وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة الأخضر – الوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

مقياس: الجبر 1

لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي

الفصل الثاني:

العلاقات الثنائية - التطبيقات

مسؤول المقياس :د. الأمين قـــــــده

السنة الجامعية 2021/2020

I. العلاقات الثنائية (Relations binaires)

عموميات:

E و F مجموعتان تختلفان عن $\emptyset$.

I. تعريف : نسمي علاقة ثنائية مجموعة بدئها E و مجموعة وصولها F كل جملة مفتوحة $\mathcal{R}(x,y)$ معرفة على الجداء الديكارتي $E \times F$.

تتحدد علاقة ثنائية بإعطاء مجموعتي بدئها ووصولها و الجملة $\mathcal{R}(x,y)$

$\mathcal{R}(x,y)$: تُقرأ الثنائية (x,y) تحقق العلاقة R ونكتبها أحيانا xRy .

مثال: $E = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ $F = \{-8,-4,-7,1,13\}$ ولتكن العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بين E و F المعرفة بما يلي: $\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow y = x^2 - 8$.

نلاحظ أن الثنائيات $(0,-8)$, $(-1,-7)$, $(2,-4)$ جميعها تحقق العلاقة $\mathcal{R}$ لأن

$-8 = (0)^2 - 8$ و $-7 = (-1)^2 - 8$ و $-4 = (2)^2 - 8$.

وأن $(1,-4)$, $(3,13)$ لا تحقق $\mathcal{R}$ أي لأن $-4 \neq (1)^2 - 8$ و $13 \neq (3)^2 - 8$ أي أن القضايا $\mathcal{R}(1,-4)$ $\mathcal{R}(3,13)$ خاطئة.

II. بيان العلاقة $\mathcal{R}$: هو مجموعة الثنائيات التي تحققها أي

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in E \times F;\ \ \mathcal{R}(x,y)\}.$$

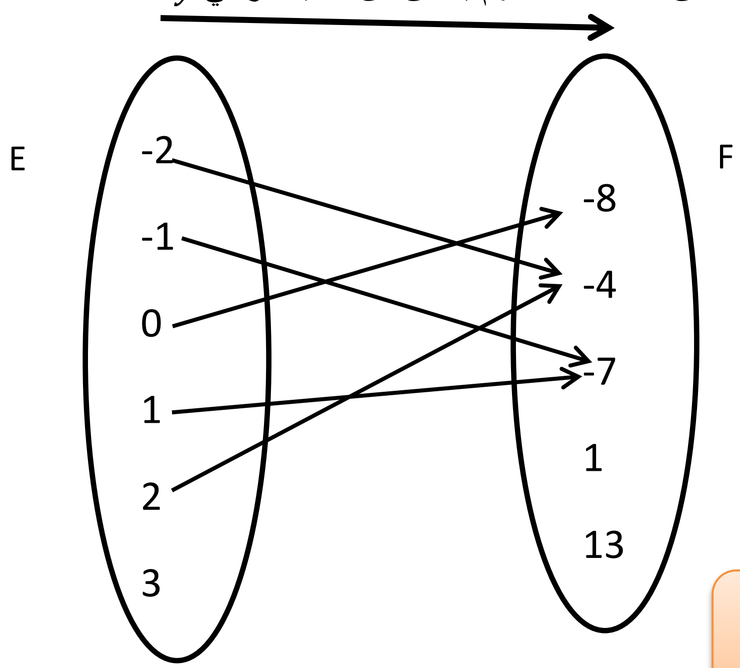
$(x,y) \notin \Gamma_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{R}(x,y)}$

مثال: بيان العلاقة المعرفة في المثال السابق هو

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(-2,-4),(-1,-7),(0,-8),(1,-7),(2,-4)\}.$$

المخطط السهمي لعلاقة : تمثل كل ثنائية (x,y) تحقق العلاقة $\mathcal{R}$ بسهم ينطلق من x ليستقر في y.

العلاقة في المثال السابق مخططها السهمي هو



III. العلاقة العكسية للعلاقة $\mathcal{R}$:

هي العلاقة الثنائية $\mathcal{R}^{-1}$ التي مجموعة بدئها F و مجموعة وصولها E والمعرفة كما يلي :

$$\forall (x,y) \in E \times F;\ \mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}(x,y)$$

حسب *هذا التعريف فإن بيان* $\mathcal{R}^{-1}$ هو

$$\Gamma_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(y,x) \in F \times E;\ \ \mathcal{R}(x,y)\}$$

$(x,y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (y,x) \in \Gamma_{\mathcal{R}^{-1}}$

مثال : بيان العلاقة العكسية لـ $\mathcal{R}$ في المثال السابق هو

$\Gamma_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(-4,-2),(-7,-1),(-8,0),(-7,1),(-4,2)\}$.

II. التطبيقات $(Applications)$

1. تعريف : نسمي تطبيقا f للمجموعة E في المجموعة F كل علاقة ترفق بكل عنصر x من E عنصرا وحيدا y من F . ونكتب اختصارا:

في المخطط السهمي لتطبيق كل عنصر من مجموعة البدء ينطلق منه سهم وحيد فقط

$$f : E \to F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

E و F : مجموعتا البدء والوصول بهذا الترتيب . y هي صورة x بالتطبيق f و x هي سابقة y.

2. أمثلة

1)في المثال المذكور أعلاه العلاقة $\mathcal{R}$ ليست تطبيقا لـ E في F لأن العنصر 3 ليس له صورة.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3x + 2$ هو تطبيق لـ $\mathbb{R}$ في نفسها لأن لكل عدد حقيقي x صورة وحيدة $y = 3x + 2 \in \mathbb{R}$ نثبت وحدانية الصورة . ليكن x, x' عددان حقيقيان

$$x = x' \Rightarrow 3x = 3x'$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = 3x' + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x')$$

3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ليس تطبيقا لأن الأعداد الحقيقية $x \in]-1;2[$ ليس لها صور بالعلاقة g.

4) العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ من المجموعة $E = [-2,2]$ نحو المجموعة $\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ ليست تطبيقا لأن لكل $x \in [-2,2]$ صورتان في $\mathbb{R}$ هما $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

5) $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ حيث $h[(n,m)] = \frac{n+m}{2}$ ليس تطبيق لأن $(3,8)$ ليس لها صورة حيث أن $\frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$.

6) $Id_E : E \to E$ حيث $Id_E(x) = x$ هو تطبيق للمجموعة E في نفسها يسمى التطبيق المطابق $(Application\ identique\ sur\ E)$.

3. أنواع التطبيقات

ليكن $f : E \to F$ تطبيق .

a) التطبيق المتباين*(Application injective)*: نقول أن f متباين (أو فقط تباين) اذا حقق:

$$\forall(x,x') \in E^2; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

أو بصيغة أخرى (نأخذ العكس النقيض للاستلزام)

$$\forall(x,x') \in E^2; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

لإثبات أن f تطبيق غير متباين يكفي إيجاد مثال مضاد يتمثل في عنصرين مختلفين من E لهما نفس الصورة

مثال1 : في المثال 1) السابق التطبيق f متباين لأن : من أجل $(x,x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

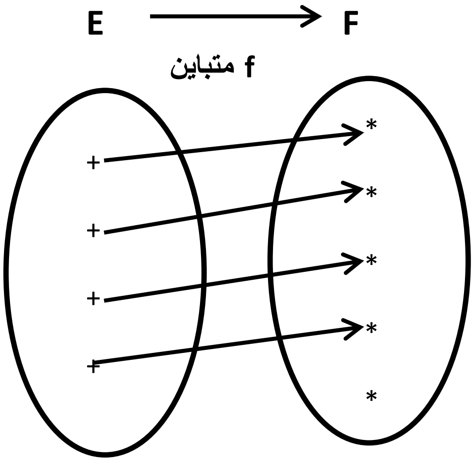
$$f(x) = f(x') \Rightarrow 3x + 2 = 3x' + 2$$

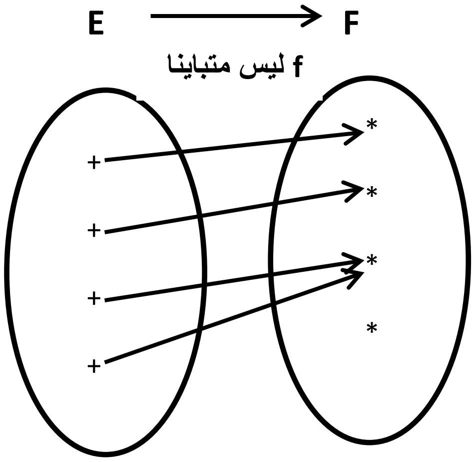
$$\Rightarrow 3\mathrm{x} = 3\mathrm{x}'$$

$$\Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{x}'\,.$$

مثال 2: التطبيق $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 - 2x$ ليس متباينا لأن :

$g(1) = g\left(\frac{-1}{3}\right) = 1$ أي أنه يوجد على الأقل عددان حقيقيان مختلفان و لهما نفس الصورة بصيغة أخرى $\exists(x,x') \in \mathbb{R}^2; f(x) = f(x') \land x \neq x'$.





b) التطبيق الغامر:*(Application surjective)* نقول أن f غامر (أو فقط غمر) اذا حقق:

$$\forall y \in F, \exists x \in E;\ \ f(x) = y$$

أي أن المعادلة $f(x) = y$ تقبل على الأقل حلا $x \in E$ من أجل كل $y \in F$.

مثال 1): التطبيق $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 - 2x$ نلاحظ أنه يمكن أن نكتب

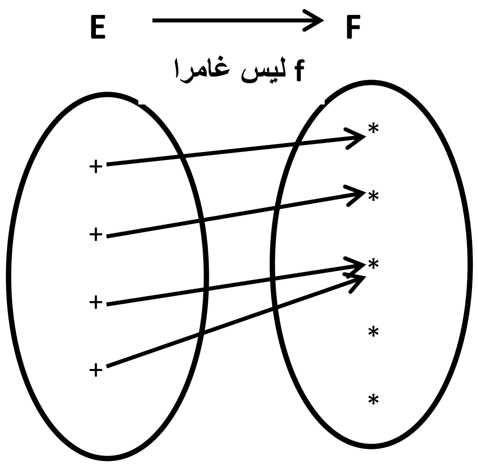
$$\forall x \in \mathbb{R};\ \ g(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$$

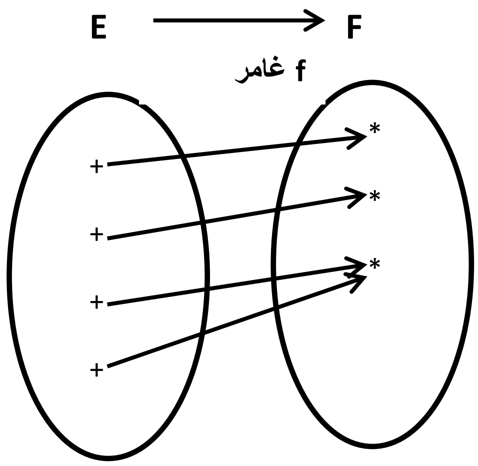
وبالتالي من أجل $y = -1$ المعادلة $g(x) = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ أي أن -1 ليس له سابقة بالتطبيق وعليه فإن g ليس غامرا (هنا كل الأعداد الأقل من $-\frac{1}{3}$ تماما ليس لها سوابق).

مثال 2) $h:\mathbb{R}\to\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ حيث $h(x)=3x^2-2x$ هو تطبيق غامر لأنه من أجل $y\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ كيفي

$$h(x)=y\Rightarrow 3x^2-2x=y\Rightarrow 3x^2-2x-y=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=4(1+3y)\geq 0$ لأن $y\geq -\frac{1}{3}$ ومن للمعادلة السابقة حلين متمايزين أو متساويين هما : $x=\frac{1-\sqrt{1+3y}}{3}$ و $x'=\frac{1+\sqrt{1+3y}}{3}$. أي أن لكل عنصر من مجموعة الوصول سابقة أو أكثر.





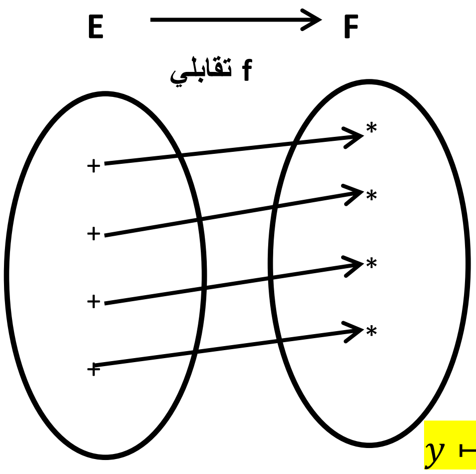
c) التطبيق التقابلي:$(Application\ bijective)$ اذا كان التطبيق f متباينا وغامرا في نفس الوقت نسميه تطبيقا تقابليا(أو فقط تقابل).

وفي هذه الحالة فإن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا $x\in E$ من أجل كل $y\in F$.

مثال: التطبيق $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=lnx$ هو تطبيق تقابلي لأنه من أجل $x,x'\in]0;+\infty[$

$lnx=lnx'\Rightarrow x=x'$ ومنه f متباين . ومن أجل كل $y\in\mathbb{R}$

$lnx=y\Rightarrow x=\exp(y)$ وبالتالي f غامر.



التطبيق العكسي لتطبي تقابل $(Application\ reciproque)$

اذا كان $f:E\to F$ تطبيقا تقابليا فإنه يقبل تطبيق عكسيا نرمز له بـ f^{-1}

معرف كما يلي :

$f^{-1}:F\to E$

$y\mapsto f^{-1}(y)=x=$ سابقة y بالتطبيق f

مثال: في المثال السابق التطبيق العكسي للتطبيق ln هو التطبيق

$ln^{-1} = exp: \mathbb{R} \to]0; +\infty[$ حيث $exp(y) = x \Leftrightarrow y = lnx$

.

لحساب $f^{-1}(y)$ صورة y بالتطبيق العكسي نحل المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x أي نحسب y بدلالة x.

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

4. تركيب التطبيقات:

مركب التطبيقين $f: E \to F$ و $g: F \to G$ بهذا الترتيب هو التطبيق الذي نرمز له بـ $g \circ f$ والمعرف بما يلي: $g \circ f: E \to G$ حيث $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

$$E \to F \to G$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)]$$

تركيب تطبيقين عملية غير ممكنة الا اذا كانت مجموعة وصول الأول تساوي مجموعة بدء الثاني

ملاحظة : بصفة عامة $g \circ f \neq f \circ g$.

مركب تطبيق تقابلي وتطبيقه العكسي: $f: E \to F$ تطبيق تقابلي تطبيقه العكسي $f^{-1}: F \to E$.

ومنه: $f \circ f^{-1}: F \longrightarrow F$ بحيث : $f \circ f^{-1}(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$

و: $f^{-1} \circ f: E \longrightarrow E$ بحيث: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[y] = x$

نتيجة: مركب تطبيق مع تطبيقه العكسي هو التطبيق المطابق. أي أن

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{و} \quad f^{-1} \circ f = Id_E$$

تمرين محلول: يعطى التطبيق $f: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ حيث $f(x) = \frac{3x-2}{x-4}$ بين أن f تطبيق تقابلي وعين تطبيقه العكسي f^{-1} ثم حدد التطبيقات : $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$.

الحل: نثبت أن f متباين . ليكن x, x' عددان حقيقيا ن يختلفان عن 4

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow \frac{3x - 2}{x - 4} = \frac{3x' - 2}{x' - 4}$$

$$\Longrightarrow (3x - 2)(x' - 4) = (x - 4)(3x' - 2)$$

$$\Longrightarrow 3xx' - 12x - 2x' + 8 = 3xx' - 2x - 12x' + 8$$

$$\Longrightarrow -10x = -10x' \Longrightarrow x = x'$$

ومنه f متباين. ليكن $y \neq 3$ لنحل المعادلة $f(x)=y$ باعتبار x هو المجهول

$$f(x)=y \Longrightarrow \frac{3x-2}{x-4}=y$$

$$\Longrightarrow 3x-2=y(x-4)$$

$$\Longrightarrow 3x-2=yx-4y$$

$$\Longrightarrow 3x-yx=2-4y$$

$$\Longrightarrow x(3-y)=2-4$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2-4y}{3-y} \quad \text{لأن } (y\neq 3)$$

في عبارة التطبيق يمكن استبدال رمز المتغير بأي رمز آخر وعادة ما نستخدم x كرمز للمتغير المستقل و y كرمز للمتغير التابع

وبالتالي فإن f غامر *وبما أنه متباين كذلك فهو تقابلي و تطبيقه العكسي* هو

$f^{-1}\colon \mathbb{R}-\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{4\}$ حيث $f^{-1}(y)=\frac{2-4y}{3-y}$

من أجل كل $y\neq 3$ نجد

$$f\circ f^{-1}(y)=\frac{3f^{-1}(y)-2}{f^{-1}(y)-4}=\frac{3\left(\frac{2-4y}{3-y}\right)-2}{\left(\frac{2-4y}{3-y}\right)-4}=\frac{3(2-4y)-2(3-y)}{(2-4y)-4(3-y)}=\frac{-10y}{-10}=y$$

ومنه $f\circ f^{-1}=Id_{\mathbb{R}-\{3\}}$ ومن أجل كل $x\neq 4$ نجد

$$f^{-1}\circ f(x)=\frac{2-4f(x)}{3-f(x)}=\frac{2-4\left(\frac{3x-2}{x-4}\right)}{3-\left(\frac{3x-2}{x-4}\right)}=\frac{2(x-4)-4(3x-2)}{3(x-4)-(3x-2)}$$

$$=\frac{-10x}{-10}=x$$

ومنه $f^{-1}\circ f=Id_{\mathbb{R}-\{4\}}$.

5. تساوي تطبيقين: يتساوى التطبيقان $f\colon E\to F$ و $g\colon H\to G$ اذا تحقق ما يلي:

a) $E=H$ و $F=G$.

b) $\forall x\in E;\ f(x)=g(x)$.

في التمرين السابق $f^{-1}\circ f\neq f\circ f^{-1}$ لأن اشرط الأول غير محقق.

اقتصار تطبيق على مجموعة : ليكن التطبيق $f\colon E\to F$ و D مجموعة جزئية من E بحيث $D\neq E$.

تعريف : التطبيق $g: D \to F$ الذي يحقق $\forall x \in D;\ g(x) = f(x)$ يسمى اقتصار التطبيق f على المجموعة D ونرمز له بـ $f/_D$.

واذا كانت S مجموعة تحوي E تماما أي أن $E \subset S$ بحث $E \neq S$. فإن التطبيق $g: S \to F$ الذي يحقق $\forall x \in E;\ g(x) = f(x)$ يسمى امتداد التطبيق f إلى S.

مثال :ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = |x-3| + |x+1| - 2$.

بكتابة $f(x)$ بدون استعمال رمز القيمة المطلقة نستنتج أن التطبيقات $g_1:]-\infty; -1[\ \to \mathbb{R}$ حيث $g_1(x) = -2x - 4$, $g_2: [-1; 3] \ \to \mathbb{R}$ حيث $g_2(x) = 2$ و $g_3:]3; +\infty[\ \to \mathbb{R}$ حيث $g_3(x) = 2x - 4$ هي اقتصارات للتطبيق f على المجالات $]-\infty; -1[$, $[-1; 3]$ و $]3; +\infty[$ بهذا الترتيب و نكتب اختصارا :

$$g_1 = f/_{]-\infty; -1[} \ ،\ g_2 = f/_{[-1; 3]} \quad g_3 = f/_{]3; +\infty[} .$$

6. الصورة المباشرة الصرة العكسية لمجموعة بواسطة تطبيق:

ليكن $f: E \to F$ و A مجموعة جزئية من E و B مجموعة جزئية من F.

- مجموعة صور عناصر A بالتطبيق f تسمى الصورة المباشرة للمجموعة A بالتطبيق f ورمزها $f(A)$ ونكتب اختصارا

$$f(A) = \{f(x) \in F;\ \ x \in A\}$$

- مجموعة سوابق عناصر B بالتطبيق f تسمى الصورة العكسية للمجموعة B بالتطبيق f ورمزها $f^{-1}(B)$ ونكتب اختصارا

$$f^{-1}(B) = \{x \in E;\ \ f(x) \in B\}$$

مثال: في حالة التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = sinx$ والمجموعات

$$B = \left\{0, \tfrac{1}{2}\right\} \quad , \quad A = \left\{\tfrac{\pi k}{4}\ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f(A) = \left\{sin\frac{\pi k}{4} \in \mathbb{R};\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{sin\frac{\pi k}{4}; k = 0,1,2,3,4,5,6,7\right\}$$

$$= \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right\}$$

$f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

عناصر الصورة العكسية لمجموعة B بالتطبيق f تمثل حلول المعادلات $f(x) = b$ عندما b يمسح المجموعة B

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in \mathbb{R};\ \ f(x) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R};\ \ (sinx = 0) \vee \left(sinx = \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

III. العلاقة في مجموعة

1. تعريف :العلاقة في مجموعة E هي كل علاقة ثنائية $\mathcal{R}$ مجموعتي بدئها ووصولها تساويان E.

أمثلة : 1) العلاقة " ...قاسم لـــ...." رمزها "..../...." والمعرفة في المجموعة $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$b/a \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*;\ a = m.b$$

$13/91$ لأن $91 = 7 \times 13$ لكن 8 ليس قاسما لـ 25 لأن: $\forall m \in \mathbb{N}^*; 25 \neq m.8$.

2) العلاقة "...أصغر أو يساوي...." ورمزها "..≤..." والمعرفة في $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$a \leq b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{R}\_$$

3) الموافقة بترديد عدد طبيعي $n > 1$ معطى و رمزها $\equiv$ والمعرفة في $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ \ a - b = k.n$$

مثلا: نأخذ= $n = 7$. نلاحظ أن $48 \equiv -1[7]$ لأن $48 - (-1) = 49 = 7.7$.

2. خواص العلاقة في مجموعة : $\mathcal{R}$ علاقة في مجموعة E.

a) العلاقة الانعكاسية: (relation réflexive)

نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة انعكاسية اذا حـــققت: $\forall x \in E; \mathcal{R}(x,x)$

$\mathcal{R}$ انعكاسية تعني أن كل عنصر يحقق العلاقة $\mathcal{R}$ مع نفسه

b) العلاقة التناظرية:(relation symétrique)

نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة تناظرية اذا حـــققت:

$$\forall (x,y) \in E^2;\ \ \mathcal{R}(x,y) \Longrightarrow \mathcal{R}(y,x)$$

$\mathcal{R}$ تناظرية تعني أنه اذا حققت ثنائية (x,y) العلاقة $\mathcal{R}$ فإن نظيرتها(y,x) تحققها كذلك.

c) العلاقة المتعدية: (relation transitive)

نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة متعدية اذا حـــققت:

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E;\ \mathcal{R}(x,y) \wedge\ \ \mathcal{R}(y,z) \Longrightarrow \mathcal{R}(x,z)$$

d)العلاقة ضد التناظرية: (relation antysémetriqe)

نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة ضد تناظرية اذا حـــققت:

$$\forall (x,y) \in E^2;\ \ \mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y,x) \Longrightarrow x = y$$

$\mathcal{R}$ ضد تناظرية تعني أنه لا يمكن لـ(x,y) و (y,x) أن تحققا معا العلاقة $\mathcal{R}$ إلا في حالة $x = y$

أمثلة 1) العلاقة "....قاسم لـ...." في $\mathbb{N}^*$

- انعكاسية لأن كل عدد طبيعي غير معدوم قاسم لنفسه حيث $\forall x \in \mathbb{N}^*; x = 1.x$.

- ليست تناظرية لأن : $\exists (x,y) \in \mathbb{N}^{*2}\ ; \big(y$ قاسم لـ $x\big) \wedge \big(x$ ليس قاسم لــ $y\big)$

يكفي أن نأخذ $x = 3$ و $y = 12$ واضح أن 3 قاسم لـ 12 و 12 ليس قاسما لـ3 .

- ضد تناظرية لأن : من أجل (x,y) ثنائية كيفية من $\mathbb{N}^{*2}$

نفرض أن $\mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y,x)$ ونبت أن $x = y$

$$\mathcal{R}(x,y) \Longrightarrow x/\mathrm{y} \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^{*}; y = mx \,.........(1)$$

$$\mathcal{R}(y,x) \Longrightarrow y/\mathrm{x} \Longrightarrow \exists m' \in \mathbb{N}^{*}; x = m'y \,.........(2)$$

بضرب المساوتين (1) و (2) نجد $yx = mm'xy$ ومنه $mm' = 1$ لأن $yx \neq 0$ وبما أن m و m' أعداد طبيعية فإن: $m = m' = 1$ أي أن $x = y$.

- متعدية لأن من أجل $x, y\ , z$ من $\mathbb{N}^{*}$ نفرض أن $\mathcal{R}(x,y) \wedge \ \mathcal{R}(y,z)$ ونثبت أن $\mathcal{R}(x,z)$.

$$\mathcal{R}(x,y) \Longrightarrow x/\mathrm{y} \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^{*}; y = mx \,.........(3)$$

$$\mathcal{R}(y,z) \Longrightarrow y/\mathrm{z} \Longrightarrow \exists m' \in \mathbb{N}^{*}; z = m'y \,.........(4)$$

بالتعويض عن y من(3) في (4) نجد : $z = m'mx$ ومنه x/z

(يكفي وضع $m'm = m'' \in \mathbb{N}^{*}$).

2) العلاقة $\leq$ في $\mathbb{R}$ يمكن إثبات أنها انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية لكنها ليست تناظرية (استخدم نفس المنهجية السابقة في الاثبات).

3) العلاقة " $<$" (.... أصغر تماما ...) في $\mathbb{R}$ ليست انعكاسية لأن : $2 < 2$ قضية خاطئة.

ليست تناظرية لأن $2 < 3 \Longrightarrow 3 < 2$ قضية خاطئة . لكنها متعدية لأن :

$x < y \wedge y < z \Longrightarrow x < z$.

4) علاقة الموافقة بترديد عدد طبيعي $n > 1$ في $\mathbb{Z}$

- علاقة انعكاسية لأن :

$\forall x \in \mathbb{Z}; x - x = 0 = 0.n$ ومنه $\forall x \in \mathbb{Z}; x \equiv x[n]$.

- علاقة تناظرية لأن:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ a \equiv b[n] \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ \ a - b = k.n$$

$$\Longrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z};\ \ b - a = k'.n$$

$$\Longrightarrow b \equiv a[n]$$

حيث $k' = -k$

- علاقة متعدية لأن : من أجل a, b,c 3 أعداد صحيحة

$$a \equiv b[n] \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ \ a - b = k.n \,.........(3')$$

$b \equiv c[n] \Longrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z};\ b - c = k'.n$.........(4')

بجمع (3') و(4') نجد $a - c = (k + k').n$ ومنه $a \equiv c[n]$ لأن $k + k' \in \mathbb{Z}$.

5) علاقة الاحتواء في مجموعة أجزاء مجموعة كيفية E و رمزها "$\subset$" هي علاقة

- انعكاسية لأن $\forall A \in P(E);\ A \subset A$.
- ضد تناظرية لأن $\forall A, B \in P(E);\ (A \subset B) \land (B \subset A) \Longrightarrow A = B$. (تعريف تساوي مجموعتين)
- متعدية لأن $\forall A, B, C \in P(E);\ (A \subset B) \land (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$.

ملاحظة: بفرض أن $\Gamma_{\mathcal{R}}$ هو بيان العلاقة و أن $\Delta = \{(x, y) \in E \times E;\ x = y\}$.

$\mathcal{R}$ علاقة انعكاسية $\Leftrightarrow \Delta \in \Gamma_{\mathcal{R}}$

$\mathcal{R}$ علاقة تناظرية $\Leftrightarrow \forall\ (x, y) \in E^2;\ (x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \Longrightarrow (y, x) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$

$\mathcal{R}$ علاقة ضد تناظرية $\Leftrightarrow \forall\ (x, y) \in E^2;\ (x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \land (y, x) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \Longrightarrow (x, y) \in \Delta$

3. علاقة التكافؤ: $\mathcal{R}$ علاقة في المجموعة E

a) تعريف: نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ اذا كانت : انعكاسية وتناظرية و متعدية.

أمثلة:

- علاقة الموافقة بترديد العدد الطبيعي $n = 3$ هي علاقة تكافؤ في المجموعة $\mathbb{Z}$. (أنظر الأمثلة السابقة).
- العلاقة "...يوازي..." ورمزه $\parallel$ في مجموعة مستقيمات المستوي هي علاقة تكافؤ (يمكن ملاحظة الخواص الثلاثة بسهولة).
- في مجموعة المجموعات المنتهية العلاقة المعرفة بـ

$$\mathcal{R}(A, B) \Leftrightarrow cardA = CardB$$

هي علاقة تكافؤ رمزها #. (عدد عناصرالمجموعة A = $cardA$).

b) صنف تكافؤ عنصر: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في المجموعة E , ليكن a ∈ E .

صنف تكافؤ العنصر a هو مجموعة العناصر من E التي تحقق العلاقة $\mathcal{R}$ مع a ورمزه $\dot{a}$ ونكتب اختصارا:

$$\dot{a} = \{x \in E;\ \mathcal{R}(x, a)\}$$

مثال: 1- علاقة الموافقة بترديد $n = 3$ في $\mathbb{Z}$ (هي علاقة تكافؤ كما رأينا).

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{Z};\ \ x \equiv a[3]\} = \{x - a = 3k;\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{x = a + 3k;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

صنف تكافؤ العدد 0 هو: $\dot{0} = \{ x = 3k;\ k \in \mathbb{Z} \} = \{\dots \dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

صنف تكافؤ العدد 1هو: $\dot{1} = \{ x = 1 + 3k;\ k \in \mathbb{Z} \} = \{\dots \dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

صنف تكافؤ العدد 2هو: $\dot{2} = \{ x = 2 + 3k;\ k \in \mathbb{Z} \} = \{\dots \dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

نلاحظ أن صنف تكافؤ كل عدد صحيح هو أحد الأصناف الثلاثة السابقة مثلا : $\dot{0} = \dot{3} = \dot{6} = \dot{-3}$

وان $\dot{1} = \dot{4} = \dot{7}$.

خواص:

1) $\dot{a} \neq \emptyset$ (لأن $\mathcal{R}$ انعكاسية وبالتالي فإن $\mathcal{R}(a, a)$ أي أن $a \in \dot{a}$).

2) $\mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow \dot{a} = \dot{b}$

3) $\forall (a, b) \in E^2; (\dot{a} = \dot{b}) \vee (\dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset)$

الاثبات: 2) $\Rightarrow$ نفرض أن : $\mathcal{R}(a, b)$ ونثبت أن $\dot{a} = \dot{b}$.

$x \in \dot{a} \Longrightarrow \mathcal{R}(x, a)$ (حسب تعريف صنف تكافؤ عنصر)

$\Longrightarrow \mathcal{R}(x, b)$ (حسب الفرضية $\mathcal{R}(a, b)$ وخاصية العلاقة المتعدية)

$\Longrightarrow x \in \dot{b}$ (حسب تعريف صنف تكافؤ عنصر)

ومنه $\dot{a} \subset \dot{b}$.

$\Leftarrow$ نستخدم نفس المنهجية لإثبات أن $\dot{b} \subset \dot{a}$ مع استخدام خاصيتي العلاقة التناظرية والمتعدية.

ومنه $\dot{a} = \dot{b}$.

3) نفرض أن $(\dot{a} \neq \dot{b}) \wedge (\dot{a} \cap \dot{b} \neq \emptyset)$ أي أنه يوجد على الأقل $x \in \dot{a} \cap \dot{b}$

$$x \in \dot{a} \cap \dot{b} \Leftrightarrow (x \in \dot{a}) \wedge (x \in \dot{b})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}(a, x) \wedge \mathcal{R}(x, b)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{R}(a, b) \Longrightarrow \dot{a} = \dot{b}$$

وهذا تناقض مع $\dot{a} \neq \dot{b}$ ومنه صحة 3).

c) مجموعة حاصل القسمة لعلاقة التكافؤ: هي مجموعة كل أصناف التكافؤ وفق علاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ في E . ورمزها $E/_{\mathcal{R}}$ ونكتب اختصار ا$E/_{\mathcal{R}} = \{\dot{a};\ \ a \in E\}$.

مثال: مجموعة حاصل القسمة لعلاقة الموافقة بترديد 3 هي $\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}} = \{\,\dot{0},\dot{1},\dot{2}\,\}$ ورمزها $\frac{\mathbb{Z}}{3.\mathbb{Z}}$ أو $\frac{\mathbb{Z}}{[3]}$.

نتيجة : مجموعة حاصل القسمة $E/_{\mathcal{R}}$ تشكل تجزئة لـلمجموعة E

لأنه و حسب الخواص 1) و3) فإن كل صنف تكافؤ غير خال وان كل صنفين مختلفين منفصلان. بقي اثبات أن $\bigcup_{a\in E} \dot{a} = E$.

لدينا $\bigcup_{a\in E} \dot{a} \subset E$ لأن : $\forall a \in E;\ \ \dot{a} \subset E$. من جهة أخرى

$$x \in E \Longrightarrow x \in \dot{x} \ \Longrightarrow x \in \bigcup_{a\in E} \dot{a}$$

اذا $E \subset \bigcup_{a\in E} \dot{a}$ ومنه $\bigcup_{a\in E} \dot{a} = E$.

4. علاقة الترتيب:

تعريف: نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب في المجموعة E اذا كانت :انعكاسية وضد تناظرية و متعدية.

أمثلة : 1) "...قاسم لـ..." هي علاقة ترتيب في $\mathbb{N}^*$.

2) "...⊂..." هي علاقة ترتيب في $P(E)$.

3) "...≤..." هي علاقة ترتيب في $\mathbb{R}$.

الترتيب الكلي والترتيب الجزئي: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب في المجموعة E.

اذا كان $\forall (x,y) \in E^2;\ \mathcal{R}(x,y) \vee \mathcal{R}(x,y)$ نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب كلي

واذا لم يكن كذلك نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب جزئي.

يكون الترتيب جزئيا اذا وجد عنصران $x\,,y$ من E بحيث: $\overline{\mathcal{R}(x,y)} \wedge \overline{\mathcal{R}(x,y)}$

مثال : العلاقة "...⊂..." في $P(E)$. هي علاقة ترتيب جزئي لأن: $\underbrace{\{1,2,5\} \not\subset \{2,3\}}_{\overline{\mathcal{R}(x,y)}}$ و $\underbrace{\{2,3\} \not\subset \{1,2,5\}}_{\overline{\mathcal{R}(x,y)}}$.

العلاقة "...≤..." في $\mathbb{R}$ هي علاقة ترتيب كلي لأننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقين بواسطتها.