Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé

(Master de mathématiques)
Université d'El-Oued

Elmehdi ZAOUCHE

Septembre 2017

Table des matières

Introduction

Le calcul différentiel apparaît naturellement dans la formulation mathématique de nombreuses théories physiques, dans les domaines les plus divers comme : mécanique, électromagnétisme, thermodynamique, optique .... Ce cours présente le calcul différentiel dans un espace vectoriel normé qui généralise de façon assez naturelle le calcul différentiel dans un espace de dimension finie, et il occupe la place de deuxième cycle de mathématiques dans les enseignements à l'Université d'El-Oued.

Chaque chapitre de ce document est constitué des notions, des exemples ainsi que des résultats qui sont accompagnés de leurs preuves dont il est difficile qui est référé.

Cet ouvrage se présente en six chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons quelques connaissances en topologie, les applications linéaires et multilinéaires continues et les isomorphismes. Le deuxième chapitre contient la notion de différentielle dont la différentielle d'une applications en un point et sur un ouvert, dérivée suivant un vecteur, opérations sur la différentiabilité et le cas d'un espace de dimension finie. Le chapitre 3 présente le thèorème des accroissements finis pour une fonction à variables réelle et sa généralisation à une application à variable dans un espace vectoriel normé, et deux applications fondamentales ce sont les applications de différentielle nulle sur les ouverts connexes et les applications de classe C^1 sur un produit cartésien. Dans le chapitre 4, on va voir la différentielle d'ordre 2 d'une application et on définit par récurrence la différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. D'ailleurs, la formule de Taylor avec reste de Young d'une application d'un ouvert U d'un espace vectoriel normé E dans un autre espace vectoriel normé F. On commence au chapitre 5 par présenter la notion du difféomorphisme de classe C^1. Ensuite, le théorème d'inversion locale qui est fondamental en analyse et ses conséquences dont le théorème des fonctions implicites. Le dernier chapitre de ce cours est consacré aux extrema que sont les extrema libres et liés où on verra des conditions nécessaires et autres suffisantes pour qu'une fonction admet des exrema.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires

1.1 Espace vectoriel normé

Dans tout ce cours les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$. Cependant, la plupart des résultats que nous verrons sont également vrais si on considère des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$. Le contenu de ce chapitre est basé sur la documentation qui se trouve dans [2], [6] et [7].

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ satisfait :*

- $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \; \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\forall x, y \in E : \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$, noté $(E, \|.\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé, en abrégé evn.

Définition 1.1.2 *Deux normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe deux constantes strictement positives α et β telles*

$$\forall x \in E : \; \alpha \|x\| \leq |||x||| \leq \beta \|x\|.$$

Remarque 1.1.1 *Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exemple 1.1.1 *Si* $E = \mathbb{R}^n$, *les applications suivante sont des normes équivalentes sur* E *:*

- $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Big)^{1/2}$,
- $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exemple 1.1.2 *Si* $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ *est l'espace des fonctions continues de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *les applications suivante sont des normes sur* E *:*

- $f \mapsto \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$,
- $f \mapsto \|f\|_2 = \Big(\int_a^b |f(t)|^2 dt \Big)^{1/2}$,
- $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

Définition 1.1.3 *Soient* E *et* F *deux evn. On appelle produit de* E *et* F, *noté* $E \times F$, *l'ensemble* $\{(x, y) \in E \times F / x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Proposition 1.1.1 *Sur* $E \times F$ *on définit les lois*

- $\forall (x, y), (s, t) \in E \times F : (x, y) + (s, t) = (x + t, y + s)$,
- $\forall (x, y) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

L'ensemble $E \times F$ *muni de ces lois est un espace vectoriel.*

Proposition 1.1.2 *Si* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux evn, les applications*

$$(x, y) \in E \times F \mapsto \|x\|_E + \|y\|_F \quad \text{et} \quad (x, y) \in E \times F \mapsto \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$$

définissent des normes sur l'espace vectoriel $E \times F$. *De plus, elles sont équivalentes sur* $E \times F$.

Remarque 1.1.2 *(généralisation)*

Si $(E_1, \|.\|_1), ..., (E_n, \|.\|_n)$ *sont des evn, les applications*

$$(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n \mapsto \|x_1\|_1 + ... + \|x_n\|_n$$

et

$$(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} (\|x_1\|_1, ..., \|x_n\|_n)$$

définissent des normes sur l'espace vectoriel $E_1 \times ... \times E_n$ et elles sont équivalentes.

Définition 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$. Soit d la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$, alors (E, d) est un espace métrique. Si (E, d) est complet, on dit que E est un espace de Banach. Si de plus la norme de E est issue d'un produit scalaire, E est dit espace de Hilbert.*

Théorème 1.1.1 *(Théorème du point fixe de Banach-Picard) Si C est un fermé non vide d'un espace de Banach E et si $f : C \to C$ est contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que*

$$\forall x, y \in C : \quad \|f(x) - f(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E$$

alors il existe un unique $c \in C$ tel que $f(c) = c$.

1.2 Applications linéaires continues

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on notera $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ou plus simplement $L(E)$ si $E = F$. C'est en fait un espace vectoriel.

Proposition 1.2.1 *Soit $f \in L(E, F)$. Alors f est continue si et seulement s'il existe une constante positive M telle que pour tout $x \in E$ on a $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.*

L'ensemble des applications linéaires continues forme un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ que l'on notera $\mathcal{L}(E, F)$. Lorsque $E = F$ on notera simplement $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 1.2.2 *Si $f \in L(E, F)$, alors on a*

$$\sup_{x \in E - \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Ces quantités sont finies si et seulement si f est continue et on note alors $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. De plus, l'application $\mathcal{L}(E, F) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1.2.3 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Proposition 1.2.4 *Soient E et F deux evn. On suppose que F est complet. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ complet pour la norme $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Proposition 1.2.5 *Soient E, F et G trois evn. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et on a $\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)}.\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

1.3 Applications multilinéaires continues

Définition 1.3.1 *Soient $E_1, ..., E_n, F$ des espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ est dite n-linéaire si pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times ... \times E_n$ l'application $f_i : E_i \to F$ définie par*

$$f_i(t) = f(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)$$

est linéaire.

Si $n = 2$ l'application f est dite bilinéaire.

Exemple 1.3.1 *Le produit scalaire sur un espace vectoriel E est une application bilinéaire.*

Proposition 1.3.1 *Soient $E_1, ..., E_n$ et F des evn et f une application n-linéaire de $E = E_1 \times ... \times E_n$ dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. f est continue sur E,

2. f est continue en 0_E,

3. f est bornée sur la boule unité fermée de E, i.e. l'ensemble $\{f(x)/\|x\|_E \leq 1\}$ est borné dans F,

4. f est bornée sur la sphère unité de E, i.e. l'ensemble $\{f(x)/\|x\|_E = 1\}$ est borné dans F,

5. Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in E$ on a

$$\|f(x)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1} ... \|x_n\|_{E_n}.$$

Proposition 1.3.2 *On note $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires continues. Soit f une application n-linéaire continue de $E = E_1 \times ... \times E_n$ dans F. Alors*

$$\sup_{\substack{x=(x_1,...,x_n)\in E \\ x_1\neq 0_{E_1},...,x_n\neq 0_{E_n}}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x_1\|_{E_1}...\|x_n\|_{E_n}} = \sup_{x\in E,\ \|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in E,\ \|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

On note $\|f\|_{\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)}$ cette valeur. De plus, l'application $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

1.4 Isomorphismes

Définition 1.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. On dit que f est un isomorphisme de E dans F si elle est linéaire continue et s'il existe une application linéaire continue $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ où Id_E(resp. Id_F) dénote l'application identique de E(resp. de F). On notera $Iso(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F. Lorsque $E = F$ on notera simplement $Iso(E)$.*

Remarque 1.4.1 *Si f est une bijection linéaire, sa réciproque est linéaire. En revanche, si f est une bijection linéaire continue, sa réciproque n'est pas forcément continue. Le théorème suivant donne une caractérisation pour que la réciproque d'une bijection linéaire continue soit continue.*

Théorème 1.4.1 *(Théorème de Banach) Soient E et F deux espaces de Banach. Toute application linéaire continue bijective $f : E \to F$ est un isomorphisme.*

Remarque 1.4.2 *Le théorème de Banach donne automatiquement la continuité de l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$.*

Théorème 1.4.2 *Soient E et F deux espaces de Banach. Alors, l'ensemble $Iso(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ et l'application $u \in Iso(E, F) \to u^{-1} \in Iso(E, F)$ est continue.*

Chapitre 2

Différentielle d'une application

2.1 Différentielle en un point et sur un ouvert

Définition 2.1.1 *Soient E et F deux e.v.n, U un ouvert de E, a un point de U et $f : U \to F$ une application. On dit que f est différentiable en a s'il existe $g_a \in \mathcal{L}(E, F)$ et une application o définie au voisinage de 0_E telles que, pour tout h assez proche de 0_E :*

$$f(a+h) - f(a) = g_a(h) + o(h) \tag{2.1}$$

et

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \tag{2.2}$$

L'application g_a est appelée la différentielle de f en a et noté $Df(a)$.

Remarque 2.1.1 *La différentielle de f en a est unique. En effet, on suppose qu'il existe une autre application $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ et une application ε définie au voisinage de 0_E telles que, pour tout h assez proche de 0_E :*

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + \varepsilon(h) \tag{2.3}$$

et

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|\varepsilon(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \tag{2.4}$$

Soustrayons (2.1) de (2.3), il vient

$$Df(a)(h) - L_a(h) = o(h) - \varepsilon(h)$$

ce qui implique que l'on a

$$\frac{\|Df(a)(h) - L_a(h)\|_F}{\|h\|_E} = \frac{\|o(h) - \varepsilon(h)\|_F}{\|h\|_E}.$$

Soit $x \in E - \{0_E\}$. *On choisit* $h = tx$ *avec* $t \in \mathbb{R}_+^*$, *et utilisant (2.2),(2.4) et la linéarité de* $Df(a)$ *et* L_a, *on obtient*

$$\frac{\|Df(a)(x) - L_a(x)\|_F}{\|x\|_E} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|o(tx) - \varepsilon(tx)\|_F}{\|tx\|_E} = 0$$

de sorte que $Df(a)(x) = L_a(x)$. *Comme* $Df(a)(0_E) = L_a(0_E) = 0$, *on obtient*

$$Df(a)(x) = L_a(x) \quad \forall x \in E.$$

Exemple 2.1.1 *Soient* $f : \mathbb{R} \to F$ *une application et* $a \in \mathbb{R}$. *Si la limte*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} := f'(a) \in F$$

existe, alors f *est différentiable en* a. *En effet, on a*

$$f(a+h) - f(a) = h.f'(a) + f(a+h) - f(a) - h.f'(a).$$

Il suffit donc de choisir $Df(a)(h) = h.f'(a)$ $\forall h \in \mathbb{R}$ *et* $o(h) = f(a+h) - f(a) - h.f'(a)$.

Définition 2.1.2 *On dit qu'une application* f *est différentiable sur un ouvert* U *si elle est différentiable en tout point* $x \in U$. *Dans ce cas, on appelle différentielle de* f *l'application*

$$\begin{aligned} Df : U &\to \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto Df(x). \end{aligned}$$

Si de plus Df *est continue, on dit que* f *est continûment différentiable, ou de facçon équivalente que* f *est de classe* C^1.

Exemple 2.1.2 • *Toute application constante est continûment différentiable, de différentielle nulle.*

• *Toute application linéaire continue $f : E \to F$ est continûment différentiable, et sa différentielle est constante, égale à f en tout point $a \in E$, c'est-à-dire $Df(a) = f$ pour tout $a \in E$. Par exemple si $E_1, ..., E_n$ des evn, la projection $P_i : E = \prod_{j=1}^{n} E_j \to E_i, \ x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ est linéaire continue, donc elle est continûment différentiable et $DP_i(x) = P_i$ pour tout $x \in E$. Ainsi, l'injection canonique $S_i : E_i \to E = \prod_{j=1}^{n} E_j, \ t \mapsto (0, ..., 0, t, 0, ..., 0)$ est linéaire continue, donc elle est continûment différentiable et $DS_i(t) = S_i$ pour tout $t \in E_i$.*

• *Toute application affine $f : E \to F$ où $f = g + b$ avec $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ est continûment différentiable, et sa différentielle est constante, égale à g en tout point $a \in E$, c'est-à-dire $Df(a) = g$ pour tout $a \in E$.*

• *Toute application bilinéaire continue $f : E_1 \times E_2 \to F$ est continûment différentiable, et sa différentielle en $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ est $Df(a)(h) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$ pour tout $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$.*

Proposition 2.1.1 *Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable en un point $a \in U$, alors elle est continue en a.*

Preuve. On suppose que f est différentiable en a. Il résulte de (2.2) que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \|o(h)\|_F = 0. \tag{2.5}$$

Utilisant (2.1), (2.5) et le fait que $Df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, on obtient

$$0 \leq \lim_{\|h\|_E \to 0} \|f(a + h) - f(a)\|_F \leq \lim_{\|h\|_E \to 0} (\|Df(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|h\|_E + \|o(h)\|_F) = 0$$

ce qui implique que l'on a

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \|f(a + h) - f(a)\|_F = 0.$$

D'où la continuité de f en a.$\square$

Remarque 2.1.1 *La réciproque de la Proposition 2.1.1 est fausse. L'application norme* $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ *est continue mais elle n'est pas différentiable en* 0_E. *En effet, par l'absure on suppose que* $\|.\|$ *est différentiable en* 0_E. *Alors, il existe* $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *telle que*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\|h\| - g(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Soit $x \in E - \{0_E\}$. *Posons* $h = tx, t \in \mathbb{R}_+^*$. *Si* $t \to 0^+$, *on obtient* $\|h\| \to 0$ *et*

$$\frac{|\|x\| - g(x)|}{\|x\|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{|\|tx\| - g(tx)|}{\|tx\|} = 0,$$

ce qui nons conduit à $g(x) = \|x\|$ *et comme* $g(0_E) = \|0_E\| = 0$, *on obteint* $g(x) = \|x\| \ \forall x \in E$. *Ce qui contredit le fait que* g *est linéaire.*

2.2 Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.2.1 *Soient* E, F *des evn et* U *un ouvert de* E. *On dit qu'une application* $f : U \to F$ *a une dérivée en* $a \in U$ *suivant un vecteur* $v \in E$ *si la fonction de la variable réelle* $f_v : t \mapsto f(a + tv)$ *définie au voisinage de* 0 *est dérivable en* 0. *On note* $(f_v)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in F$ *la dérivée de cette application et on l'appelle la dérivée de* f *dans la direction* v *en* a.

Proposition 2.2.1 *Si* $f : U \to F$ *est différentiable en* $a \in U$, *alors* f *est dérivable en* a *dans n'importe quelle direction* v *et on a* $(f_v)'(0) = Df(a)(v)$.

Preuve. Comme f est différentiable en a, on a pour t assez petit :

$$f(a + tv) - f(a) = tDf(a)(v) + o(tv) \tag{2.6}$$

où o est une application définie au voisinage 0_E telle que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \tag{2.7}$$

Utilisons (2.7), on obtient

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|o(tv)\|_F}{|t|} = \lim_{t \to 0} \|v\|_E \frac{\|o(tv)\|_F}{\|tv\|_E} = 0 \quad \text{avec} \ \ v \neq 0_E. \tag{2.8}$$

Donc, d'après (2.6) et (2.8), on conclut que pour tout $v \in E$ on a $\lim_{t\to 0} \frac{f_v(t)-f_v(0)}{t} = Df(a)(v)$.□

Remarque 2.2.1 *La réciproque de la Proposition 2.2.1 est fausse. Une application peut être dérivable en un point a dans toutes les directions sans être différentiable. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$ est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions mais elle n'est pas différentiable car elle n'est pas continue.*

2.3 Opérations sur la différentiabilité

Proposition 2.3.1 *Soient $f, g : U \to F$ deux applications différentiables en $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et λf sont aussi différentiables en a, et on a $D(f+g)(a) = Df(a)+Dg(a)$ et $D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$.*

Preuve. La preuve se fait directement en écrivant la définition de différentiabilité.□

Proposition 2.3.2 *(Différentielle d'une application composée) Soient E, F et G trois e.v.n, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Si $f : U \to V$ est différentiable en $a \in U$ et $g : V \to G$ est différentiable en $b = f(a) \in V$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Preuve. Comme g est différentiable en $b \in V$, il existe $Dg(b) \in \mathcal{L}(F,G)$ et une application o définie au voisinage de 0_F telle que, pour tout k assez proche de 0_F :

$$g(b+k) - g(b) = Dg(b)(k) + o(k) \tag{2.9}$$

et

$$\lim_{\|k\|_F \to 0} \frac{\|o(k)\|_G}{\|k\|_F} = 0. \tag{2.10}$$

D'ailleurs, il vient de la différentiabilité de f en a qu'il existe $Df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$ et une application ε définie au voisinage de 0_E telle que, pour tout h assez proche de 0_E :

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + \varepsilon(h) \tag{2.11}$$

et

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|\varepsilon(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \tag{2.12}$$

Comme f est continue en a, on voit que $f(a+h) - f(a) \to 0_F$ lorsque $h \to 0_E$. Alors, si on choisit $k = f(a+h) - f(a)$ et en utilisant (2.9), (2.11) et la linéarité de $Dg(b)$, on obtient pour tout h assez proche de 0_E :

$$g(f(a+h)) - g(b) = Dg(b)(Df(a)(h)) + Dg(b)(\varepsilon(h)) + o(k).$$

Dès que $Dg(b) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $Df(a) \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application $Dg(b) \circ Df(a) \in \mathcal{L}(E, G)$. D'ailleurs, on a

$$0 \leq \frac{\|Dg(b)(\varepsilon(h)) + o(k)\|_G}{\|h\|_E} \leq \|Dg(b)\|_{\mathcal{L}(F,G)} \frac{\|\varepsilon(h)\|_F}{\|h\|_E} + \frac{\|k\|_F}{\|h\|_E} \frac{\|o(k)\|_G}{\|k\|_F}. \tag{2.13}$$

D'après (2.11)-(2.12), la quantité $\frac{\|k\|_F}{\|h\|_E}$ est borné lorsque h assez proche de 0_E. Alors, en utilisant (2.10), (2.12) et (2.13), on obtient

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|Dg(b)(\varepsilon(h)) + o(k)\|_G}{\|h\|_E} = 0.$$

On conclut que $g \circ f$ est différentiable en a et sa différentielle est $Dg(f(a)) \circ Df(a)$.□

Proposition 2.3.3 *(Application à valeurs dans un espace produit)*
Soient $E, F_1, ...F_n$ des evn, $F = \prod_{i=1}^n F_i$, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x))$ une application. Pour tout i, soit P_i la projection de F sur F_i et et S_i l'injection canonique de F_i dans F. Notons que $f_i = P_i \circ f$. Pour que f soit différentiable en a, il faut et il suffit que pour chaque i, la fonction f_i soit différentiable. De plus, dans ce cas, on a $Df(a) = \sum_{i=1}^n S_i \circ Df_i(a)$.

Preuve. On suppose que f est différentiable en a. Les applications P_i et S_i étant linéaires, elles sont différentiables de différentielles en chaque point égales à elles même, et d'après la Proposition 2.2.2, l'application f_i est différentiable de différentielle $Df_i(a) = P_i \circ Df(a)$. Inversement, on a $f = \sum_{i=1}^n S_i \circ f_i$, d'où on déduit le résultat en utlisant les Propositions 2.2.1 et 2.2.2.□

Lorsque $E_1, ..., E_n$ sont des evn, $U \subset E := \prod_{i=1}^n E_i$ et $f : U \to F$ on a une notion de différentielle partielle comme on a des dérivées partielles pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.3.1 *Soient $U \subset E = \prod_{i=1}^n E_i$, $f : U \to F$ et $a = (a_1, ..., a_n) \in U$. On dit que f admet une différentielle partielle en a par rapport à la i-ème variable si l'application $g_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$ définie au voisinage de $a_i \in E_i$ est différentiable au point a_i. On note $D_i f(a) = Dg_i(a_i) \in \mathcal{L}(E_i, F)$ sa différentielle et elle est appelée différentielle partielle de f en a par rapport à la i-ème variable.*

Proposition 2.3.4 *(Applications définies sur un espace produit)*
Soient $E_1, ..., E_n, F$ des evn, $E = \prod_{i=1}^n E_i$, U un ouvert de E, $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ et $f : U \to F$, $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x)$ une application. Si f est différentiable en $a = (a_1, ..., a_n)$, alors les partielles $g_i : t \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$, définies au voisinage de $a_i \in E_i$, sont différentiables en $a_i, i = 1, ..., n$ et on a

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^n D_i f(a)(h_i) \;\; \forall h = (h_1, ..., h_n) \in E.$$

Preuve. Soit $\gamma_i(t) = (a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$ où t au voisinage de $a_i \in E_i$. Notons que $g_i = f \circ \gamma_i$. L'application γ_i étant affine, elle est différentiable de différentielle r_i où $r_i(t) = (0, ..., 0, t, 0, ..., 0)$. Donc, d'après la Proposition 2.2.2, l'application g_i est différentiable de différentielle $Dg_i(a_i) = D_i f(a) = Df(a) \circ r_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, ce qui implique que l'on a

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^n D_i f(a)(h_i) \;\; \forall h = (h_1, ..., h_n) \in E. \; \square$$

Remarque 2.3.1 *L'existence des différentielles partielles de f en a n'implique pas forcément la différentiabilité. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ qui admet des dérivées partielles nulles à l'origine, mais elle n'est pas différentiable en ce point car elle n'y est pas continue.*
On verra qu'il faut ajouter une hypothèse de continuité des différentielles partielles pour obtenir la différentiabilité (à partir de l'existence des différentielles partielles).

2.4 Cas de dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, rapporté à une base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$. On introduit les dérivées partielles de f dans cette base par la définition suivante.

Définition 2.4.1 *Soit U un ouvert de E. On appelle j-ème dérivée partielle en $a \in U$ d'une fonction $f : U \to F$ la dérivée de f au point a suivant le vecteur e_j, sous réserve d'existence de celle-ci, et on la note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t}.$$

Si $f : U \to F$ a une j-ème dérivée partielle en tout point de U, la fonction j-ème dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to F$ est bien définie.

Proposition 2.4.1 *Soit U un ouvert d'un evn E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Si $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$, elle a des dérivées partielles en a dans toute base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de E, qui sont égales à $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (f_{e_j})'(0)$ et on a*

$$\forall h \in E : \ Df(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Preuve. Si f est différentiable en $a \in U$, elle a des dérivées partielles suivant tout vecteur. En écrivant $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j$, donc par linéarité de $Df(a)$ on obtient

$$Df(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j Df(a)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} h_j.(f_{e_j})'(0) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a). \square$$

Définition 2.4.2 *(Interprétation matricielle de la différentiabilité)*
Soient U un ouvert d'un evn E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, F un evn de dimension finie $q \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \to F$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_q(x))$ une fonction différentiable en $a \in U$. On appelle matrice jacobienne (ou jacobienne) de f en a la matrice $Jf(a)$ de $Df(a)$ relativement aux bases prises pour E et F. La j-ème colonne de cette matrice est alors l'image par $Df(a)$ du j-ème vecteur de base e_j, et c'est donc la j-ème dérivée partielle

$Df(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *exprimée dans la base de* F. *On a alors*

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Thèorème des accroissements finis et applications

La formule des accroissements finis, qui est une conséquence du théorème de Rolle, est connue pour une fonction de variable réelle et à valeurs réelles : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Si on remplace l'espace d'arrivé de f par un autre que $\mathbb{R}$, il n'y a pas de formule des accroissements finis : par exemple, la fonction $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (\sin x, \cos x)$ est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$. Cependant, si on suppose qu'il existe $c \in]0, \pi[$ tel que

$$f(\pi) - f(0) = \pi f'(c),$$

on obtiendra une contradiction $\pi^2 = 4$.

3.1 Fonctions à variables réelles

Définition 3.1.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a, b] \to F$ et $x \in]a, b[$.*
Si la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} := f'(x)$$

existe dans F, on dit que f est dérivable en x.

Si la limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} := f'_d(x)$$

existe dans F, on dit que f est dérivable à droite en x.

Théorème 3.1.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to F$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que :*

$$\|f'(x)\| \leq g'(x) \ \ \forall x \in]a,b[.$$

Alors on a

$$\|f(b)-f(a)\| \leq g(b)-g(a).$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$U = \{x \in [a,b] / \ \|f(x)-f(a)\| > g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon\}.$$

On va montrer que l'ensemble U est vide. La fonction $x \mapsto \varphi(x) = \|f(x)-f(a)\| - g(x) + g(a) - \varepsilon(x-a) - \varepsilon$ est continue et $U = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$, alors U est ouvert. Par l'absure on suppose que U est non vide. Si on pose $c = \inf U$, on voit que $c > a$ car $\varphi(a) = -\varepsilon < 0$ et φ est continue, ensuite $c \notin U$ puisqu'il est ouvert. D'ailleurs $a < b$ cas sinon $U = \{b\}$ est fermé. On conclut que $c \in]a,b[$ et que

$$\|f'(c)\| \leq g'(c). \tag{3.1}$$

Comme f et g sont dérivables, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [c, c+\delta]$ on a

$$\|f'(c)\| \geq \left\|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right\| - \frac{\epsilon}{2} \tag{3.2}$$

$$g'(c) \leq \frac{g(x)-g(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Combinant (3.1)-(3.3), on obtient

$$\|f(x)-f(c)\| \leq g(x)-g(c)+\varepsilon(x-c). \tag{3.4}$$

D'ailleurs, comme $c \notin U$ on a

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon. \tag{3.5}$$

En utilisant (3.4)-(3.5), on déduit que l'on a pour tout $x \in [c, c+\delta]$:

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon.$$

D'où $[c, c+\delta] \subset U^c$, ce qui contredit le fait que $c = \inf B$. $\square$

Remarque 3.1.1 *Si on remplace la dérivée de f et g par la dérivée à droite, le Théorème 3.1.1 reste valable.*

Corollaire 3.1.1 *Soit $f : [a,b] \to F$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $\|f'(x)\| \leq k$. Alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leq k(b-a)$, et plus généralement on a*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k|y-x| \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème 3.1.1 à $g(x) = kx$.$\square$

3.2 Fonctions à variable dans un espace vectoriel normé

Théorème 3.2.1 *Soient $f : U \subset E \to F$ une application différentiable sur U et a, b deux point de U tels que l'ensemble $[a,b] = \{x = (1-t)a + tb /\ t \in [0,1]\} \subset U$. Alors on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a + tb)\|,$$

or

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\|.$$

Preuve. Si $\sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a + tb)\| = \infty$, l'inégalité est vraie. Si $\sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a + tb)\| < \infty$, on pose $h(t) = f((1-t)a + tb)\ \ \forall t \in [0,1]$. Alors la fonction h est dérivable et on a $h'(t) = Df((1-t)a + tb)(b-a)$, d'où

$$\|h'(t)\| \leq \|b-a\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a + tb)\|.$$

Il suffit donc d'appliquer le Corollaire 3.1.1 à h.$\square$

Corollaire 3.2.1 *Soient $U \subset E$ un ouvert convexe et $f : U \to F$ une application différentiable. On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $\|Df(x)\| \leq k \quad \forall x \in U$. Alors on a*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\| \;\; \forall x, y \in U.$$

Preuve. C'est une conséquence du Théorème 3.2.1.□

Corollaire 3.2.2 *Soient U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application différentiable sur U. Alors pour tous $a, b \in U$ tels que $[a, b] \subset U$, on a*

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b - a)\|_F \leq \|b - a\|_E. \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x) - Df(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème 3.2.1 à $g(x) := f(x) - Df(x - a)$ dont la différentielle est $Dg(x) = Df(x) - Df(a)$.□

3.3 Applications

Le théorème des accroissements finis a de nombreuses applications. Les plus "fondamentales" sont la caractérisation des applications de différentielle nulle sur les ouverts connexes et les applications de classe C^1 sur un produit cartésien.

Théorème 3.3.1 *Soit $f : U \to F$ une application différentiable sur un ouvert connexe U. On suppose que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.*

Preuve. Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r) = \{y \in E / \|x - y\|_E < r\}$ de centre x et de rayon r soit incluse dans U. Cette boule est convexe, et comme $Df \equiv 0$, le théorème des accroissements finis (Théorème 3.2.1) implique que $f(y) = f(x)$ pour tout $y \in B(x, r)$. Cela signifie que f est localement constante dans U. Comme U est connexe, on en déduit facilement que f est constante sur U. En effet, fixons $a \in U$. L'ensemble $f^{-1}(\{f(a)\})$ est non vide puisqu'il contient a, et fermé par continuité de f. D'après ce qui précède, cet ensemble est aussi ouvert. Puisque U est connexe, on a donc $f^{-1}(\{f(a)\}) = U$. C'est-à-dire, $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in U$.□

Théorème 3.3.2 *Soient $E_1, ..., E_n, F$ des evn, $E = E_1 \times ... \times E_n$, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application. Alors on a*
$f \in C^1(U) \Leftrightarrow$ les différentielles partielles $D_i f : U \to \mathcal{L}(E_i, F)$ existent et continues.

Preuve. $(\Rightarrow)$: On suppose que $f \in C^1(U)$. Nous avons déja vu, dans la Proposition 2.3.4, que $D_i f$ existent sur U et que $D_i f(a) = Df(a) \circ S_i \ \forall a \in U$. Montrons que $D_i f$ est continue sur U. On a

$$\begin{aligned} 0 &\le \|D_i f(x) - D_i f(a)\|_{\mathcal{L}(E_i,F)} = \|Df(x) \circ S_i - Df(a) \circ S_i\|_{\mathcal{L}(E_i,F)} \\ &\le \|Df(x) - Df(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \underbrace{\|S_i\|_{\mathcal{L}(E_i,E)}}_{=1} = \|Df(x) - Df(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \end{aligned}$$

Comme Df est continue on déduit que $D_i f(x) \to D_i f(a)$ lorsque $x \to a$, d'où la continuité de $D_i f$ en $a \in U$.
$(\Leftarrow)$: Montrons le cas où $n = 2$ et le cas général s'effectuant de la même manière. Soit $a = (a_1, a_2) \in U$ et montrons, en premier lieu, que f est différentiable en a. On a

$$\begin{aligned} &\|f(a+h) - f(a) - D_1 f(a)(h_1) - D_2 f(a)(h_2)\|_F \le \\ &\le \|f(a+h) - f(a_1, a_2 + h_2) - D_1 f(a)(h_1)\|_F \\ &+\|f(a_1, a_2 + h_2) - f(a) - D_2 f(a)(h_2)\|_F. \end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité des accroissements finis (Théorème 3.2.1) aux applications

$$u(t) = f(t, a_2 + h_2) - D_1 f(a)(t)$$

entre a_1 et $a_1 + h_1$ et $v(t) = f(a_1, t) - D_2 f(a)(t)$ entre a_2 et $a_2 + h_2$. Notons que les applications u, v sont bien différentiables et même de classe C^1. On a

$$Du(t)(s) = D_1 f(t, a_2 + h_2)(s) - D_1 f(a)(s) \ \text{ et } \ Dv(t)(s) = D_2 f(a_1, t)(s) - D_2 f(a)(s),$$

ce qui implique que l'on a

$$\begin{aligned} &\|f(a+h) - f(a) - D_1 f(a)(h_1) - D_2 f(a)(h_2)\|_F \le \\ &\le \sup_{t \in [a_1, a_1+h_1]} \|D_1 f(t, a_2 + h_2) - D_1 f(a)\|_{\mathcal{L}(E_1,F)} \|h_1\|_{E_1} \\ &+ \sup_{t \in [a_2, a_2+h_2]} \|D_2 f(a_1, t) - D_2 f(a)\|_{\mathcal{L}(E_2,F)} \|h_2\|_{E_2}. \end{aligned}$$

Comme $D_1 f$ et $D_2 f$ sont continues en a, on déduit que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - D_1 f(a)(h_1) - D_2 f(a)(h_2)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

On voit que l'application $h = (h_1, h_2) \mapsto D_1 f(a)(h_1) + D_2 f(a)(h_2)$ est linéaire continue, cela prouve que f est différentiable en a et $Df(a)(h) = D_1 f(a)(h_1) + D_2 f(a)(h_2)$ pour tout $h = (h_1, h_2) \in E = E_1 \times E_2$. On déduit que f est différentiable sur U.
Montrons la continuité de Df. On a $Df(x) = D_1 f(x) \circ P_1 + D_2 f(x) \circ P_2$ pour tout $x \in U$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
&\|Df(x) - Df(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \\
&= \|D_1 f(x) \circ P_1 + D_2 f(x) \circ P_2 - D_1 f(a) \circ P_1 - D_2 f(a) \circ P_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \\
&\leq \|D_1 f(x) - D_1 f(a)\|_{\mathcal{L}(E_1,F)} \underbrace{\|P_1\|_{\mathcal{L}(E,E_1)}}_{=1} + \|D_2 f(x) - D_2 f(a)\|_{\mathcal{L}(E_2,F)} \underbrace{\|P_2\|_{\mathcal{L}(E,E_2)}}_{=1}.
\end{aligned}$$

Comme $D_1 f$ et $D_2 f$ sont continues, on déduit que Df est continue. On conclut que f est de classe C^1 sur U.$\square$

Chapitre 4

Différentielles d'ordre supérieur

4.1 Différentielles d'ordre 2

Rappelons que, si $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur U, on peut définir l'application $Df : U \to \mathcal{L}(E, F),\ x \mapsto Df(x)$.

Définition 4.1.1 *Soit $f : U \subset E \to F$ une application différentiable sur U. On dit que f est deux fois différentiable dans U si Df est différentiable en tout point de U. La différentielle de Df en a, que l'on écrit $D^2f(a) = D(Df)(a)$ est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E, F)$. Autrement dit, $D^2f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$.*

Remarque 4.1.1 *À tout élément $h \in E$ est associé l'application linéaire continue $D^2f(a)(h) \in \mathcal{L}(E, F)$, qui à tout $k \in E$ associe $D^2f(a)(h)(k) \in F$. On peut donc voir $D^2f(a)$ comme une application bilinéaire continue sur E ($D^2f(a) \in \mathcal{L}(E \times E, F)$), c'est-à-dire comme un élément de $\mathcal{L}(E \times E, F)$, en l'identifiant à l'application $(h, k) \mapsto D^2f(a)(h)(k)$ que l'on écrit alors $D^2f(a)(h, k)$(voir [3]).*

Exemple 4.1.1 • *Toute application affine $f : E \to F,\ x \mapsto g(x) + b$ avec $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ est deux fois différentiable et sa différentielle seconde est identiquement nulle.*

• *Toute application bilinéaire continue $f : E_1 \times E_2 \to F$ est deux fois différentiable et sa différentielle seconde en $a \in E_1 \times E_2$ est $D^2f(a)(k, k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2)$ pour tous $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in E_1 \times E_2$.*

Théorème 4.1.1 *(de Schwarz) Si $f : U \subset E \to F$ est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $D^2 f(a)$ est une application bilinéaire symétrique, c'est-à-dire que, pour tout $(h,k) \in E \times E$:*

$$D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(k,h).$$

Preuve. Pour $h, k \in E$ assez petits, on définit

$$F(h,k) = f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a).$$

Ensuite, On pose pour $x \in [0,h]$: $g(x) = f(a+k+x) - f(a+x)$, de sorte que $F(h,k) = g(h) - g(0) = Dg(0)(h) + \circ(h)$. Par ailleurs, par définition de g, on a

$$Dg(0)(h) = Df(a+k)(h) - Df(a)(h) = D^2 f(a)(k,h) + \text{reste}.$$

D'où, $F(h,k) = D^2 f(a)(k,h) + \circ(k)(h)$. En intervertissant les rôles de h et k (F est symétrique en h et k) on montre de même $F(h,k) = D^2 f(a)(h,k) + \text{reste}$.
On applique l'inégalité des accroissements finis, Corollaire 3.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} \|F(h,k) - Dg(0)(h)\|_F &= \|g(h) - g(0) - Dg(0)(h)\| \\ &\leq \sup_{y \in [0,h]} \|Dg(y) - Dg(0)\|_{\mathcal{L}(E,F)}.\|h\|_E. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour tout $y \in [0,h]$, on écrit

$$\begin{aligned} Dg(y) - D^2 f(a)(k) &= Df(a+y+k) - Df(a+y) - D^2 f(a)(k) \\ &= Df(a+y+k) - Df(a) - D^2 f(a)(y+k) \\ &\quad -(Df(a+y) - Df(a) + D^2 f(a)(y)). \end{aligned}$$

Puisque f est deux fois différentiable en a, donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a : si h et k sont assez petits :

$$\begin{aligned} \forall y \in [0,h] : \quad \|Dg(y) - D^2 f(a)(k)\|_{\mathcal{L}(E,F)} &\leq \varepsilon(\|y+k\|_E + \|y\|_E) \\ &\leq \varepsilon(2\|y\|_E + \|k\|_E) \\ &\leq \varepsilon(2\|h\|_E + \|k\|_E). \end{aligned} \tag{4.2}$$

En particulier,

$$\|Dg(0) - D^2 f(a)(k)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon(2\|h\|_E + \|k\|_E). \tag{4.3}$$

En combinant (4.1)-(4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|F(h,k) - D^2 f(a)(k,h)\|_F &\leq \|F(h,k) - Dg(0)(h)\|_F + \|Dg(0)(h) - D^2 f(a)(k,h)\|_F \\
&\leq \sup_{y\in[0,h]} \|Dg(y) - Dg(0)\|_{\mathcal{L}(E,F)}.\|h\|_E \\
&\quad +\|Dg(0) - D^2 g(a)(k)\|_{\mathcal{L}(E,F)}.\|h\|_E \\
&\leq 2\varepsilon(2\|h\|_E + \|k\|_E)\|h\|_E + \varepsilon(2\|h\|_E + \|k\|_E)\|h\|_E \\
&\leq \varepsilon(6\|h\|_E^2 + 3\|h\|_E\|k\|_E) \\
&\leq 9\varepsilon\|(h,k)\|_{E\times E}^2.
\end{aligned}$$

En intervertissant les rôles de h et k on montre de même que pour h, k assez petits on a

$$\|F(h,k) - D^2 f(a)(h,k)\|_F \leq 9\varepsilon\|(h,k)\|_{E\times E}^2$$

et on déduit que l'on a

$$\|D^2 f(a)(h,k) - D^2 f(a)(k,h)\|_F \leq 18\varepsilon\|(h,k)\|_{E\times E}^2. \tag{4.4}$$

Comme $D^2 f(a)$ est bilinéaire l'inégalité (4.4) est vraie pour tous h, k dans E. Si on pose $B(h,k) := D^2 f(a)(h,k) - D^2 f(a)(k,h)$, on obtient

$$\|B(h,k)\|_{\mathcal{L}_2(E,F)} \leq 18\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 on conclut que $B \equiv 0$ et donc que $D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(k,h)$ pour tout $(h,k) \in E \times E$.$\square$

En dimension finie. Supposons que $E = \mathbb{R}^p$ et soit $(e_k)_{1\leq k\leq p}$ sa base canonique. Si f est deux fois différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$, alors on a pour tout $x \in U$, et pour tous $i, j \in \{1, ..., p\}$:

$$D^2 f(x)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

et d'après le théorème de Schwarz on a

$$D^2 f(x)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

D'ailleurs, par bilinéarité de f, on obtient pour tous $h = (h_1, ..., h_p), k = (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$D^2 f(x)(h, k) = \sum_{i,j=1}^{p} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

4.2 Différentielles d'ordre n

Pour les entiers $n \geq 3$, on définit par récurrence la différentielle d'ordre n. On notera simplement $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires continues de $\underbrace{E \times ... \times E}_{n \text{ fois}}$ dans F.

Définition 4.2.1 *On dit que f est n fois différentiable en $a \in U$, si elle est $(n-1)$ différentiable dans un voisinage de a et si l'application $x \mapsto D^{n-1}(x)$ d'un voisinage de a dans $\mathcal{L}_{n-1}(E, F)$ est différentiable en a. Dans ce cas, la différentielle de cette application s'appelle la différentielle d'ordre n de f en a et se note $D^n f(a)$, c'est un élément de $\mathcal{L}_n(E, F)$.*

Si f est n fois différentiable en tout point de U, l'application $D^n f : U \to \mathcal{L}_n(E, F)$, $x \mapsto D^n f(x)$ s'appelle la différentielle d'ordre n de f.

On dit que f est de classe C^0 dans U, si elle est continue et on écrit $f \in C^0(U)$.

On dit que f est de classe C^n dans U, et on écrit $f \in C^n(U), n \geq 1$, si elle différentiable à l'ordre n dans U et si $D^n f$ est continue.

Toute application $f : U \to F$ qui appartient à $C^n(U)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est dite de classe C^∞ dans U et on écrit $f \in C^\infty(U)$.

Exemple 4.2.1 • *Toute application affine $f : E \to F$, $x \mapsto g(x) + b$ avec $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ est classe C^∞ et on a pour tout $a \in E$: $Df(a) = g$, $D^k f(a) = 0$ $\forall k \geq 2$.*

• *Toute application bilinéaire continue $f : E \times E \to F$ est classe C^∞ et on a pour tout*

$a = (a_1, a_2) \in E \times E$:

$$Df(a)(h) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) \quad \forall h = (h_1, h_2) \in E \times E,$$

$$D^2 f(a)(h, k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2) \quad \forall h = (h_1, h_2), h = (k_1, k_2) \in E \times E,$$

$$D^k f(a) = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

Théorème 4.2.1 *(de Schwarz) Soit $p \in \mathbb{N},\ p \geq 3$. Si f est p fois différentiable en $a \in U$, alors $D^p f(a)$ est une application symétrique, c'est-à-dire que pour toute permutation σ de $\{1, ..., p\}$, et tout $(h_1, ..., h_p) \in E^p$:*

$$D^p f(a)(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(p)}) = D^p f(a)(h_1, ..., h_p).$$

Preuve. Voir [3].□

4.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.3.1 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $f : U \subset E \to F$ est de classe C^p et $a \in U$, alors*

$$f(a+h) = f(a) + \textstyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f(a)(h^k) + \circ(\|h\|^p)$$

où $h^k = (\underbrace{h, ..., h}_{k fois})$.

Preuve. Par récurrence sur p. Pour $p = 1$, c'est la définition de la différentiabilité. Supposons que la relation est vraie pour $p - 1$. Posons

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1] : \ \varphi(t) &= f(a+th) - f(a) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f(a)(th^k) \\ &= f(a+th) - f(a) - \sum_{k=1}^{p} \frac{t^k}{k!} D^k f(a)(h^k). \end{aligned}$$

La fonction φ est alors dérivable et on a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= Df(a+th)(h) - \sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} D^k f(a)(h^k) \\ &= \big(Df(a+th) - Df(a) - \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{(k-1)!} D^k f(a)((th)^{k-1})\big)(h). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à $Df(.)$ qui est $(p-1)$ fois différentiable en a :

$$Df(a+th) = Df(a) - \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{(k-1)!} D^k f(a)((th)^{k-1}) + \circ(\|th\|^{p-1}),$$

et par conséquent $\|\varphi'(t)\| = \circ(\|th\|^{p-1})\|h\| = \circ(t^{p-1}\|h\|^p)$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à φ, on obtient

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'(t)\|.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on déduit la conclusion recherchée.$\square$

Chapitre 5

Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

5.1 Difféomorphismes de classe C^1

Définition 5.1.1 *Soient U un ouvert d'un evn E et V un ouvert d'un evn F. Une application $f : U \to V$ est un homéomorphisme si elle est continue, bijective et si son inverse est continue.*

Définition 5.1.2 *Soient E et F deux evn, U un ouvert de E et V un ouvert de F. On dit que $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme (ou un difféomorphisme de classe C^1) si elle est bijective, de classe C^1 et si son inverse $f^{-1} : V \to U$ est aussi de classe C^1.*

Définition 5.1.3 *Soient $f : U \to V$ un C^1-difféomorphisme et $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.*
On dit que f est un C^k-difféomorphisme si f et f^{-1} sont de classe C^k.
On dit que f est un C^∞-difféomorphisme si elle est un C^n-difféomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 5.1.1 *Soient $f : U \to V$ un homéomorphisme et $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Pour que f soit un C^k-difféomorphisme, il suffit que f soit de classe C^k, et que pour tout x de U, $Df(x) \in Iso(E, F)$.*

Preuve. Voir [3].□

Exemple 5.1.1 *La fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *est un difféomorphisme de classe* C^1.

Exemple 5.1.2 *La fonction polynmiaôle* $x \mapsto x^3$ *n'est pas un difféomorphisme de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Elle est bijective et continûment différentiable, mais sa réciproque n'est pas différentiable en* 0.

5.2 Inversion locale et fonctions implicites

Le problème de l'inversion est de résoudre en x une équation de la forme $y = f(x)$. Dans le cas linéaire, ce problème est bien connu, par exemple si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, l'unique solution x dans $\mathbb{R}^n$ de $Ax = y$ est donnée par $x = A^{-1}y$. Quand f est différentiable un résultat semblable est vrai localement, c'est le théorème d'inversion locale.

Théorème 5.2.1 [4] *(Théorème d'iversion locale) Soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* U *un ouvert de* E *et* $f : U \to F$ *une application de classe* C^1. *Supposons que, pour un certain* $a \in U$, *on ait* $Df(a) \in Iso(E, F)$. *Alors il existe un voisinage ouvert* $U_a \subset U$ *de* a *et un voisinage ouvert* $V_b \subset F$ *de* $b = f(a)$ *tels que* $f : U_a \to V_b$ *soit un* C^1*-difféomorphisme.*

L'idée de la Preuve. La Preuve est basée sur les trois ingrédients :

• Le fait que l'ensemble $Isom(E, F)$ des isomorphismes de E sur F soit un ouvert et que l'application $u \in Isom(E; F) \to u^{-1} \in Isom(F; E)$ soit continue (cf. Chapitre 1),

• Le théorème des accroissements finis (cf. Chapitre 4),

• Le théorème du point fixe de Banach-Picar (cf. Chapitre 1).□

Remarque 5.2.1 • *L'hypothèse que* f *soit de classe* C^1 *est nécessaire (la différentiabilité seulement n'est pas suffisante). En effet, la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin(\frac{1}{x})$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a* $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. *Cependant* f *n'est pas bijective sur aucun voisinage de* 0 *car sa dérivée n'est pas de signe constant sur aucun voisinage de* 0.

• *Ce théorème est important, car il montre comment une propriété ponctuelle de f (la différentielle est inversible) se propage en une propriété locale. Il est à la base de l'utilisation du calcul différentiel en géométrie.*

• *En dimension finie $E = F = \mathbb{R}^p$, pour que $Df(a) \in Iso(E, F)$ il faut et il suffit que* $\det(J_f(a)) \neq 0$, *où $J_f(a)$ est le jacobien de f au point a.*

Exemple 5.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. La fonction f est de classe C^1 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\det(J_f(x, y)) = \begin{vmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{vmatrix} = -2e^{x+y} \neq 0.$$

D'après théorème d'iversion locale la fonction f est donc localement inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Le théorème d'inversion locale admet le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.1 *Soient $f : U \to F$ une application de classe C^1, injective et pour tout $x \in U$, $Df(x) \in Iso(E, F)$. Alors $f(U)$ est ouvert dans F et $f : U \to f(U)$ est un C^1-difféomorphisme.*

Preuve. D'après le Théorème 5.2.1, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans U tel que $f(U_x)$ est ouvert, ce qui implique que $f(U)$ est ouvert. Comme $f : U \to f(U)$ est bijective, elle admet un inverse $g : f(U) \to U$, qui est de classe C^1 par le même théorème.$\square$

Un autre corollaire du théorème d'inversion locale est le théorème des fonctions implicites.

Théorème 5.2.2 *(Théorème des fonctions implicites) Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $(a, b) \in U \times V$ et $f : U \times V \to G$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a, b) = 0$ et $D_2f(a, b) \in Iso(F, G)$. Alors, il existe un voisinage ouvert $U_a \subset U$ de a et une fonction "implicite" $g : U_a \to V$ de classe C^1 telle que $g(a) = b$ et pour tout $x \in U_a$ on a $f(x, g(x)) = 0$. De plus, $Dg(x) = -(D_2f(x, g(x)))^{-1} \circ D_1f(x, g(x))$ pour tout $x \in U_a$.*

Preuve. On définit $F : U \times V \to E \times G$ par $F(x, y) = (x, f(x, y))$. La fonction F est de classe C^1 sur $U \times V$ et on a

$$DF(x, y)(h, k) = (h, Df(x, y)(h, k)) = (h, D_1 f(x, y)(h) + D_2 f(x, y)(k)). \tag{5.1}$$

Montrons que $DF(a, b)$ est inversible. Si $(s, t) \in E \times G$, on a

$$\begin{aligned} DF(a,b)(h,k) = (s,t) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \hfill h = s \\ D_1F(a,b)(h) + D_2F(a,b)(k) = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} h = s \\ k = (D_2F(a,b))^{-1}(t - D_1F(a,b)(s)). \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $DF(a, b)$ est inversible et

$$(DF(a,b))^{-1}(s,t) = (s, (D_2F(a,b))^{-1}(t - D_1F(a,b)(s)))$$

qui est continue par composition d'applications linéaires continues. Donc $DF(a, b)$ est bien un homéomorphisme. D'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage Ω_1 de (a, b) dans $E \times F$ et un voisinage Ω_2 de $F(a, b) = (a, f(a, b))$ tels que $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ soit un C^1-difféomorphisme. On dénote par $H : \Omega_2 \to \Omega_1$ l'inverse de F qui est de classe C^1. Quitte à diminuer Ω_1 on peut de plus supposer que Ω_1 est de la forme $\Omega_1 = U_1 \times V_1$ où U_1 est un voisinage ouvert de a et V_1 et un voisinage ouvert de b (et on remplace Ω_2 par $F(U_1 \times V_1) = H^{-1}(U_1 \times V_1)$ qui est ouvert puisque H est continue). Si $(u, v) \in \Omega_2$ on a

$$(x, y) = H(u, v) \Leftrightarrow (u, v) = F(x, y) = (x, f(x, y)),$$

autrement dit nécessairement $x = u$ et donc H est de la forme $H(u, v) = (u, \varphi(u, v))$ où φ est une fonction définie de Ω_2 sur V_1. Quitte à restreindre U_1, pour tout $x \in U_1$ on a $(x, f(a, b)) \in \Omega_2$ donc il existe un unique $y = \varphi(x, f(a, b)) \in V_1$ tel que $F(x, y) = (x, f(a, b))$, c'est-à-dire $f(x, y) = f(a, b)$. On définit alors $g : U_1 \to V_1$ par $g(x) = \varphi(x, f(a, b))$ qui est bien de classe C^1, satisfaisant $g(a) = b$ et pour tout $x \in U_1$ on a $f(x, g(x)) = 0$. D'aillurs, pour tout $x \in V_1$ on a $\theta(x) = f(x, g(x)) = f(a, b)$, c'est-à-dire θ est constante, sa différentielle est donc nulle. Or, par différentiation de fonctions composées on a

$$D_1 f(x, g(x)) + D_2 f(x, g(x)) \circ Dg(x) = D\theta(x) = 0. \tag{5.2}$$

D'autre part, d'après le Théorème d'inversion locale on sait que $DF(x, y)$ est inversible sur $U_1 \times V_1$ et d'après (5.1), $D_2 F(x, y)$ est inversible. En utilisant (5.2), on déduit que pour tout $x \in U_1$ on a $Dg(x) = -(D_2 f(x, g(x)))^{-1} \circ D_1 f(x, g(x)).\square$

Exemple 5.2.2 *Montrons que la relation $x^4 + x^3 - 2x^2 y - 1 = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0, 1)$.*
Posons $f(x, y) = x^4 + x^3 - 2x^2 y - 1$ qui est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2, f(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 3 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $g : U_0 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, avec U_0 est un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in U_0 : f(x, y) = f(x, g(x)) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Chapitre 6

Extrema

Dans ce chapitre on cherche à étudier les extrema des fonctions à valeurs réelles $f : U \subset E \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ non pas sur U mais lorsque la variable x est liée par une (ou plusieurs) contrainte du type $g(x) = 0$. On parlera en fait seulement de minima pour simplifer et les maxima de f peuvent en effet être vu comme les minima de $(-f)$.

6.1 Extrema libres

Définition 6.1.1 *Soient U un ouvert d'un evn E et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit qu'un point $a \in U$ est un mininum local de f s'il existe un voisinage $U_a \subset U$ de a tel que*

$$\forall x \in U_a : \ f(x) \geq f(a).$$

On dira que a est un minimum global de f si

$$\forall x \in U : \ f(x) \geq f(a).$$

Si l'inégalité est stricte, c'est-à-dire $f(x) > f(a)$ pour tout $x \neq a$, le minimum est dit strict.

Proposition 6.1.1 *(condition nécessaire)*
Soient U un ouvert d'un evn E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. Si a

est un minimum local de f alors $Df(a) = 0$. Si de plus f est deux fois différentiable en a, alors $D^2 f(a)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.

Preuve. Soit $h \in E, h \neq 0_E$. Comme f est différentieble en a, on a

$$Df(a)(h) = \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}.$$

Puisque U est ouvert, on a pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit $a+th \in U$, donc par hypothèse $f(a+th) - f(a) \geq 0$. D'où

$$Df(a)(h) = \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0^+} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} \geq 0 \tag{6.1}$$

et

$$Df(a)(h) = \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0^-} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} \leq 0. \tag{6.2}$$

En combinant (6.1)-(6.2), il vient $Df(a)(h) = 0$ et comme $Df(a)(0) = 0$, on conclut que $Df(a)(h) = 0$ pour tout $h \in E$.
Maintenant, on suppose que f est deux fois différentiable en a et on montre que $D^2 f(a)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$. On applique la formule de Taylor-Young à f on obtient pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit et $h \in E, h \neq 0_E$:

$$f(a+th) = f(a) + \underbrace{Df(a)(th)}_{=0} + \frac{1}{2} D^2 f(a)(th,th) + o(\|th\|_E^2).$$

Comme $D^2 f(a)$ est bilinéaire, il vient

$$f(a+th) = f(a) + \frac{t^2}{2} D^2 f(a)(h,h) + o(\|th\|_E^2).$$

En passant à la limite quand $t \to 0$, on obtient

$$\frac{1}{2} D^2 f(a)(h,h) \quad = \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} - \lim_{t\to 0} \frac{o(\|th\|_E^2)}{t^2}$$

On voit que

$$\lim_{t\to 0} \frac{o(\|th\|_E^2)}{t^2} = \|h\|_E^2 \lim_{t\to 0} \frac{o(\|th\|_E^2)}{\|th\|_E^2} = 0.$$

D'où

$$D^2f(a)(h,h) \quad = \quad 2\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} \geq 0.$$

Comme $D^2f(a)(0_E,0_E)=0$, on conclut que $D^2f(a)(h,h)\geq 0$ pour tout $h\in E$.□

Remarque 6.1.1 *La réciproque de la Proposition 6.1.1 est fausse. Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2-3y^3$. On a $Df(a)(h)=h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ pour tous $a=(a_1,a_2), h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$. Notons que*

$$Df(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \quad et \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ \quad et \\ -9y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0).$$

D'ailleurs, $D^2f(0,0)(h,h)=h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2h_1^2\geq 0$ pour tout $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$. On déduit que si f admet un extremum relatif en $a\in\mathbb{R}^2$ alors $a=(0,0)$ et il est un minimum. Mais, pour tout voisinage V de $(0,0)$, on peut trouver deux points $(x_0,0), x_0>0$ et $(0,y_0), y_0>0$ tels que $(x_0,0),(0,y_0)\in V$ et $f(x_0,0)=x_0^2>0, f(0,y_0)=-2y_0^3<0$. On conclut que $(0,0)$ n'est pas un minimum de f.

Proposition 6.1.2 *(condition suffisante)*
Soient U un ouvert d'un evn E et $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en $a\in U$. On suppose que $Df(a)=0$ et qu'il existe $\lambda>0$ tel que $D^2f(a)(h,h)\geq\lambda\|h\|_E^2$ pour tout $h\in E$, alors a est un minimum locale de f.

Preuve. D'après la formule de Taylor-Young à f, on obtient pour $h\in E, h\neq 0_E$ et $a+h\in U$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|_E^2}=\frac{1}{2}\frac{D^2f(a)(h,h)}{\|h\|_E^2}+\frac{o(\|h\|_E^2)}{\|h\|_E^2},$$

ce qui implique que l'on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|_E^2}\geq\frac{\lambda}{2}+\frac{o(\|h\|_E^2)}{\|h\|_E^2}.$$

Comme $\lim_{\|h\|_E\to 0}\frac{o(\|h\|_E^2)}{\|h\|_E^2}=0$, alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que si $\|h\|_E<\delta$ on a $\left|\frac{o(\|h\|_E^2)}{\|h\|_E^2}\right|<\varepsilon$. Si on choisit $\varepsilon=\frac{\lambda}{4}>0$ il existe $\delta=\delta(\frac{\lambda}{4})>0$ tel que pour tout $h\in B(0_E,\delta),\ a+h\in U$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|_E^2}\geq\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{4}>0.$$

Ce qui implique que pour tout $x\in B(a,\delta)\cap U$ on a $f(x)-f(a)>0$. C'est-à-dire, a est un minimum locale de f.□

Remarque 6.1.2 *En dimension finie, l'existence de $\lambda>0$ tel que $D^2f(a)(h,h)\geq\lambda\|h\|_E^2$ pour tout $h\in E$ équivaut à $D^2f(a)(h,h)>0$ quel que soit $h\neq 0_E$. En effet, il suffit de remarquer que la fonction continue $h\mapsto D^2f(a)(h,h)$ atteint son minimum sur la sphère unité qui est compacte car E est de dimension finie. Par bilinéarité de $D^2f(a)$ on en déduit l'inégalité voulue avec*

$$\lambda:=\min_{\|h\|_E=1}D^2f(a)(h,h).$$

De plus, si la matrice hessienne de f en a, c'est-à-dire la matrice symétrique réelle de coefficients $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ a des valeurs propres toutes strictement positives, cela équivaut à dire que $D^2f(a)(h,h)>0$ quel que soit $h\neq 0_E$.

Proposition 6.1.3 *(condition suffisante en dimension 2)*
Soient U un ouvert d'un evn E de dimension 2, rapporté à une base (e_1,e_2) et $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de claase C^2 sur U. Si les dérivées partielles d'ordre 1 s'annule en un point a de U, on pose

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\quad \text{et}\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

- *Si $rt-s^2>0$, il y a un extremum local en a (maximum si $r<0$, minimum sinon).*
- *Si $rt-s^2<0$, il n'y a pas d'extremum en a (on dit qu'on a un col en a).*
- *Si $rt-s^2=0$, on ne peut conclure directement.*

Preuve. Voir le cours de calcul différentiel en dimension finie (pour la Licence). □

Nous terminons maintenant ce chapitre par la notion d'extrema liés.

6.2 Extrema liés

Définition 6.2.1 *Soient U un ouvert d'un evn E, $a \in U$ et $g_1, ..., g_p,\ p \in \mathbb{N}^*$ des fonctions définies sur U à valeurs réelles telles que $g_1(a) = ... = g_p(a) = 0$. On dit que a est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, ..., g_n$ s'il existe un voisinage $U_a \subset U$ de a tel que pour tout $x \in U_a$ satisfait $g_1(x) = ... = g_p(x) = 0$ on a $f(x) \geq f(a)$.*

Définition 6.2.2 *Soient U un ouvert d'un evn E, $a \in U$ et $g_1, ..., g_p,\ p \in \mathbb{N}^*$ des fonctions définies sur U de classe C^1 à valeurs réelles. On dit que les fonctions $g_1, ..., g_p$ sont indépendantes au point a si la famille de formes linéaires continues $\{Dg_1(a), ..., Dg_p(a)\}$ est libre.*

Voici une condition nécessaire pour qu'un point soit un minimum local sous contraites.

Théorème 6.2.1 *(Théorème des multiplicateurs de Lagrange)*
Soient U un ouvert d'un espace de Banach E, $a \in U$ et $f, g_1, ..., g_p,\ p \in \mathbb{N}^*$ des fonctions définies sur U de classe C^1 à valeurs réelles telles que $g_1(a) = ... = g_p(a) = 0$ et les contraintes $g_1, ..., g_p$ sont indépendantes au point a, c'est-à-dire la famille de formes linéaires continues $\{Dg_1(a), ..., Dg_p(a)\}$ est libre. Alors, si a est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, ..., g_p$, il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que

$$Df(a) = \lambda_1.Dg_1(a) + ... + \lambda_p.Dg_p(a).$$

Les nombres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont appelées des multiplicateurs de Lagrange.

Preuve. Voir [1].□

Exemple 6.2.1 *On trouve les extrema globaux de la fonction $f(x, y) = xy$ sur l'ellipse $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy + y^2 = 1\}$. Considérons $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1$. La fonction f est continue sur le compact $\mathcal{E} = \{g = 0\}$, alors elle possède un minimum et un maximum globaux atteints. Comme $\nabla g(x, y) = (2x - y, 2y - x) \neq (0, 0)$ sur $\mathcal{E}$, on peut appliquer le critère de Lagrange. Pour tout extremum $(x, y) \in \mathcal{E}$ de f il existera $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, ce qui implique que l'on a $y = \lambda(2x - y)$ et*

$x = \lambda(2y - x)$. *Le nombre réel* λ *est différent de* 0 *car* $\lambda = 0$ *nous conduit à* $x = y = 0$ *et* $(0,0) \notin \mathcal{E}$. *En multipliant l'équation* $y = \lambda(2x - y)$ *par* x *et* $x = \lambda(2y - x)$ *par* y, *on obtient* $\lambda(2x^2 - xy) = xy = \lambda(2y^2 - xy)$. *Comme* $\lambda \neq 0$, *on peut écrire* $\lambda(2x^2 - xy) = (2y^2 - xy)$. *Ce qui implique que l'on a* $x = \pm y$. *On discute deux cas : si* $x = y$, *on obtient* $1 = x^2 - xy + y^2 = x^2$, *d'où* $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$. *Pour de tels points* $f(x, y) = 1$. *Si* $x = -y$, *l'équation* $x^2 - xy + y^2 = 1$ *donne* $x = \pm\sqrt{3}/3$ *et* $y = \mp\sqrt{3}/3$. *Pour de tels points* $f(x, y) = -1/3$. *On conclut que*

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{E}} f(x,y) = f(\pm\sqrt{3}/3, \mp\sqrt{3}/3) = -1/3 \qquad \textit{et} \qquad \max_{(x,y)\in\mathcal{E}} f(x,y) = f(\pm 1, \pm 1) = 1.$$

Bibliographie

[1] S. Benzoni. *Cours de Calcul différentiel :*(licence de mathématiques), 2005.

[2] N. Bourbaki. *Espaces Vectoriels Topologiques :* Chapitres 1 à 5. Hermann, 1953.

[3] H. Cartan. *Calcul Differentiel : I-Calcul Differentiel Dans Les Espaces De Banach ; II-Equations Differentielles* (Cours De Mathematiques II). Hermann et Cie, Editeurs, 1967.

[4] G. Christol, A. Cot et C-M. Marle. *Calcul Differentiel :* Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILIBOSSIAN. Ellipses. Paris, 1997.

[5] M.J. Fields. *Differential Calculus and its Applications.* Van Nostrand Reinhold, 1976.

[6] C. Gilles, A. Cot et C-M. Marle. *Topologie.* Ellipses/ éditions marketing S.A., Paris, 1997.

[7] M. Hazi : *Introduction aux espaces normés,* OPU, 1994.