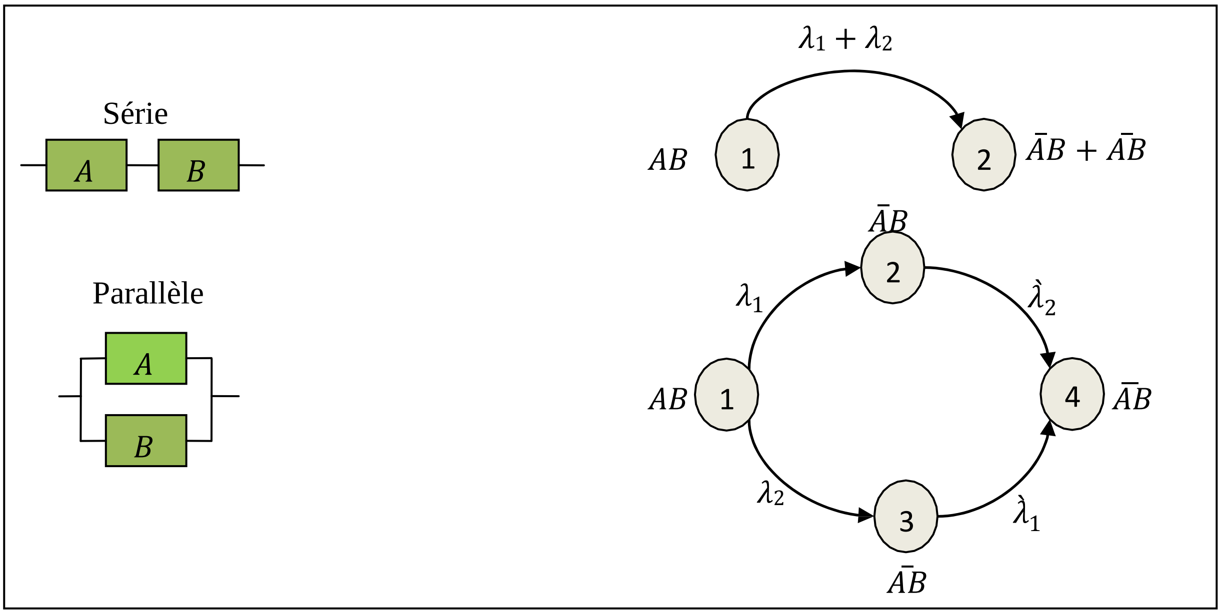
Chapitre 2

Analyse des systèmes avec prise en compte de certaines dépendances



3.1 Introduction

La Méthode de l'Espace d'Etat (MEE) a été développée pour l'analyse de sûreté de fonctionnement de système réparable. Les arbres de défaillances, vus dans le chapitre précédent, permettent de bonnes descriptions statiques de système mais ne prennent pas en compte les reconfigurations, comme les réparations. Les premières utilisations des processus stochastiques dans les années 50 utilisaient des processus markoviens ; des généralisations ont ensuite été faites. Dans cette partie nous nous concentrons sur les processus markoviens. Andrei Markov a publie ses premiers résultats en 1906, qui ont ensuite été généralisés à un espace d'états infini dénombrable par Andrei Kolmogorov en 1936. Un processus stochastique est un ensemble de variables aléatoires $(X_t)_t \geq 0$ à valeurs dans l'ensemble des observations. Un processus est markovien si la probabilité de passage de l'étape présente à la suivante ne dépend pas du passée.

$$P(X_t \in A / X_{t_n} \in A_n, \ldots . X_1 \in A_1) = P(X_t \in A / X_{t_n} \in A_n)$$

3.2 Les notions basiques de la chaîne de Markov

3.2.1 Méthodologie

Pour établir un graph d'état d'un système, il faut prendre en considération :

- Le nombre de composants qui constituent le système ;
- La structure du système ;
- Le nombre de réparateur ;
- La politique de maintenance.

3.2.2 Construction

- Recenser les états E_i du système à partir de ceux des ses composants (un système ayant n composants a au plus $p = 2^n$ états).
- Définir les transitions entre les états du système et identifier leurs causes (défaillances, arrêt, réparation ou mise en service des composants).
- classer les états en états de fonctionnement ou états de panne.

3.2.3 Représentation

- Chaque état du système est un **sommet** du graphe. Il est représenté par un cercle. A chaque état E_i est associée une probabilité qui dépend du temps :

$$P_i(t) = P(E(t) = E_i)$$

- Chaque transition est symbolisée par une **flèche** dirigée de l'état initial vers l'état final. A chaque transition est associé un taux défini par la probabilité conditionnelle d'occurrence de la transition :

$$a_{ij}(t)dt = P(E(t + dt) = E_j(E(t) = E_i)$$

Remarque 3.1 : Si la probabilité de passer de l'état i à l'état j entre les instants t et $t + dt$ est $a_{ij}dt$ alors a_{ij} est le taux de transition entre les états i et j.

Si les taux de transitions sont constants le processus est markovien homogène

3.2.4 Taux de transition

$a_{ij} = \boldsymbol{\lambda}$ **:** Si la transition est une défaillance en fonctionnement ;

$a_{ji} = \mu$: Si la transition est une réparation.

3.3 Système à 1 entité

Tous les systèmes dont l'état de fonctionnement futur ne dépend que de l'état présent peuvent être décrits par un processus de Markov et en particulier, ceux pour les lesquels les probabilités de transition entre 2 états quelconques ne sont pas affectés par le temps. Il est alors homogène. C'est le cas de tous les phénomènes à distribution exponentielle.

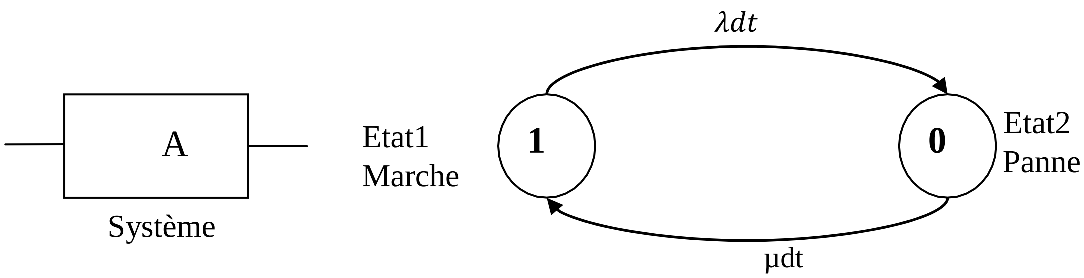


Figure 3.1 : Graphique d'état modélisent la disponibilité

3.3.1 Matrice des probabilités

On considère le système simple à deux états présenté à la figure (3.1)

Conditions initiales : P(0) = (1, 0) ⇔ au départ le système fonctionne $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = 0$.

Rappel : $\sum P_i = 1$ ou $\sum \frac{P_i(t)}{dt} = \sum P_1 + \grave{P}_2 = 0 \Rightarrow ici\ P_1 + P_2 = 1\ \forall t\ ou\ \grave{P}_1 + \grave{P}_2 = 0$

$P_1(t+dt) = P_1(t) \times (1-\lambda dt) + P_2(t) \times \mu dt$

$P_2(t+dt) = P_1(t) \times \lambda dt + P_2(t) \times (1-\mu dt)$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$(P_1(t+dt) \quad P_2(t+dt)) = (P_1(t) \quad P_2(t)) \times \begin{bmatrix} 1-\lambda dt & \lambda dt \\ \mu dt & 1-\mu dt \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(t+dt) = P(t) \times M}$$

Où $M = \begin{bmatrix} 1-\lambda dt & \lambda dt \\ \mu dt & 1-\mu dt \end{bmatrix}$ est la **matrice des probabilités** qui caractérise le système

On développe et on ordonne

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P_1(t+dt) - P_1(t)}{h} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P_2(t+dt) - P_2(t)}{h} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t)$$

Remarque 3.2 : $\frac{dP_1(t)}{dt} + \frac{dP_1(t)}{dt} = 0$ est nulle.

Sous forme matricielle, on obtient : $\left(\frac{dP_1(t)}{dt} \quad \frac{dP_2(t)}{dt}\right) = (P_1(t) \quad P_2(t)) \times \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = P(t) \times Q$$

Où $\frac{dp(t)}{dt} = \left(\frac{dP_1(t)}{dt} \quad \frac{dP_2(t)}{dt}\right)$, $P(t) = (P_1(t) \quad P_2(t))$ et $Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$

Cette nouvelle matrice Q, appelée **matrice des taux de transition** peut être construite aisément suivant le principe :

	Etat 1	**Etat 2**	
Etat 1	$-\lambda$	λ	La somme des probabilités de chaque ligne est toujours nulle
Etat 2	μ	$-\mu$	

Tableau 3.1 : Matrice des taux de transition

3.4 Résolution de l'équation différentielle

Les équations obtenues par le graphe d'état de Markov sont indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P}_1(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \dots \dots (*) \\ \dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \dots \dots . . (*) \end{cases}$$

Nous savons que $\sum P_i = 1 \Rightarrow P_1(t) + P_2(t) = 1$

Donc $P_2(t) = 1 - P_1(t)$ … … . (1)

Si en remplaçant (1) en $(*)$ nous obtenons ce qui suit:

$$(*) \Rightarrow \dot{P_1}(t) = -\lambda P_1(t) + \mu(1 - P_1(t)) \Rightarrow \dot{P_1}(t) + \lambda P_1(t) - \mu(1 - P_1(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{P_1}(t) + \lambda P_1(t) - \mu + \mu P_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{P_1}(t) + \lambda P_1(t) + \mu P_1(t) = \mu$$

$$\Rightarrow \dot{P_1}(t) + (\lambda + \mu) P_1(t) = \mu$$

Equation homogène : $\dot{P_1}(t) + (\lambda + \mu) P_1(t) = 0$

Solution homogène: $P_H(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t}$

Solution particulière : $P_p(t) = A$

$P_1(t) = A \Rightarrow \dot{P}_1(t) = 0$ Donc $(\lambda + \mu)A = \mu \Rightarrow A = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Solution globale : $P_1(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Les conditions initiales étant $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = 0$

$$P_1(0) = Ce^0 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow 1 = C + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\Rightarrow C = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

L'équation finale devient : $P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

La disponibilité vaut : $A(t) = P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

L'indisponibilité vaut : $1 - A(t) = P_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$

Exemple 3.1

Application numérique **:** $\lambda = 0.2\ et\ \mu = 0.7$

Donc $A(t) = P_1(t) = 0.22e^{-0.9t}+0.77$ et $1 - A(t) = P_2(t) = 0.22(1 - e^{-0.9t})$

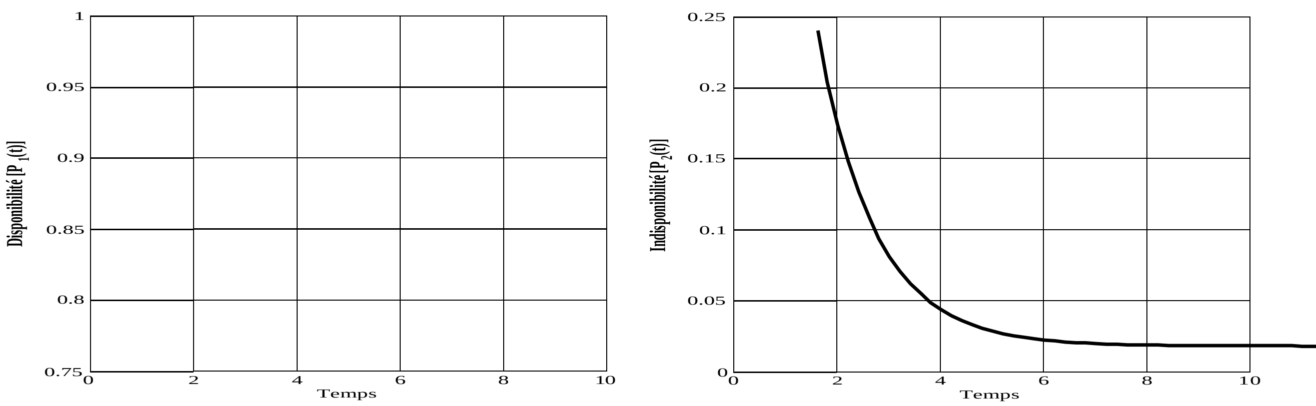


Figure 3.2 : Disponibilité et indisponibilité du système pour $\lambda = 0.2\ et\ \mu = 0.7$

3.5 Système à 2 entités

3.5.1 Dispositif non réparable

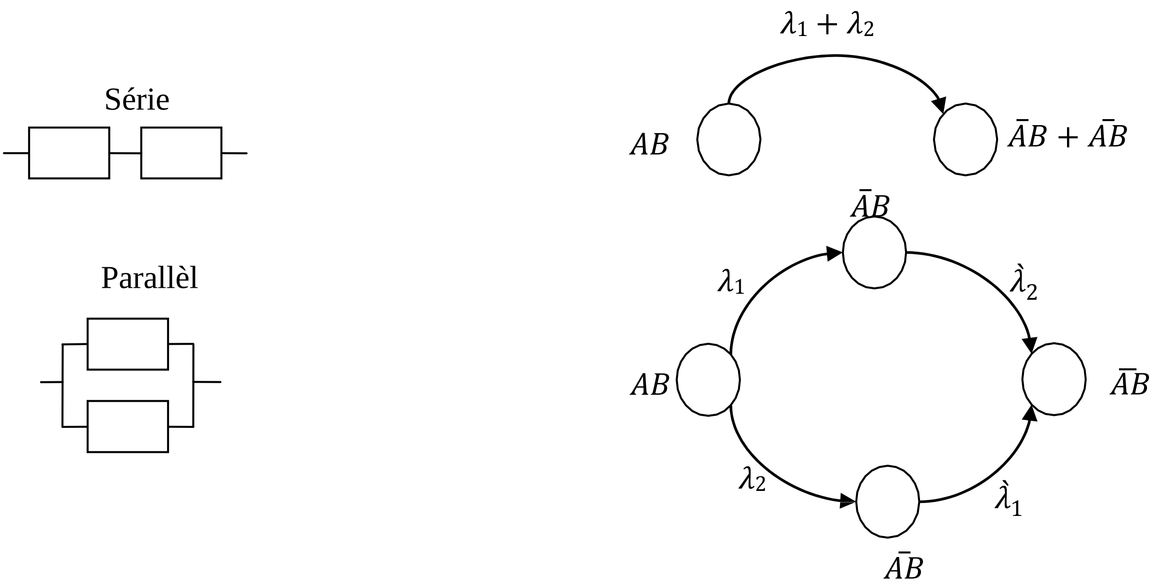


Figure 3.3 : Dispositif non réparable d’un système à deux entités

3.5.2 Dispositif réparable

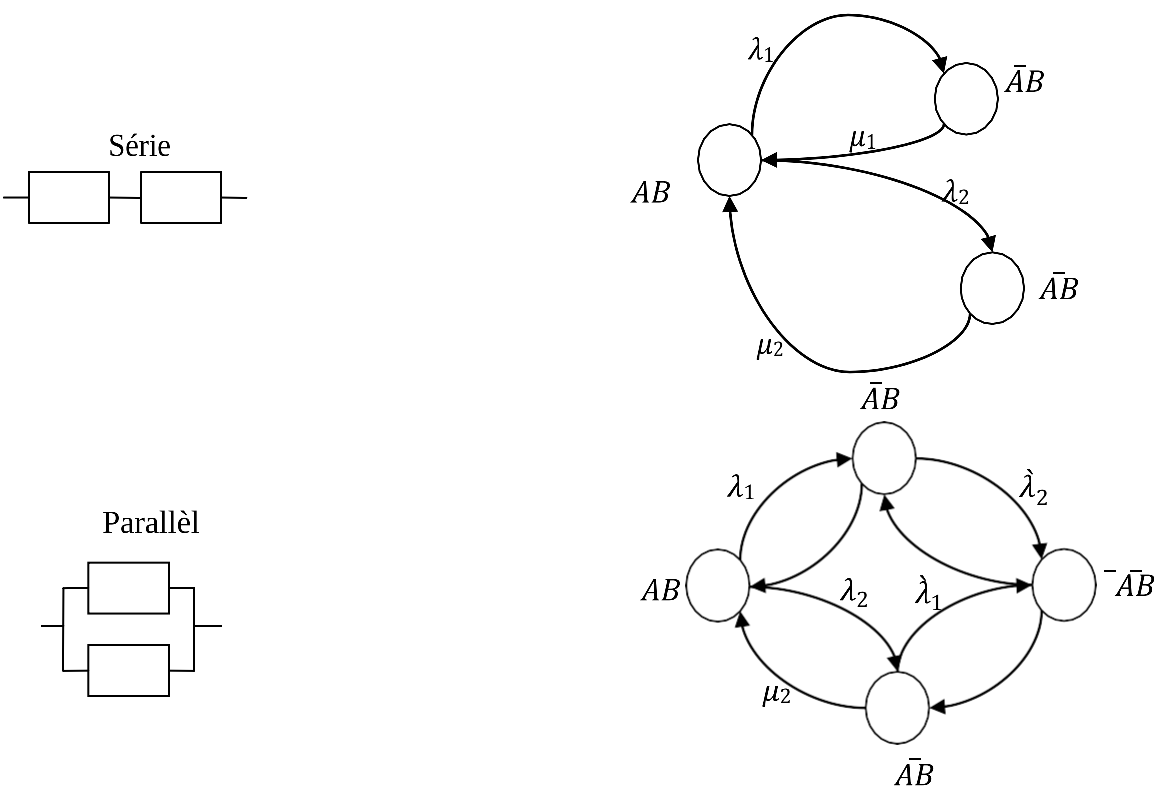
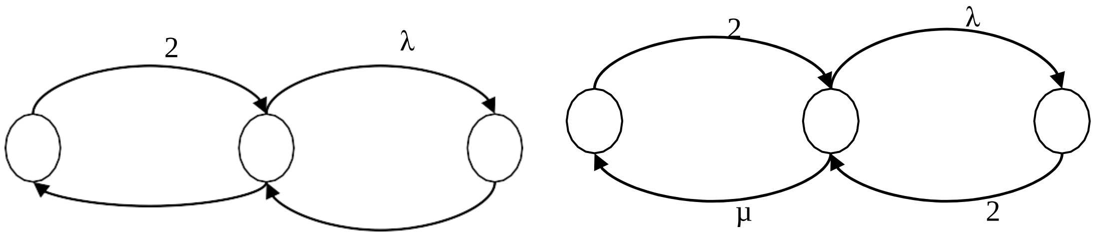


Figure 3.4 : Dispositif réparable d’un système à deux entités

3.6 Simplification

Quand on modélise un système avec une chaîne de Markov, on rencontre le problème de l'explosion combinatoire des états puisque la chaîne a a priori 2^n états pour un système de n éléments à 2 états. Il est néanmoins possible de réduire la taille de la chaîne en agglomérant des états. Cela suppose que les composants soient identiques avec les mêmes taux de défaillance et de réparation. Dans le cas d'un système à deux composants actifs, on peut simplifier les chaines vues ci-dessus de la sorte. L'état i correspond à l'ensemble des états ou il y a *i* pannes.



2 réparateurs

1 réparateur

Figure 3.5 : Simplification la chaine de Markov à deux composants

3.7 Redondance

On appelle redondance l'existence dans une entité de plus d'un moyen pour accomplir une fonction requise.

3.7.1 Redondance active ou chaude

Dans laquelle tous les moyens sont mis en œuvre simultanément. Lorsque le système fonctionne si et seulement si au moins un de ses composants fonctionne, on dit que les composants sont en redondance active.

Dans la redondance k sur n le système fonctionne si et seulement si au moins k composants parmi les n fonctionnent

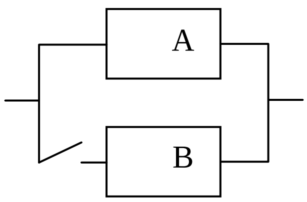


Figure 3.6 : Redondance active

3.7.2 Redondance passive ou froide (séquentielle, en attente, de réserve)

Dans laquelle une partie des moyens est en fonctionnement, le reste en attente, un dispositif assurant la commutation. Lorsque les composants sont en redondance passive le composant Si est normalement en fonctionnement et les autres composants sont en attente, un seul composant fonctionne à la fois, quand il tombe en panne, un autre prend la relève.

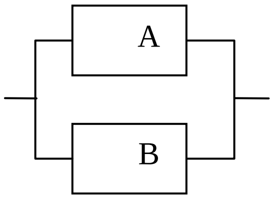


Figure3.7 : Redondance passive

Exemple 3.2

Un système PV est supposé fonctionner sur 30 ans, nous divisons cette période en quatre (4) intervalles (T1, T2, T3 et T4) de 7 ans chacune :

1 à 7 ans (T1),

8 à 14 ans (T2),

15 à 21 ans (T3),

22 à 28 ans (T4).

Période	T1	T2	T3	T4
début	0.9	0.06	0.04	0
Défaut mineurs	0	0.5	0.3	0.2
Défaut majeur	0	0	0.3	0.7
Défaillance complète	0	0	0	1

Tableau 3.2 : Matrice de transition des probabilités

Les différentes études faites sur le terrain ont montré que la dégradation d'un système photovoltaïque est évaluée à 1% par année.

Il ya quatre états possible pour construire la chaine de Markov, les probabilités sont déterminées suite aux résultats des inspections. Au début, le système est bon.

La matrice des probabilités est donnée ci-dessus :

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les quatre états du système photovoltaïque sont :

E1 : système en bonne condition.

E2 : système avec une dégradation partielle et est totalement opérationnel.

E3 : système avec la majorité des défauts et est partiellement opérationnel.

E4 : système complètement défaillant.

Les états $\boldsymbol{E_i}$ sont définis compte tenus des seuils des caractéristiques du système étudié :

Le système PV est en bon état de fonctionnement au début, ce qui peut être traduit par $p_1(0)=1$

La probabilité du système après :

- Première inspection ou après 7 ans est :

$$(P_1(1)\ P_2(1)\ P_3(1)\ P_4(1)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times (P_0(1)\ P_0(1)\ P_0(1)\ P_0(1))\ (*)$$

$$(*) \Rightarrow (P_1(1)\ P_2(1)\ P_3(1)\ P_4(1)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times (1\ 0\ 0\ 0)$$

$$\Rightarrow (P_1(1)\ P_2(1)\ P_3(1)\ P_4(1)) = (0.9\ 0.06\ 0.04\ 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1(1) = 0.9 \\ P_2(1) = 0.06 \\ P_3(1) = 0.04 \\ P_4(1) = 0 \end{cases}$$

- Seconde étape :

$$(P_1(2)\ P_2(2)\ P_3(2)\ P_4(2)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times (P_1(1)\ P_1(1)\ P_1(1)\ P_1(1))\ (*)$$

$$(*) \Rightarrow (P_1(2)\ P_2(2)\ P_3(2)\ P_4(2)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times (0.9\ 0.06\ 0.04\ 0)$$

$$\Rightarrow (P_1(2)\ P_2(2)\ P_3(2)\ P_4(2)) = (0.81\ 0.084\ 0.066\ 0.04)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1(2) = 0.81 \\ P_2(2) = 0.084 \\ P_3(2) = 0.066 \\ P_4(2) = 0.04 \end{cases}$$

- Troisième étape :

$$(P_1(3)\ P_2(3)\ P_3(3)\ P_4(3)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times (P_1(2)\ P_1(2)\ P_1(2)\ P_1(2))\ (*)$$

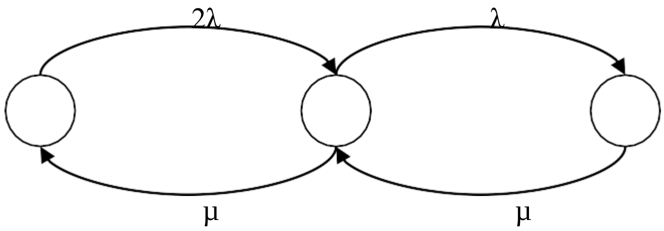
$$(*) \Rightarrow (P_1(3)\ P_2(3)\ P_3(3)\ P_4(3)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times (0.81\ 0.084\ 0.066\ 0.04)$$

$$\Rightarrow (P_1(3)\ P_2(3)\ P_3(3)\ P_4(3)) = (0.729\ 0.0906\ 0.0774\ 0.103)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1(3) = 0.729 \\ P_2(3) = 0.0906 \\ P_3(3) = 0.0774 \\ P_4(3) = 0.103 \end{cases}$$

Exercice 3.1

La figure ci-dessous représente le graphe de Markov d'un système en redondance active à un réparateur :



1- Déterminer la matrice de taux de transition.
2- Ecrire l'équation d'état de la chaîne de Markov.
3- Déterminer $P_1(t)$

Solution

La matrice de taux de transition :

$$M = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Equations d'états

$$\left(\frac{dP_1(t)}{dt}\ \frac{dP_2(t)}{dt}\ \frac{dP_3(t)}{dt}\right) = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \times \left(P_1(t)\ P_2(t)\ P_3(t)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) & (Eq1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 2\lambda P_1(t) - (\mu+\lambda)P_2(t) + \mu P_3(t) & (Eq2) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_2(t) - \mu P_3(t) & (Eq3) \end{cases}$$

Déterminons la probabilité $P_1(t)$:

$$(Eq1) \Longrightarrow P_1(t) + 2\lambda P_1(t) = \mu P_2(t)$$

$$\Longrightarrow P_2(t) = \frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t) \quad (Eq4)$$

Si en remplaçant $(Eq4)$ dans $(Eq2)$ donc en obtient :

$$(Eq2) \Longrightarrow \frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t) = 2\lambda P_1(t) - (\mu+\lambda) \times \left[\frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t)\right] + \mu P_3(t)$$

On a $P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \Longrightarrow P_3(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t)$

$$(Eq2) \Longrightarrow \frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t) - 2\lambda P_1(t) + (\mu+\lambda) \times \left[\frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t)\right] - \mu \times [1 - P_1(t) - P_2(t)]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t) - 2\lambda P_1(t) + \frac{\mu+\lambda}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda\times(\mu+\lambda)}{\mu}P_1(t) - \mu + \mu P_1(t) + \mu P_2(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t) - 2\lambda P_1(t) + \left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)P_1(t) + \left(\frac{2\lambda\times(\mu+\lambda)}{\mu}\right)P_1(t) - \mu + \mu P_1(t) + \mu \times \left[\frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu}P_1(t) + \frac{2\lambda}{\mu}P_1(t) - 2\lambda P_1(t) + \left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)P_1(t) + \left(\frac{2\lambda\times(\mu+\lambda)}{\mu}\right)P_1(t) - \mu + \mu P_1(t) + \dot{P}_1(t) + 2\lambda P_1(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu} P_1(t) + \left[\frac{2\lambda}{\mu} + \frac{\mu+\lambda}{\mu} + 1\right] P_1(t) + \left[-2\lambda + \frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{\mu} + \mu + 2\lambda\right] P_1(t) = \mu$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu} P_1(t) + \left(\frac{3\lambda+2\mu}{\mu}\right) P_1(t) + \left(\frac{2\lambda\mu+2\lambda^2+\mu^2}{\mu}\right) P_1(t) = \mu$$

$\Longrightarrow P_1(t) + (3\lambda + 2\mu) P_1(t) + (2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2) P_1(t) = \mu^2 (*)$ Equation différentielle d'ordre deux

Résoudre l'équation différentielle

- La solution homogène :

$$S^2(t) + (3\lambda + 2\mu) S(t) + 2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2 = 0 \qquad (\boldsymbol{Eq5})$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3\lambda + 2\mu \\ c = 2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2 \end{cases}$$

Calcule le déterminant Δ**:**

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow \Delta = (3\lambda + 2\mu)^2 - 4 \times (2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2)$

$\Longrightarrow \Delta = 9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2 - 8\lambda\mu - 8\lambda^2 - 4\mu^2$

$\Longrightarrow \Delta = \lambda^2 + 4\lambda\mu \quad \begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta > 0$

Les solutions de l'équation $(Eq5)$ sont $\begin{cases} S_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3\lambda-2\mu-\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}{2} \\ S_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3\lambda-2\mu+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}{2} \end{cases}$

Donc la solution homogène de l'équation différentielle est : $P_1(t) = Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t}$

- La solution particulière:

$P_1(t) = K \Longrightarrow P_1(t) = 0 \ et \ P_1(t) = 0$

(*)$\Longrightarrow (2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2) K = \mu^2$

$$\Longrightarrow K = \frac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}$$

La solution Particulière est : $P_1(t) = \frac{\mu^2}{2\lambda\mu+2\lambda^2+\mu^2}$

- La solution générale :

$$P_1(t) = Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t} + \frac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}$$

Déterminons A et B :

Les conditions initiales sont $P_1(0) = 1$ et $P_1 \; (0) = 0$

$$P_1(t) = Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t} + \frac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2} \Longrightarrow \dot{P}_1(t) = AS_1 e^{S_1 t} + BS_2 e^{S_2 t}$$

Donc $P_1 \, (0) = AS_1 + AS_2 \Longrightarrow AS_1 + BS_2 = 0$

$$\Longrightarrow B = -\frac{S_1}{S_2} A$$

$$P_1(0) = A + B + \frac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2} \Longrightarrow A + B + \frac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2} = 1$$

$$\Longrightarrow \; A + B = \frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}$$

$$\Longrightarrow A - \frac{S_1}{S_2} A = \frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2}\right) A = \frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}$$

$$\Longrightarrow A = \left(\frac{S_2}{S_2 - S_1}\right)\left(\frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}\right)$$

$$B = -\left(\frac{S_1}{S_2 - S_1}\right)\left(\frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}\right)$$

Donc :

$$\boxed{P_1(t) = \left(\frac{S_2}{S_2 - S_1}\right)\left(\frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}\right) e^{S_1 t} - \left(\frac{S_1}{S_2 - S_1}\right)\left(\frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}\right) e^{S_2 t} + \frac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}}$$

$$\begin{cases} A = \left(\dfrac{S_2}{S_2 - S_1}\right)\left(\dfrac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}\right) \\ B = -\left(\dfrac{S_1}{S_2 - S_1}\right)\left(\dfrac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2}\right) \\ K = \dfrac{\mu^2}{2\lambda\mu + 2\lambda^2 + \mu^2} \end{cases} \Longrightarrow P_1(t) = Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t} + K$$

3.8 Calcul de la fiabilité

Pour calculer la fiabilité d'un système représente sous forme d'une chaîne de Markov, il faut modifier la chaîne de façon à éliminer toutes les transitions de réparation d'un état de panne vers un état de fonctionnement. Les états de panne deviennent alors absorbants. Ainsi la nouvelle chaîne de Markov associée à un système en redondance active à 2 composants devient

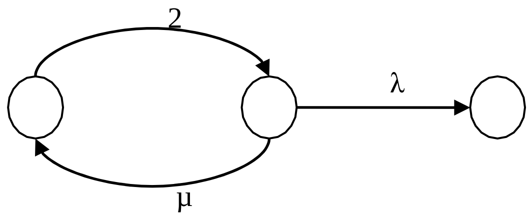


Figure 3.8 : Chaine de Markov à deux composants pour calculer la fiabilité

La fiabilité du système est : $R(t) = \sum_{i\in\, \acute{e}tat\ de\ fonctionnement} P_i(t)$

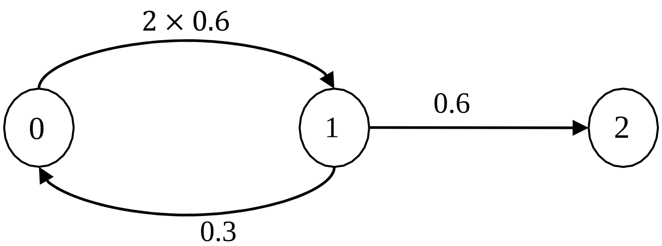
Exercice 3.2 : Les mêmes données que dans l'exercice précédent (Exercice 1), sauf que λ=0,6 et μ=0,3.

- Déterminer $P_1(t)$, $P_2(t)$ et $P_3(t)$
- Calculer la fiabilité du système.

Solution

Afin de calculer la fiabilité, nous éliminons d'abord la transition de réparation d'un état de panne.

Après avoir fait cette étape, nous obtenons la figure ci-dessous :



1- Déterminons $P_1(t)$

Equations d'état de la chaîne de Markov :

La matrice de taux de transition est : $M = \begin{bmatrix} -1.2 & 1.2 & 0 \\ 0.3 & -0.9 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -1.2P_1(t) + 0.3P_2(t) & (Eq6) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 1.2P_1(t) - 0.9P_2(t) & (Eq7) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = 0.6P_2(t) & (Eq8) \end{cases}$$

$$(Eq6) \Rightarrow 0.3P_2(t) = \frac{dP_1(t)}{dt} + 1.2P_1(t)$$

$$\Rightarrow P_2(t) = \frac{1}{0.3} \times [P'_1(t) + 1.2P_1(t)]$$

$(Eq7) \Rightarrow \frac{1}{0.3} \times [\ddot{P}_1(t) + 1.2\dot{P}_1(t)] - 1.2P_1(t) + 0.9 \times [\frac{1}{0.3} \times [P_1(t) + 1.2P_1(t)]] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{0.3}\ddot{P}_1(t) + 4\dot{P}_1(t) - 1.2P_1(t) + 3P_1(t) + 3.6P_1(t) = 0$

$\Rightarrow \ddot{P_1}(t) + 1.2\dot{P_1}(t) - 0.36P_1(t) + 0.9\dot{P}_1(t) + 1.08P_1(t) = 0$

$\Rightarrow \ddot{P_1}(t) + 2.1\dot{P_1}(t) + 0.72P_1(t) = 0$

En résoudre l'équation $S^2 + 2.1S + 0.72 = 0$

Calcule le déterminant Δ :

$\Delta = (2.1)^2 - 4 \times (0.72) \Rightarrow \Delta = 1.53$

Les solutions de l'équation sont $\begin{cases} S_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2.1-\sqrt{1.53}}{2} = -1.67 \\ S_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2.1+\sqrt{1.53}}{2} = -0.43 \end{cases}$

Donc : $P_1(t) = Ae^{-1.67t} + Be^{-0.43t}$

Déterminons A et B :

Les conditions initiales sont : $P_1(0) = 1$ et $\dot{P_1}(0) = 0$

$P_1(t) = Ae^{-1.67t} + Be^{-0.43t} \Rightarrow \dot{P}_1(t) = -1.67Ae^{-1.67t} - 0.43Be^{-0.43t}$

$\dot{P_1}(0) = 0 \Rightarrow -1.67A - 0.43B = 0$

$\Rightarrow \boxed{B = -3.88A}$

$P_1(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1$

$\Rightarrow A - 3.88A = 1$

$\Rightarrow A = -0.35 \; et \; B = 1.35$ $\boxed{P_1(t) = -0.35e^{-1.67t} + 1.35e^{-0.43t}}$

2 - Déterminons la probabilité $P_2(t)$

$(\boldsymbol{Eq7}) \Rightarrow \dot{P_2}(t) = 1.2P_1(t) - 0.9P_2(t)$

$\Rightarrow \dot{P_2}(t) + 0.9P_2(t) = 1.2P_1(t)$

$\Rightarrow \dot{P_2}(t) + 0.9P_2(t) = -0.42e^{-1.67t} + 1.62e^{-0.43t}$ (*) Equation différentielle d'ordre 1

- La solution homogène :

$\dot{P_2}(t) + 0.9P_2(t) = 0$

$S + 0.9 = 0 \Rightarrow S = -0.9$

Donc la solution homogène est : $P_2(t) = Ce^{-0.9t}$

- La solution particulière :

$P_2(t) = ae^{-1.67t} + be^{-0.43t} \Longrightarrow \dot{P_2}(t) = -1.67ae^{-1.67t} - 0.43be^{-0.43t}$

(*)$\Longrightarrow -1.67ae^{-1.67t} - 0.43be^{-0.43t} + 0.9ae^{-1.67t} + 0.9be^{-0.43t} = -0.42e^{-1.67t} + 1.62e^{-0.43t}$

$\Longrightarrow -0.77ae^{-1.67t} + 0.47be^{-0.43t} = -0.42e^{-1.67t} + 1.62e^{-0.43t}$

$\Longrightarrow \begin{cases} -0.77a = -0.42 \\ 0.47b = 1.62 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0.55 \\ b = 3.45 \end{cases}$

La solution particulière est : $P_2(t) = 0.55e^{-1.67t} + 3.45e^{-0.43t}$

- La solution générale :

$P_2(t) = Ce^{-0.9t} + 0.55e^{-1.67t} + 3.45e^{-0.43t}$

La condition initiale est $P_2(0) = 0$

$0 = C + 4 \Longrightarrow C = -4$

$\boxed{P_2(t) = -4e^{-0.9t} + 0.55e^{-1.67t} + 3.45e^{-0.43t}}$

3-Déterminons la probabilité $P_3(t)$

$P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \Longrightarrow P_3(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t)$

$\Longrightarrow P_3(t) = 1 + 0.35e^{-1.67t} - 1.35e^{-0.43t} + 4e^{-0.9t} - 0.55e^{-1.67t} - 3.45e^{-0.43t}$

$\Longrightarrow \boxed{P_3(t) = 1 - 0.2e^{-1.67t} + 4e^{-0.9t} - 4.8e^{-0.43t}}$

$R(t) = \sum_{i \in \text{ état de fonctionnement}} P_i(t) \Longrightarrow R(t) = P_1(t) + P_2(t)$

Déterminons la fiabilité du système

$\Longrightarrow R(t) = -0.35e^{-1.67t} + 1.35e^{-0.43t} - 4e^{-0.9t} + 0.55e^{-1.67t} + 3.45e^{-0.43t}$

$\Longrightarrow \boxed{R(t) = 0.2e^{-1.67t} - 4e^{-0.9t} + 4.8e^{-0.43t}}$

3.9 Avantages et limites

3.9.1 Avantage

- Possibilité de prendre en compte les systèmes complexes avec des redondances ;
- Méthode très utile pour évaluer la disponibilité, la fiabilité et la maintenabilité des systèmes réparables.

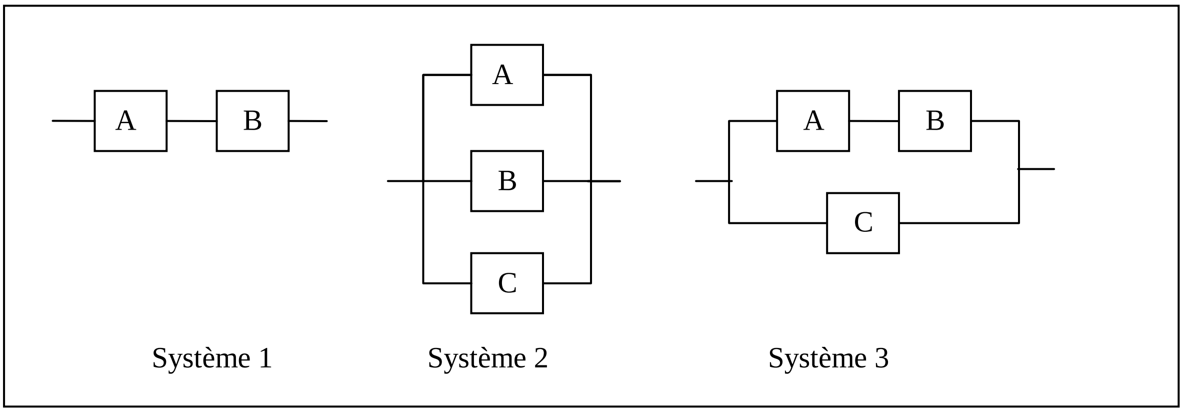
3.9.2 Limites

- Représentation difficile pour les systèmes de grande taille ;
- Calculs numériques complexes (risque d'explosion combinatoire).

3.10 Exercices proposés

Exercice P3.1

Donner la chaîne de Markov associée aux systèmes suivants :



Exercice P3.2

Donner la forme générale de la chaîne de Markov d'un système de n composants en redondance active avec k réparateur