Ceci est un moyen d'améliorer le $\cos\phi$ de certains récepteurs.

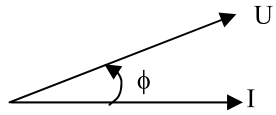
3.5 **Facteur de puissance**

$$\boxed{\cos\phi = \frac{P}{S}}$$

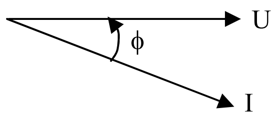
$\cos\phi = 0{,}9$ AR



$\cos\phi = 0{,}7$ AV



3.6 Expression de la puissance complexe à l'aide de grandeur complexe



On a: $\begin{cases} \overline{U} = U \\ \overline{I} = I\,e^{-j\phi} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \overline{U}\,\overline{I} &= UIe^{-j\phi} = UI\left(\cos(-\phi) + j\sin(-\phi)\right) \\ &= UI\left(\cos\phi - j\sin\phi\right) \end{aligned}$$

Alors : $\boxed{\overline{U}\,\overline{I} = P - jQ}$

$\overline{U}\,\overline{I}$ ne convient pas comme définition de la puissance complexe. En effet, si $\phi>0$ alors $Q=UI\sin\phi<0$, ce qui est contraire aux résultats obtenus à l'aide des conventions de signe choisies.

On forme alors : $\overline{U}\,\overline{I}^* = UIe^{j\phi} = UI\left(\cos\phi + j\sin\phi\right) = P + jQ$

$$\boxed{\overline{U}\,\overline{I}^* = P + jQ = \overline{S}}$$

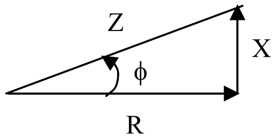
$$\boxed{P = \mathrm{Re}\left(\overline{U}\,\overline{I}^*\right) \qquad Q = \mathrm{Im}\left(\overline{U}\,\overline{I}^*\right) \qquad \overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^*}$$

<u>**Exemple :**</u> Un circuit d'impédance $Z = R + jX$

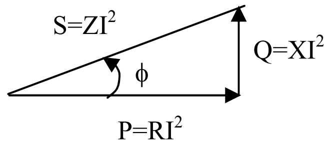
$\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^* = \overline{Z}\,\overline{I}\,\overline{I}^* = \overline{Z}\,I^2 = R\,I^2 + jX\,I^2$

Sachant que $\overline{S} = P + jQ$, on a: $P=RI^2$ et $Q=XI^2$

$Z = R + jX$



$\overline{S} = P + jQ$



$$\boxed{\cos\phi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z}}$$

4. Résolution des circuits

Loi d'Ohm

Loi des nœuds
La somme algébrique des courants circulant dans les branches adjacentes à un nœud est nulle. On peut dire aussi que la somme algébrique des *k* courants entrants dans un nœuds est égale à la somme des *l* courants sortants (toutes les charges apportées sont extraites).

$$\boxed{\sum_{\underset{k}{\longrightarrow \bullet}} i_k = \sum_{\underset{l}{\longrightarrow \bullet}} i_l}$$

Loi des mailles
La somme algébrique des tensions rencontrées en parcourant une maille (sens prédéfini) est nulle.

$$\boxed{\sum(\pm)v_k = 0 \begin{cases} v_k \text{ est comptée positivement si elle est dans le sens de parcours de la maille.} \\ v_k \text{ est comptée négativement si elle est dans le sens contraire du parcours de la maille.} \end{cases}}$$

Théorème de Boucherot :
La puissance active (resp. réactive) totale consommée dans un circuit est la somme des puissances actives (resp. puissance réactive) consommée dans chaque portion du circuit.

$P = \sum P_i$ (a)

$Q = \sum Q_i$ (b)

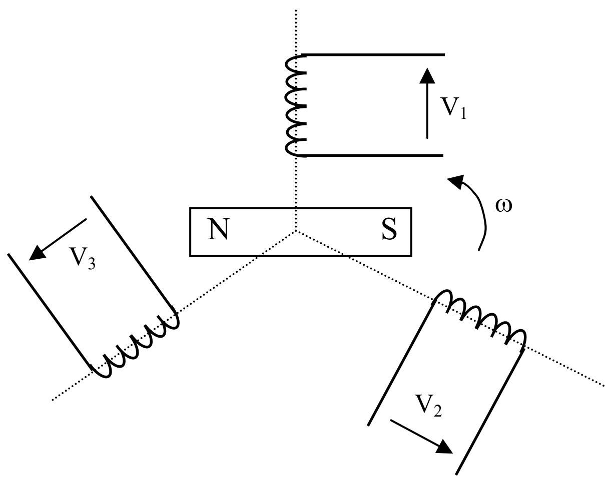
$S \leq \sum S_i$ (c)

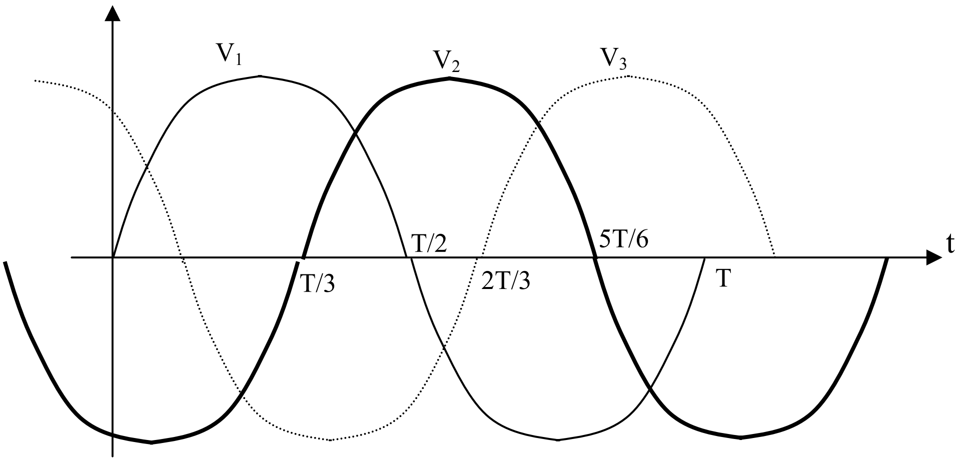
On calcule les P_i et les S_i dans chaque élements du circuit. On écrit (a) et (b) puis :
$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$

5. Circuits triphasés

5.1 Production de triphasé :

On dispose de 3 bobines constituant chacune une phase de manière à ce que leurs axes décalés de 120° dans l'espace. A l'intersection des trois axes on fait tourner à vitesse constante un aimant permanent. Le décalage spatial des trois bobines provoque un décalage temporel des 3 f.e.m. induites.





Une distribution de l'énergie électrique se fait en courant alternatif sinusoïdal triphasé

Définition : On appelle système triphasé tout ensemble de 3 fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence.

$$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega t + \phi_1)$$
$$v_2(t) = V_{m2}\cos(\omega t + \phi_2)$$
$$v_3(t) = V_{m3}\cos(\omega t + \phi_3)$$

Une phase est l'ensemble des conducteurs parcourus par un même courant.

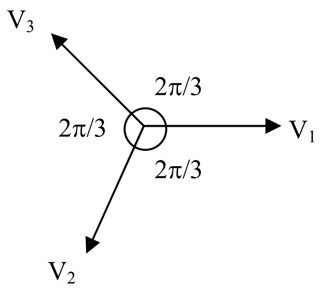
5.2 Système triphasé équilibré

C'est une système triphasé où les amplitudes des 3 fonctions sont identiques et où les 3 fonctions sont déphasées entre elles de $2\pi/3$

Exemple :

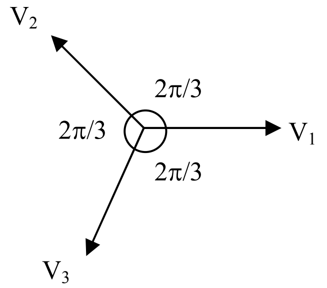
$$v_1(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$$
$$v_2(t) = V_m\cos\left(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$v_3(t) = V_m\cos\left(\omega t + \phi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Système direct : on pose $a = e^{j2\pi/3}$



$$\begin{cases} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} = a^2\,\overline{v_1} \\ \overline{v_3} = a\,\overline{v_1} \end{cases}$$

<u>Système inverse</u> : on pose $a = e^{j2\pi/3}$

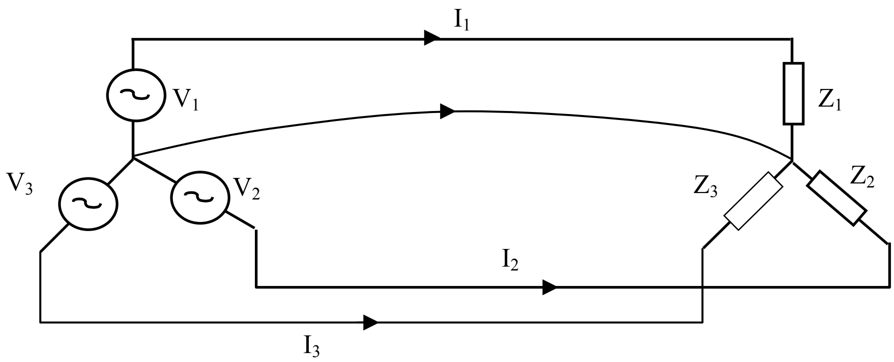


$$\begin{cases} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} = a\,\overline{v_1} \\ \overline{v_3} = a^2\,\overline{v_1} \end{cases}$$

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3} = \left(a + a^2 + 1\right)\overline{v_1} = (1-1)\overline{v_1} = 0$$

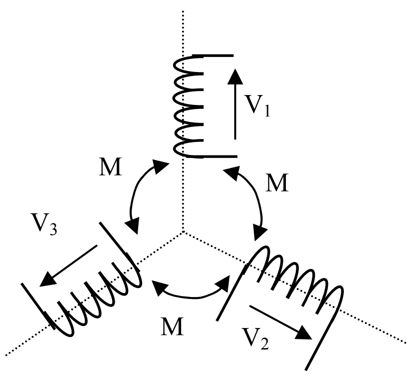
<u>5.3 Propriétés des systèmes triphasés équilibrés</u>

a) Courant dans le neutre :



(V_1, V_2, V_3) système triphasé équilibré : $I_N = I_1 + I_2 + I_3$.
Si le récepteur est équilibré ($Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$), le système des trois courant est alors équilibré et on a $\mathbf{I_N = 0}$.
$\Rightarrow$ On peut donc supprimer la jonction entre les points neutre.

b) <u>Impédance cyclique</u>



On a : $V_1 = (r + jl\omega)I_1 + j\omega M(I_2 + I_3)$

$V_2 = (r + jl\omega)I_2 + j\omega M(I_1 + I_3)$

$V_3 = (r + jl\omega)I_3 + j\omega M(I_2 + I_1)$

avec : r : résistance d'une bobine

l : inductance propre d'une bobine

M : inductance mutuelle entre deux bobines.

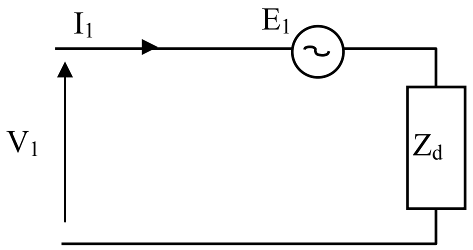
On cherche un système de trois courants équilibrés d'où :

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$V_1 = (r + j(l - M)\omega)I_1 = Z_d\, I_1$$

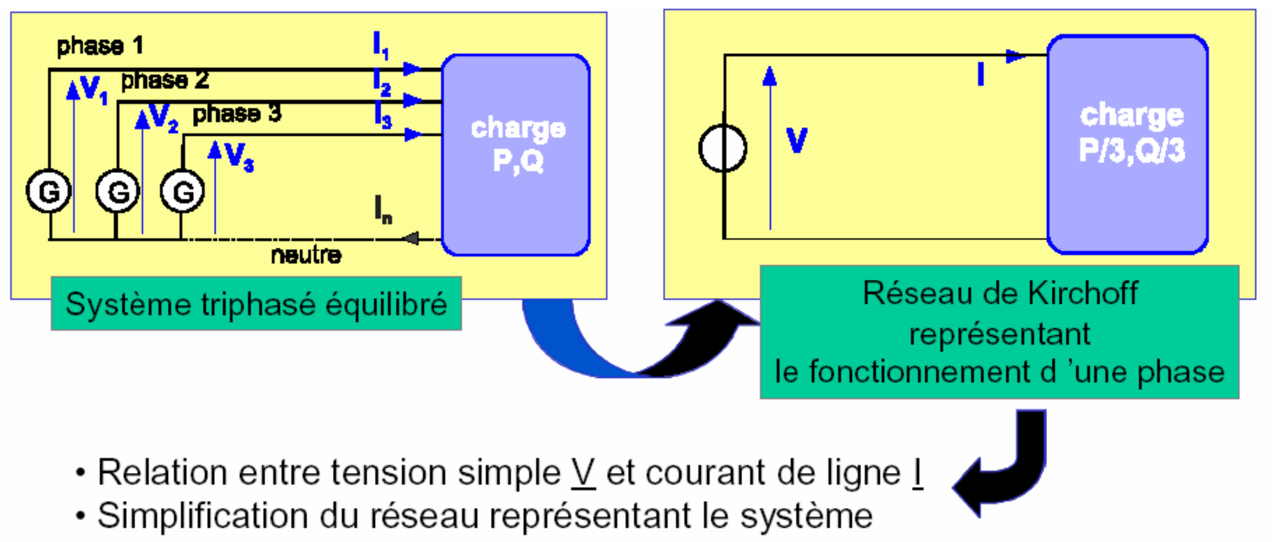
où Z_d est l'impédance cyclique.

On peut se ramener au schéma suivant, avec des f.e.m. en série



$$V_1 = E_1 + Z_d I_1$$

Donc un seul schéma monophasé suffit à représenter un système triphasé équilibré.

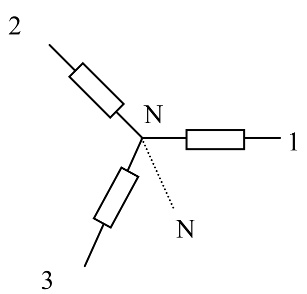


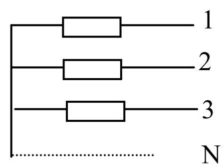
5.4 Couplages des phase

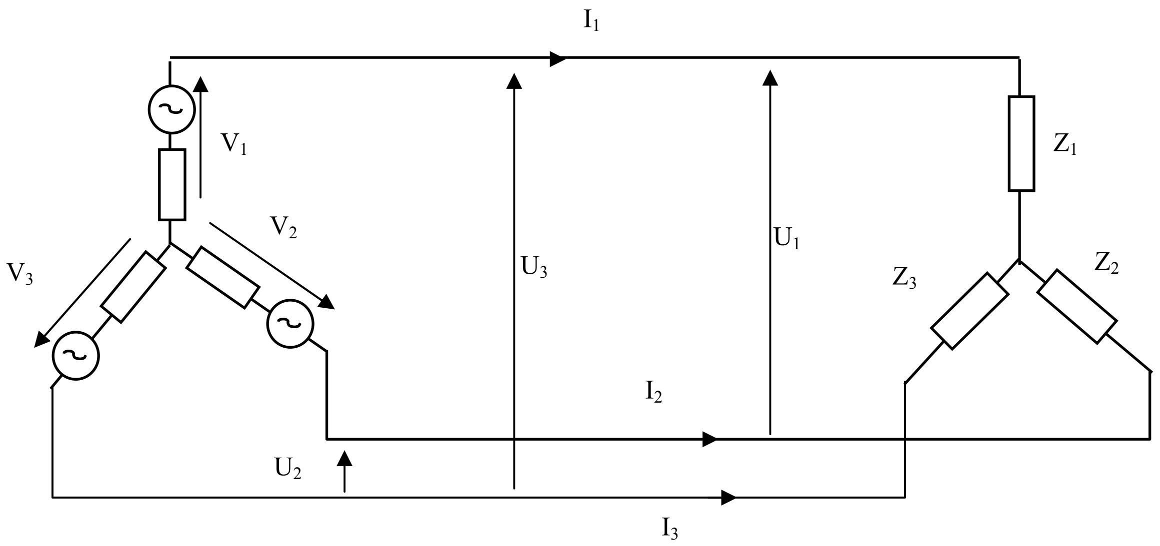
Notation

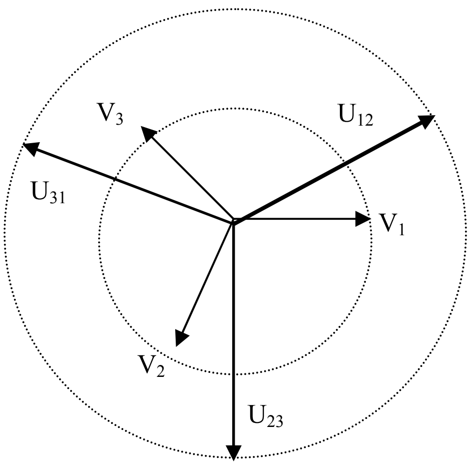
V : la tension entre une phase et le neutre (tension simple),
U : La tension entre deux phases (tension composée),
I : courant dans la ligne reliant le générateur et le récepteur,
J : le courant dans une phase du générateur ou du récepteur.

Montage étoile









$U_1 = V_1 - V_2$
$U_2 = V_2 - V_3$
$U_3 = V_3 - V_1$

$$U_1 = U_{12} = V_1 - V_2 = V_1 - a^2V_1 = V_1(1\text{-}a^2) = V_1(1\text{-}e^{j4\pi/3})$$
$$= V_1(1 - \cos 4\pi/3 - j\sin 4\pi/3)$$
$$= V_1\ (3/2 + j\sqrt{3}/2) = V_1\ \sqrt{3}\ (\sqrt{3}/2 + j/2)$$
$$= U_{12} = V_1\sqrt{3}e^{j\pi/6}$$

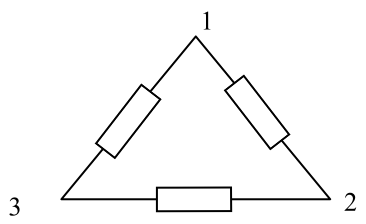
$$\boxed{\mathbf{U = V\ \sqrt{3}}}$$

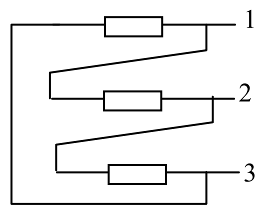
Les 3 phases du générateur sont traversées par les mêmes courants que la ligne $\boxed{\mathbf{I = J}}$
Pour caractériser un réseau, on donne, la tension simple et la tension composée

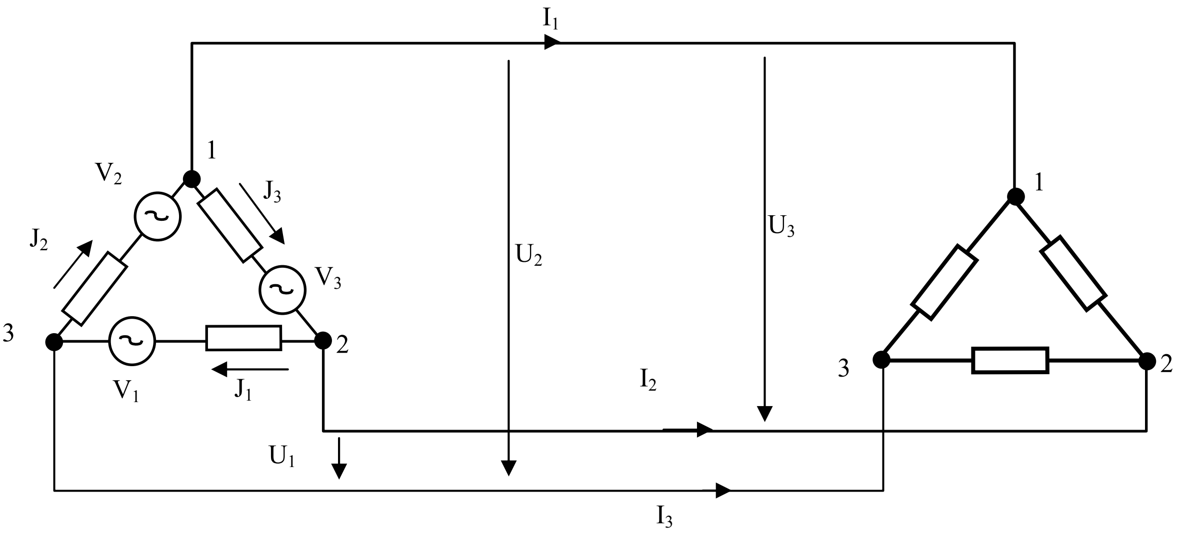
<u>Exemple</u> :

- 120/208 V,
- 347/600 V,
- 14,4 kV/25kV,
- 424 kV/735 kV

<u>Montage triangle</u>



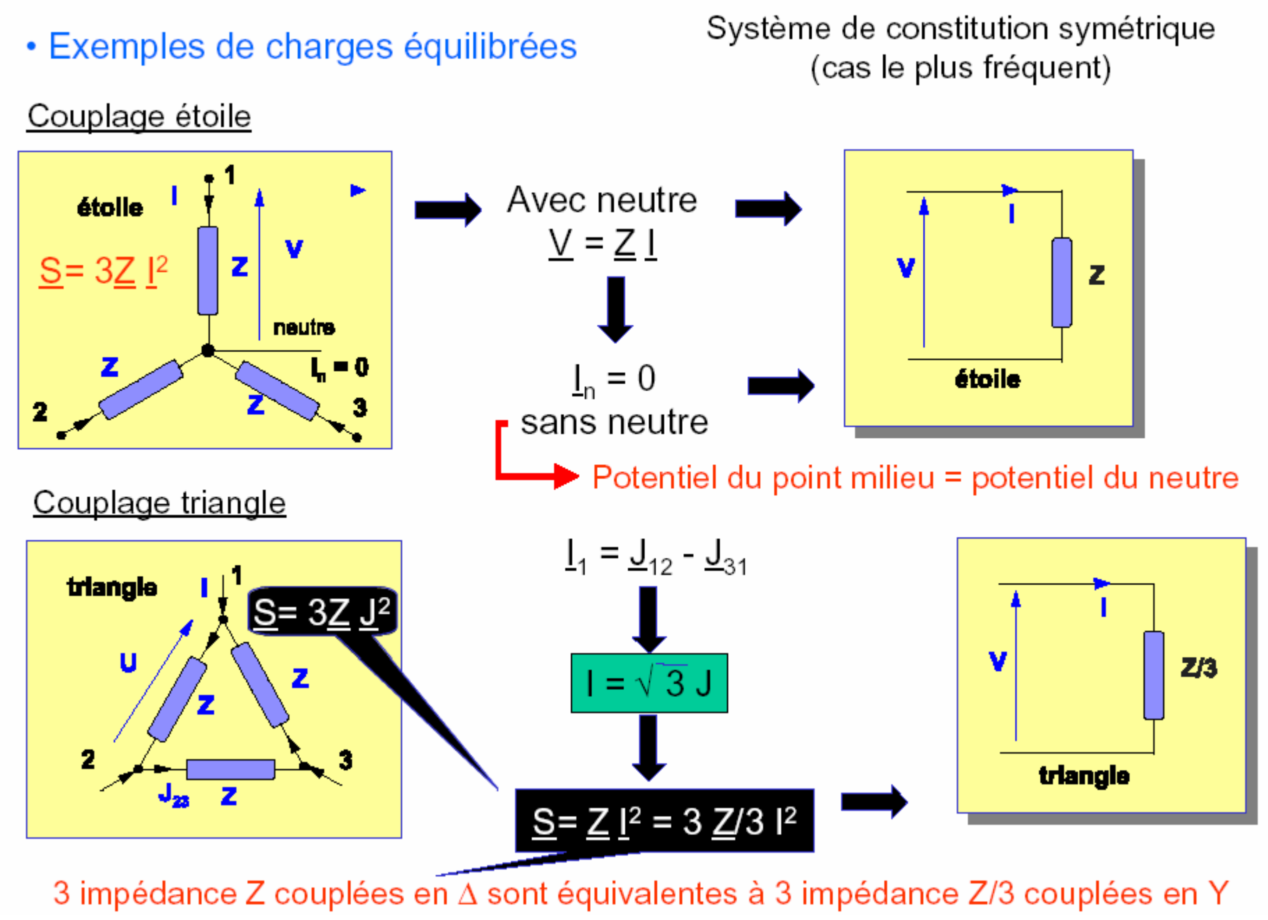




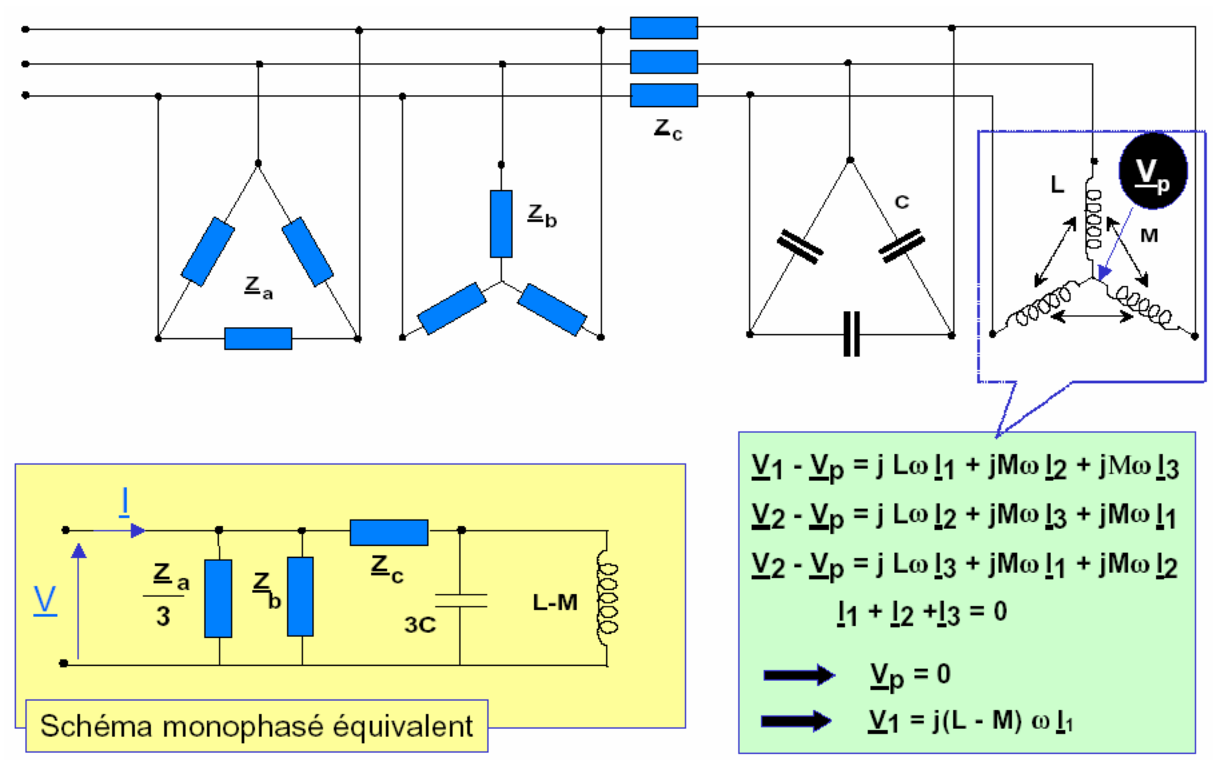
$U_1 = V_1$ | mais | $I_1 = J_1 - J_3$
$U_2 = V_2$ | | $I_2 = J_3 - J_1$
$U_3 = V_3$ | | $I_3 = J_1 - J_2$

En faisant le même calcul que les tensions en montage étoile, on obtient : $\boxed{I = J\sqrt{3}}$

$$\boxed{U = V}$$



Exemple de réduction de réseau:



6. Puissance dans les systèmes triphasés :

6.1 Systèmes équilibrés

a) Puissance instantanée

On a un système de trois tensions équilibrés V_1, V_2, V_3 créant les 3 courants équilibrés J_1, J_2 et J_3.

$v_1(t)=V_m\cos\omega t$ $v_2(t)=V_m\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$ $v_3(t)=V_m\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)$	et	$J_1(t)=J_m\cos(\omega t-\phi)$ $J_2(t)=J_m\cos\left(\omega t-\phi-\frac{2\pi}{3}\right)$ $J_3(t)=J_m\cos\left(\omega t-\phi-\frac{4\pi}{3}\right)$

Où $\phi = (J_i, V_i)$.
Soit P la puissance instantanée du système triphasé :
$P = \Sigma P_i = V_1J_1 + V_2J_2 + V_3J_3$
$V_1J_1 = V_mJ_m \cos \omega t \,.\, \cos (\omega t - \phi)$
$V_1J_1 = VJ \cos \phi + VJ\cos (2\omega t - \phi)$
$V_2J_2 = VJ \cos \phi + VJ\cos (2\omega t - \phi - 2\pi/3)$
$V_3J_3 = VJ \cos \phi + VJ\cos (2\omega t - \phi - 4\pi/3)$
D'où : $P = 3VJ \cos \phi$: puissance instantanée
P est constante car il y a au total compensation de la puissance fluactuante, bien que celle-ci existe sur chaque phase.

b) Puissance actice : $P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = 3VJ\cos\phi = p$ $\boxed{\mathbf{P = 3VJ\cos\phi}}$

Remarque : la puissance active se confond avec la puissance instantanée.

La puissance réactive correspondante : $\boxed{\mathbf{Q = 3VJ \sin \phi}}$

c) Expression en fonction des grandeurs lignes

Montage étoile	Montage triangle
$U = \sqrt{3}\ V$ et $I = J$	$I = J \sqrt{3}$ et $U = V$
$\mathbf{P = \sqrt{3}\ U\ I \cos \phi}$ $\mathbf{Q = \sqrt{3}\ U\ I \sin \phi}$	

Puissance apparente : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$\boxed{\mathbf{S = \sqrt{3}\ U\ I}}$$

Remarque : Les expressions de P, Q, S en fonction des grandeurs lignes sont indépendantes du couplage des phases.

7- RÉCAPITULATIF : PUISSANCES ACTIVES ET RÉACTIVES

	P (W)	**Q(VAR)**	**$\underline{S}$(VA)**
R	**$R I^2$; V^2/R**	**0**	**$R I^2$ ou V^2/R**
L	**0**	**$L\omega I^2$; $V^2/L\omega$**	**$j L\omega I^2$; $jV^2/L\omega$**
C	**0**	**$-C\omega V^2$; $-I^2/C\omega$**	**$-j C\omega V^2$; $-jI^2/C\omega$**
$\underline{Z} = R + j X$	**$R I^2$**	**$X I^2$**	**$\underline{Z} I^2$**
$\underline{Y} = G + j B$	**$G V^2$**	**$-B V^2$**	**$-\underline{Y} V^2$**

Éléments réactifs

Note:

Les expressions du tableau donnent les puissances absorbées par un élément qui est traversé par un courant I ou soumis à une tension V.

R résistance et X réactance sont exprimées en ohm (Ω). X peut avoir une valeur négative (dipôle à dominante capacitive).

G conductance et B susceptance sont exprimées en siemens (S).

Annexe : rappel des formules trigonométriques

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cos x + \cos y = 2 \cos[(x+y)/2].\cos[(x-y)/2]$
$\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x \sin y$	$\cos x - \cos y = -2 \sin[(x+y)/2].\sin[(x-y)/2]$
$\cos(x - y) = \cos x.\cos y + \sin x \sin y$	$\sin x + \sin y = 2 \sin[(x+y)/2].\cos[(x-y)/2]$
$\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \cos x \sin y$	$\sin x - \sin y = 2 \cos[(x+y)/2].\sin[(x-y)/2]$
$\sin(x - y) = \sin x.\cos y - \cos x \sin y$	$tg(-x) = -tg(x)$
$\sin(2x) = 2 \sin x.\cos x$	$tg(x+y) = [tg(x) + tg(y)]/[1 - tg(x)tg(y)]$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$	$tg(x-y) = [tg(x) - tg(y)]/[1 + tg(x)tg(y)]$
$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x. \cos y$	$tg(2x) = 2tg(x)/[1 - tg^2 (x)]$
$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x. \sin y$	$1 + tg^2 (x) = 1/\cos^2 x$
$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x. \cos y$	$\cos(2x) = [1 - tg^2 (x)]/ [1 - tg^2 (x)]$
$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x. \mathrm{Sin}\, y$	$\sin(2x) = [2tg(x)]/ [1 + tg^2 (x)]$