وزارة التّعـلـيم الـعـالـي و البـحـث الـعـلـمي

جـامعـة الشـهـيـد حـمة لـخضر بالـوادي

كـلّـية العـلـوم الدقـيـقة

قـسم الرّياضـيات

المـبـادئ الأسـاسـيّة في الجـبر الخـطّي

دروس، تمـاريـن مفصّـلة الحـلّ وأخـرى مقـتـرحـة

من إعـداد: **نـيـس خـديـجـة**

مـــقـــدّمـــة

تضمّ هذه المطبوعة محتوى مقرّر مادّة الجبر2 من الوحدة التّعليميّة الأساسيّة لطلبة السّنة الأولى رياضيّات وإعلام آلي. يتلخّص مضمونها في أسس الجبر الخطّي الدّي ارتأينا أن نقسّمه إلى أربعة فصول.

يتعلّق الفصل الأوّل بالفضاءات الشّعاعيّة، الدّي نتطرّق فيه لتعريف هذه البنية و أهمّ الأمثلة عليها و قواعد الحساب فيها. بعد أن نتعرّض إلى الأساس و البعد في فضاء شعاعي، سنركّز على أهمّ الخواص والنّظريّات المتعلّقة بهذه البنية في حالة البعد المنتهي.
نتطرّق في الفصل الثّاني إلى التّطبيقات الخطّية بين الفضاءات الشّعاعيّة عموما، ثمّ نركّز على تلك التّي تؤثّر على فضاءات شعاعيّة ببعد منته حيث نسلّط الضوء على نظرية الأبعاد وأبرز نتائجها.
سندرج في الفصل الثّالث، أداة عمليّة ومفيدة جدّا في الجبر الخطّي هي المصفوفات. بعد أن نتعرّض إلى تعريفها، أنواعها والعمليّات عليها، سنربط الصّلة بينها وبين التّطبيقات الخطّيّة (بين فضاءات شعاعيّة ببعد منته) في الجزء الأخير من هذا الفصل، حيث سيجد القارئ فيما يخص كل مفهوم أو خاصّية تتعلّق بهذه التّطبيقات، ما يقابلها بالنّسبة للمصفوفات والعكس بالعكس .
سنخصّص الفصل الأخير من هذه المطبوعة لدراسة جمل المعادلات الخطّية. بعد أن نقدّم تعريفات وصياغات مختلفة لجملة معادلات خطّية (صيغة تابعيّة، شعاعيّة ومصفوفيّة) ونتائج مبدئيّة لأنواع خاصّة منها (الجمل المتجانسة و جمل كرامر)، سنتناول الطّريقة العامّة لدراسة هذه الجمل (بما فيها إيجاد الحلول في حالة وجودها) باستعمال الصّيغة المصفوفيّة .

سنقدّم مع نهاية كلّ فصل، سلسلة من التّمارين مفصّلة الحلّ، يعتبر بعضها ملحقا للدّرس و موضّحا لبعض ملاحظاته، كما نقترح سلسلة أخرى من التّمارين الإضافيّة التّي نترك حلّها للقارئ.

تجدر الإشارة هنا، أنّ المادّة العلميّة المقدّمة في هذه المطبوعة، تفترض أنّ القارئ ملمّ بالمبادئ الأساسيّة من نظريّة المجموعات والعلاقات بينها وكذا البنى الجبريّة الأساسيّة (الزّمرة، الحلقة و الحقل) و التّي تناولها القارئ الطّالب في مادّة الجبر1.

دليل الرموز المستعملة

K	حقل تبديلي
E	فضاء شعاعي
$K-$ ف- ش	فضاء شعاعي على الحقل K
ف-ش-ج	فضاء شعاعي جزئي
K^n	الجداء الديكارتي للحقل K، n مرة
0_E	الشعاع المعدوم
0_K	المقدار السلمي المعدوم
$A(D,E)$	مجموعة كلّ التّطبيقات من مجموعة D في E
$[v_1, v_2, \dots, v_n]$	الفضاء الشعاعي المولّد بالأشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$
$\dim(E)$	بعد الفضاء الشعاعي E
$E_1 + E_2$	مجموع الفضاءين الشعاعيين الجزئيين E_1 و E_2
$E_1 \oplus E_2$	المجموع المباشر للفضاءين الشعاعيين الجزئيين E_1 و E_2
f^{-1}	التطبيق العكسي للتطبيق f
$g \circ f$	تركيب التطبيقين f و g
$\ker(f)$	نواة التّطبيق الخطّي f
$\mathrm{Im}(f)$	صورة التّطبيق الخطّي f
$rang(f)$	رتبة التّطبيق الخطّي f
I_E	التطبيق المطابق في المجموعة E
$L(E_1, E_2)$	فضاء التطبيقات الخطّية من E_1 نحو E_2
$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$	مصفوفة من الدّرجة $(m \times n)$
$M_{m,n}(K)$	فضاء المصفوفات من الدّرجة $(m \times n)$ ذات العناصر في الحقل K
$M_n(K)$	فضاء المصفوفات المربعة من الدّرجة n ذات العناصر في الحقل K
I_n	المصفوفة الحياديّة من الدّرجة n
A^T	منقول المصفوفة A
A_{ij}	المصفوفة النّاتجة عن المصفوفة A بحذف السّطر i والعمود j
M_f	المصفوفة المرافقة للتّطبيق الخطّي f
A^{-1}	مقلوب أو المصفوفة المعاكسة لـA
$dét(A)$ أو $\|A\|$	محدد المصفوفة A
$L_i \to L_i + \sum_{j \neq i} L_j$	التحويل المصفوفي الذي يضيف للسطر رقم i مزج خطي لبقية الأسطر
$C_i \to C_i + \sum_{j \neq i} C_j$	التحويل المصفوفي الذي يضيف للعمود رقم i مزج خطي لبقية الأعمدة
$c_{ij}(A)$	معامل مرافق (i,j) (cofacteur) للمصفوفة A
$rang(A)$	رتبة المصفوفة A
$(A\|B)$	المصفوفة الموسّعة النّاتجة عن A بإضافة العمود B

1. الفضاءات الشّعاعيّة

نفرض في كلّ ما يأتي أنّ للمجموعة K بنية الحقل التّبديلي.

1.1 تعريفات وخواص أوّليّة

تعريف: نقول إنّ للمجموعة E بنية الفضاء الشّعاعي على الحقل K، ونكتب باختصار Kـ ف- ش، إذا كانت E مزوّدة بقانونين:

$$1 \quad + : E \times E \to E \qquad , \qquad 2 \quad . : K \times E \to E$$
$$(x, y) \mapsto x + y \qquad\qquad (\alpha, x) \mapsto \alpha . x$$

بحيث يحقّق هذين القانونين الشّروط التّالية

أ. $(E,+)$ زمرة تبديليّة.

ب. $\forall x \in E : 1_K . x = x$

ج. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E : \ (\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

د. $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in E : \ \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

ه. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E : \ (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

ملاحظة1

أ. يمكن تضعيف تعريف الفضاء الشعاعي وذلك باستبدال الشّرط $(E,+)$ زمرة تبديليّة بالشّرط $(E,+)$ زمرة (انظر إلى التّمرين 1).

ب. إذا كان E Kـ ف- ش فإنّنا نسمّي القانونين $+$ و . في E بالقانون الدّاخلي و قانون التّركيب الخارجي على الترتيب.

ت. نسمّي عناصر E بالأشعّة وعناصر K بالمقادير السّلميّة أو العدديّة؛ وتجري العادة على استعمال رمز الشّعاع بالنّسبة لعناصر E.

مثال 1

أ. ليكن $(K,+,.)$ حقل تبديلي، وليكن $K^n = \underbrace{K \times \ldots \times K}_{n \ fois}$ $(n \in IN^*)$. نتحقق بسهولة أن K^n مزوّد بالقانونين التّاليين $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ ؛ $\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n)$ ($+$ و . الموجودة على يمين المساواة هما العمليّتان الدّاخليّتان في الحقل K) هو فضاء شعاعي على الحقل K. ونستنتج إذن أنّ كلّ حقل تبديلي هو فضاء شعاعي على نفسه.

ب. لتكن D مجموعة غير خالية (ليست مزوّدة ببنية جبريّة بالضرورة) و E فضاء شعاعي على الحقل K ،
ولتكن $A(D,E)$ مجموعة كلّ التّطبيقات من D في E . نعرّف في $A(D,E)$ القانونيين التّاليين
من أجل كلّ $f,g \in A(D,E)$ ومن أجل كلّ $\lambda \in K$:

$$(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \quad ؛ \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

نتحقق بسهولة أنّ المجموعة $A(D,E)$ مزوّدة بهذين القانونيين لها بنية الفضاء الشّعاعي على الحقل K .
(الشعاع المعدوم في هذا الفضاء هو التطبيق المعدوم ونظير شعاع f بالنسبة للقانون الدّاخلي هو الشعاع $(-f)$ المعرّف بـ $\forall x \in D \quad (-f)(x) = -f(x)$)

قواعد الحساب في فضاء شعاعي

قضية: ليكن E K - ف- ش. لدينا القواعد التّالية

$$\begin{aligned}
&1.\ \ \forall x \in E : 0_K.x = 0_E \\
&2.\ \ \forall \alpha \in K : \alpha.0_E = 0_E \\
&3.\ \ \alpha.x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_K \vee x = 0_E
\end{aligned}$$

البرهان

1. لدينا $0_K.x = 0_K.x + 0_E = 0_K.x + (x + (-x)) = (0_K.x + 1_K x) + (-x)$

أين استعملنا خاصية العنصر الحيادي والتجميع للقانون الداخلي وكذا الشرط (ب) في تعريف الفضاء الشعاعي.

الآن باستعمال الشرط (ه) في تعريف الفضاء الشعاعي، لدينا $(0_K.x + 1_K x) = (0_K + 1)x$

إذن باستعمال الشرط (ب) ثانية نجد

$$0_K.x = (0_K. + 1_K)x + (-x) = 1_K x + (-x) = x + (-x) = 0_E$$

2. بنفس الطريقة، وباستعمال الشرط (د) عوض الشرط (ه) ، نجد

$$\alpha.0_E = \alpha.0_E + 0_E = \alpha.0_E + (\alpha x + (-\alpha x)) = (\alpha.0_E + \alpha x) + (-\alpha x) = \alpha(0_E + x) + (-\alpha x) = \alpha x + (-\alpha x) = 0_E$$

3. ليكن $\alpha.x = 0_E$ ، نفرض أن $\alpha \neq 0_K$ إذن يوجد α^{-1} بحيث $\alpha^{-1}\alpha = 1_K$ وبالتالي

$$x = 1_K.x = (\alpha^{-1}\alpha)x = \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}0_E = 0_E$$

أين استعملنا الشرط (ج) والقاعدة 2.

2.1 الفضاء الشّعاعي الجزئي

تعريف ليكن E K- ف - ش. نقول عن جزء غير خال F من E أنّه فضاء شعاعي جزئي من E ونكتب باختصار ف- ش-ج ، إذا تحقق ما يلي

1. $\forall x, y \in F : x - y \in F$
2. $\forall x \in F, \forall \alpha \in K : \alpha . x \in F$

مثال إذا كان E K- ف – ش فإن E و $\{0_E\}$ هي ف- ش-ج من E تسمى ف- ش-ج بديهية وكل ف- ش-ج من E يختلف عنهما يسمى ف- ش-ج ذاتي.

ملاحظة 2

إذا كان E K- ف- ش فإن F ف-ش-ج من E إذا وفقط إذا كان $+|_{F\times F}$ و $.|_{K\times F}$ (اقتصار القانونين الداخلي والخارجي في E على المجموعة الجزئية F) يزوّدان المجموعة F ببنية فضاء شّعاعي على الحقل K .

خاصّية

ليكن E K- ف - ش. إذا كان E_1 ، E_2 ف- ش-ج فإنّ $E_1 \cap E_2$ ف- ش-ج .

البرهان

1. ليكن $x, y \in E_1 \cap E_2$ ، هذا يعني أن $x, y \in E_1$ و كذلك $x, y \in E_2$

بما أن E_1 ، E_2 ف- ش-ج إذن حسب النقطة 1. في تعريف الفضاء الشعاعي فإن $x - y \in E_1$ و كذلك $x - y \in E_2$ وبالتالي $x - y \in E_1 \cap E_2$

2. ليكن $x \in E_1 \cap E_2$ و $\alpha \in K$ ، هذا يعني أن $x \in E_1$ و كذلك $x \in E_2$ ، إذن حسب النقطة 2. في تعريف الفضاء الشعاعي فإن $\alpha x \in E_1$ و كذلك $\alpha x \in E_2$ وبالتالي $\alpha x \in E_1 \cap E_2$

وعليه فإنّ $E_1 \cap E_2$ ف- ش-ج

ملاحظة 3

إذا كان E_1 ، E_2 ف- ش-ج من فضاء شعاعي E فإنّ $E_1 \cup E_2$ ليس ف- ش-ج بالضرورة، والشّرط اللاّزم و الكافي لذلك هو أن يكون $E_1 \subseteq E_2$ أو $E_2 \subseteq E_1$ (انظر إلى التّمرين 3) وهو في الواقع الشّرط اللاّزم والكافي الدّي يجعل اتّحاد زمرتين جزئيتين، زمرة جزئية.

3.1 المزوج الخطية، المجموعة المستقلة خطيا والمجموعة المولدة، الأساس والبعد

تعريف ليكن E K-ف - ش ولتكن $v_1,v_2,\dots,v_n$ أشعّة من E و $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ مقادير سلّميّة من الحقل K. نسمّي الشّعاع $\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2,\dots+\alpha_n.v_n$ مزجا خطّيّا للأشعّة $v_1,v_2,\dots,v_n$ ذو المعاملات $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

تعريف نقول أنّ الفضاء E مولّد بالأشعّة $v_1,v_2,\dots,v_n$ أو أنّ المجموعة $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ تولّد E ونكتب $E=[v_1,v_2,\dots,v_n]$، إذا كان كلّ شعاع من E هو مزج خطّي للأشعّة $v_1,v_2,\dots,v_n$.

الاستقلال الخطّي والارتباط الخطّي

تعريف ليكن E K-ف - ش. نقول أنّ الأشعّة $v_1,v_2,\dots,v_n$ مستقلّة خطّيّا إذا كان من أجل أيّ مقادير سلّميّة $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ بحيث: $\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2,\dots+\alpha_n.v_n=0_E$ فإنّ $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0_K$ أي

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i=0_E \Rightarrow \alpha_i=0_K \quad \forall i=1,\dots,n$$

ونقول أنّ الأشعّة $v_1,v_2,\dots,v_n$ مرتبطة خطّيّا إذا لم تكن مستقلّة خطّيّا أي إذا وجد n مقدار سلّمي

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ ليست كلّها معدومة بحيث $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i=0_E$

الأساس والبعد

تعريف ليكن E K-ف - ش. نقول أنّ مجموعة الأشعّة $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ هي أساس للفضاء E إذا تحقق ما يلي

1. الأشعّة $v_1,v_2,\dots,v_n$ مستقلّة خطّيّا.
2. $E=[v_1,v_2,\dots,v_n]$

تعريف ليكن E K-ف - ش. إذا وجد أساس لـ E عدد أشعّته n فإنّنا نقول أنّ E فضاء شعاعي ذو بعد منته n ونكتب $\dim(E)=n$ وإذا لم يوجد للفضاء E أساس منته نقول أنّ E هو فضاء شعاعي ذو بعد غير منته ونكتب $\dim(E)=\infty$.

ملاحظة 4

رغم أنّ الأساس في فضاء شعاعي (ببعد منته) ليس وحيدا إلاّ أنّ جميع الأسس لها نفس عدد الأشعّة (انظر إلى التّمرين 6 من السلسلة الإضافيّة) وهو ما يبرّر التعريف السّابق للبعد.

تعريف إذا كانت المجموعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ تشكّل أساس للفضاء E و v شعاع من E يكتب على الشّكل: $v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n$ فإنّنا نسمّي المقادير السّلميّة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ مركّبات الشّعاع v في الأساس $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

خاصّية ليكن E K - ف - ش و $v_1, v_2, \ldots, v_n$ أشعّة في الفضاء E ؛ لدينا إذن:
$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس للفضاء E إذا وفقط إذا كان كلّ شعاع من E يكتب بصورة وحيدة على شكل مزج خطّي للأشعّة $v_1, v_2, \ldots, v_n$

البرهان

نفرض أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس للفضاء E ، هذا يستلزم أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ تولّد E وينتج بالتالي أن كلّ شعاع من E يكتب على شكل مزج خطّي للأشعّة $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ويكفي إذن إثبات وحدانيّة هذه الكتابة.

ليكن $v \in E$ بحيث $v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n$ وأيضا $v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2, \ldots + \beta_n.v_n$ $(\alpha_i, \beta_i \in K)$

إذن $$(\alpha_1 - \beta_1).v_1 + (\alpha_2 - \beta_2).v_2, \ldots + (\alpha_n - \beta_n).v_n = 0_E$$

وبما أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مستقلّة خطيا (لأنها أساس) فإن $(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \ldots = (\alpha_n - \beta_n) = 0_K$
وبالتالي فإن $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$
وهذا يعني أن الكتابة وحيدة.

لنفرض الآن أن كلّ شعاع من E يكتب بصورة وحيدة على شكل مزج خطّي للأشعّة $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ، هذا يؤدي مباشرة أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ تولد E
يكفي إذن إثبات أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مستقلّة خطيا
لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ مقادير سلميّة بحيث $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = 0_E$
لكن لدينا أيضا $0_K.v_1 + 0_K.v_2 + \ldots + 0_K.v_n = 0_E$ وبما أن الكتابة وحيدة فإن $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0_K$
وهذا يعني أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مستقلّة خطيا

4.1 الفضاءات الشّعاعيّة ذات البعد المنتهي

نظريّة 1 كلّ فضاء شعاعي مولّد بعدد منته من الأشعّة يحتوي على أساس منته.

البرهان

ليكن E ، K - ف - ش مولّد بعدد منته من الأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le n}$. إذا كانت هذه الأشعّة مستقلّة خطّيا فهي إذن أساس للفضاء E.

إذا لم تكن هذه الأشعّة مستقلّة خطّيا، فلتكن $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ حيث $m<n$ هي أكبر مجموعة مستقلّة خطّيا يمكن استخراجها من المجموعة $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ (نقصد هنا الاحتواء كعلاقة ترتيب في المجموعات). بذلك تكون الأشعّة $v_1,\ldots,v_m,v_i$ $(m+1\le i\le n)$ مرتبطة خطّيا، فتوجد إذن مقادير سلّميّة $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda_i$ ليست كلّها معدومة بحيث يكون

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_m v_m+\lambda_i v_i=0_E$$

($\lambda_i\neq 0$ لأنّه إذا كان $\lambda_i=0$ تصبح الأشعّة $v_1,\ldots,v_m,v_i$ $(m+1\le i\le n)$ مستقلّة خطّيا).

وبذلك يكون $-\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1-\ldots-\lambda_i^{-1}\lambda_m v_m=v_i$ من أجل $(m+1\le i\le n)$ وبالتّالي فإنّ كلّ مزج خطّي للأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ هو مزج خطّي للأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le m}$، وهذا يعني أنّ هذه الأخيرة مجموعة مولّدة للفضاء E وبالتّالي أساس لهذا الفضاء.

نتيجة1

ينتج من برهان النّظريّة السّابقة ما يلي

أ. إذا كانت الأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ تولّد الفضاء E وكانت $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ أشعّة مستقلّة خطّيا فإنّ $n\ge m$

ب. إذا كان $\dim(E)=n$ فإنّ أيّ n شعاع مستقلّة خطّيا في E تكون أساسا له.

ت. إذا كانت $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ تولّد الفضاء E فإن أكبر مجموعة مستقلة خطيا يمكن استخراجها من $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ تشكل أساس لـ E.

نظريّة 2 ليكن E ، K - ف- ش ببعد منته يساوي n ($\dim(E)=n<\infty$). إذا كانت $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ أشعّة مستقلّة خطّيا حيث $m<n$ فإنّه يمكن إيجاد أشعّة $v_{m+1},\ldots,v_n$ تجعل المجموعة $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ أساس للفضاء E.

البرهان

ليكن $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ أساس للفضاء E.

إذا كان كلّ من $u_1,\ldots,u_n$ مزجا خطّيا للأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ عندئذ يكون الفضاء E مولّدا بهذه الأخيرة وبما أنّ $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ مستقلّة خطّيا فإنّ $n\le m$ (نتيجة 1 (أ)) لكن فرضا $m<n$ إذن يوجد $u_{i_1}\in\{u_i\}_{1\le i\le n}$ ليس مزجا خطّيا للأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ وبالتّالي إذا كان $\lambda u_{i_1}+\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_m v_m=0_E$ فإنّ $\lambda=\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0_K$ (لأنّه إذا كان $\lambda\ne 0_K$ فإنّ u_{i_1} يكون مزجا خطّيا للأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ وهذا خلاف للفرض) وهذا يعني أنّ الأشعّة $u_{i_1},v_1,\ldots,v_m$ مستقلّة خطّيا وهكذا حصلنا على $m+1$ شعاع مستقلّة خطّيا.

إذا كان $m+1<n$ ، بنفس الطّريقة يوجد شعاع واحد بين الأشعّة $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ مثلا u_{i_2} ليس مزجا خطّيا للأشعّة $u_{i_1},v_1,\ldots,v_m$ فبإضافة هذا الشّعاع للمجموعة الأخيرة نحصل على $m+2$ شعاعا مستقلّة خطّيا.
وهكذا إلى أن نحصل على n شعاع مستقلّة خطّيا.
بما أنّ $\dim(E)=n$ فإنّ المجموعة الّتي نحصل عليها تكون أساسا للفضاء E (حسب النتيجة1 (ب)).

ملاحظة 5

النظريّة 2 تعني أنّ أيّ أشعّة مستقلّة خطّيا في فضاء شعاعي ببعد منته يمكن تكملتها إلى أساس.

نظريّة 3 ليكن E فضاء شعاعي على حقل K ببعد منته يساوي n و F ف-ش-ج من E.
إذن $\dim(F)\le\dim(E)$ وإذا كان $\dim(F)=\dim(E)$ فإن $F=E$.

البرهان

F فضاء شعاعي ببعد منته لأنه فضاء شعاعي جزئي من فضاء ببعد منته.
من أجل $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ أساس لـ F ، بما أن الأشعة $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ مستقلّة خطّيا في E ، فإنه حسب النتيجة1 (أ)
$n\ge m$ وهذا يعني أن $\dim(F)\le\dim(E)$.

إذا كان $\dim(F)=\dim(E)$ فإن هذا يعني أن E و F مولدان بنفس الأشعة وبالتالي $F=E$.

5.1. المجموع ، المجموع المباشر لفضاءين شعاعيين جزئيين والفضاءات المكملة

إذا كان E ، K - ف- ش و E_1 ، E_2 ف-ش-ج من E. نتحقق بسهولة أن المجموعة التالية $\{u+v : u \in E_1, v \in E_2\}$ هي ف-ش-ج من E وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي.

تعريف: ليكن E ، K - ف- ش وليكن E_1 ، E_2 ف-ش-ج من E.

نسمّي مجموع الفضاءين E_1 و E_2 ونرمز بـ E_1+E_2 الفضاء الشعاعي الجزئي التالي

$$E_1 + E_2 = \{u+v : u \in E_1, v \in E_2\}$$

وإذا كان بالإضافة إلى ذلك $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ فإننا نقول أن المجموع مباشر ونكتب $E_1 \oplus E_2$

ملاحظة إذا كان E ، K - ف- ش و E_1 ، E_2 ف-ش-ج من E ، فإننا نقول أن E مجموع مباشر لـ E_1 و E_2 إذا تحقق ما يلي

$$\begin{cases} \forall w \in E, \exists u \in E_1, \exists v \in E_2 : w = u+v \\ \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

نظريّة 4: ليكن E ، K - ف- ش وليكن E_1 ، E_2 ف-ش-ج من E. القضيتين الآتيتين متكافئتين

1. $E = E_1 \oplus E_2$
2. كلّ شعاع w من E يكتب <u>بصورة وحيدة</u> على الشكل $w=u+v$ حيث $u \in E_1$ و $v \in E_2$.

البرهان

لتكن 1. محققة، هذا يؤدي مباشرة إلى أن كلّ شعاع من E يكتب على الشكل $u+v$ حيث $u \in E_1$ و $v \in E_2$. ويكفي إذن أن نثبت أن الكتابة وحيدة.

نفرض أنّه يوجد $w \in E$ بحيث $w = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ من أجل $u_1, u_2 \in E_1$ و $v_1, v_2 \in E_2$.

إذن $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$ ، وبما أن $u_1, u_2 \in E_1$ و E_1 ف-ش-ج من E فإن $u_1 - u_2 \in E_1$ وكذلك، بما أن $v_1, v_2 \in E_2$ و E_2 ف-ش-ج من E فإن $v_2 - v_1 \in E_2$

وهذا يعني أنّ $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in E_1 \cap E_2$

لكن ، وبما أنّ $E = E_1 \oplus E_2$ فإن $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ وبالتالي $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0_E$

إذن $u_1 = u_2$ و $v_2 = v_1$ وعليه فإن 2. محققة.

لنفرض الآن أن 2. محققة، وهذا يستلزم مباشرة أن $E = E_1 + E_2$ و يكفي إذن أن نثبت أن $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

ليكن $w \in E_1 \cap E_2$ ، هذا يستلزم أن $w \in E_1$ و $-w \in E_2$ (لأن E_2 فـ-ش-ج) وبالتالي فإن $w + (-w) \in E_1 + E_2$ لكن $w + (-w) = 0_E = 0_E + 0_E$

إذن ينتج من 2. أنّ $w = 0_E$ وهذا يعني أنّ $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

تعريف: ليكن E ، K - فـ- ش وليكن E_1 ، E_2 فـ-ش-ج من E.

نقول أن E_1 ، E_2 فضاءين مكملين أو نقول أن E_1 مكمّل لـ E_2 في E إذا كان $E = E_1 \oplus E_2$

الخاصية الآتية تنتج مباشرة عن النظرية4

خاصية إذا كان E_1 ، E_2 فـ-ش-ج من E فإن E_1 مكمّل لـ E_2 في E إذا وفقط إذا كان كلّ شعاع w من E يكتب بصورة وحيدة على الشكل $w = u + v$ حيث $u \in E_1$ و $v \in E_2$.

نظريّة 5: ليكن E ، K - فـ- ش ببعد منته وليكن E_1 ، E_2 فـ-ش-ج من E. لدينا إذن

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

البرهان

ليكن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ أساس لـ $E_1 \cap E_2$ أي $\dim(E_1 \cap E_2) = p$.

بما أن $E_1 \cap E_2 \subset E_1$ وأيضا $E_1 \cap E_2 \subset E_2$ ، فإنه حسب النظريّة2، المجموعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ يمكن تكملتها إلى أساس لـE_1 وليكن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r\}$

و يمكن أيضا تكملتها إلى أساس لـE_2 وليكن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v''_{p+1}, \ldots, v''_s\}$

وهذا يعني أن $\dim(E_1) = r$ و $\dim(E_2) = s$

لنبرهن الآن أن المجموعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r, v''_{p+1}, \ldots, v''_s\}$ هي أساس لـ $E_1 + E_2$

ليكن $z \in E_1 + E_2$ هذا يعني أنه يوجد $x \in E_1$ و $y \in E_2$ بحيث $z = x + y$.

إذن يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_r \in K$ بحيث

$$x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_p.v_p + \alpha_{p+1}.v'_{p+1} + \ldots + \alpha_r.v'_r$$

و يوجد $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_s \in K$ بحيث

$$y = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2, \ldots + \beta_p.v_p + \beta_{p+1}.v''_{p+1} + \ldots + \beta_s.v''_s$$

وبالتالي فإن

$$z = x + y = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2, \ldots + (\alpha_p + \beta_p).v_p + \alpha_{p+1}.v'_{p+1} + \ldots + \alpha_r.v'_r + \beta_{p+1}.v''_{p+1} + \ldots + \beta_s.v''_s$$

وهذا يعني أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r, v''_{p+1}, \ldots, v''_s\}$ تولّد $E_1 + E_2$

لتكن الآن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s-p} \in K$ بحيث

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v'_{p+1} + \ldots + \lambda_r v'_r + \lambda_{r+1} v''_{p+1} + \ldots + \lambda_{r+s-p} v''_s = 0_E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(*)$$

نستنتج من الكتابة السابقة أن

$$x = -(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v'_{p+1} + \ldots + \lambda_r v'_r) = \lambda_{r+1} v''_{p+1} + \ldots + \lambda_{r+s-p} v''_s$$

وبالتالي فإن $x \in E_1 \cap E_2$.

بما أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ أساس لـ $E_1 \cap E_2$ فإنّه توجد $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p \in K$ بحيث

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_p v_p = \lambda_{r+1} v''_{p+1} + \ldots + \lambda_{r+s-p} v''_s$$

وهذا يستلزم أن $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_p v_p - \lambda_{r+1} v''_{p+1} - \ldots - \lambda_{r+s-p} v''_s = 0_E$

وبما أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v''_{p+1}, \ldots, v''_s\}$ مستقلّة خطيّا (لأنها أساس لـ E_2) فإن

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_p = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s-p} = 0_K$$

بالرجوع إلى $(*)$ نجد أن $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v'_{p+1} + \ldots + \lambda_r v'_r = 0_E$

والآن ، بما أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r\}$ مستقلة خطّيا (لأنها أساس لـ E_1) فإن

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_r = 0_K$$

و هذا يعني أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r, v''_{p+1}, \ldots, v''_s\}$ مستقلة خطّيا فهي بالتالي أساس لـ $E_1 + E_2$.

إذن $$\dim(E_1 + E_2) = r + s - p = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$$

نتيجة2: ليكن E ، K - ف- ش ببعد منته وليكن E_1 ، E_2 ف-ش-ج من E . لدينا إذن

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

سلسلة تمارين الفصل الأوّل

التّمرين 1

برهن أنّ شرط التّبديل للقانون الدّاخلي في تعريف الفضاء الشّعاعي ، يمكن برهانه انطلاقا من بقيّة الشروط. (مساعدة: أحسب بطريقتين $(1_K+1_K).(x+y)$)

الحلّ

ليكن E $K-$ ف ش وليكن x,y شعاعين كيفيين من E. إذا استعملنا على الترتيب الشرط د في تعريف الفضاء الشعاعي ثم الشرط ه وأخيرا الشرط ب فإننا نجد

$$(1_K+1_K).(x+y)=(1_K+1_K).x+(1_K+1_K).y=1_K.x+1_K.x+1_K.y+1_K.y=x+x+y+y$$

أمّا إذا استعملنا على الترتيب الشرط ه في تعريف الفضاء الشعاعي ثم الشرط د وأخيرا الشرط ب لحساب نفس المقدار فإننا نحصل على

$$(1_K+1_K).(x+y)=1_K.(x+y)+1_K.(x+y)=1_K.x+1_K.y+1_K.x+1_K.y=x+y+x+y$$

وبالتالي $x+x+y+y=x+y+x+y$

الآن بتركيب نظير x على يسار طرفي المساواة السابقة و نظير y على يمينها نجد

$$(-x)+x+x+y+y+(-y)=(-x)+x+y+x+y+(-y)$$

باستعمال التجميع وتعريف النظير في زمرة نحصل على

$$0_E+x+y+0_E=0_E+y+x+0_E$$

وأخيرا نخلص إلى النتيجة المطلوبة بمجرّد استحضار تعريف العنصر الحيادي في زمرة.

التّمرين 2

لتكن E مجموعة كلّ التّطبيقات المعرّفة على المجموعة $\{0,1,2,...,9\}$ وتأخذ قيمها في IR ولتكن E_1 ، E_2 المجموعتين الجزئيّتين من E المعرّفة كما يلي

$$E_2=\{f\in E:3f(0)+7f(1)=-2\} \quad ، \quad E_1=\{f\in E:f(0)=f(1)\}$$

هل E ، E_1 ، E_2 فضاءات شعاعيّة على IR ؟ أوجد بعدها في حالة الإيجاب.

الحلّ

1.بما أنّ IR فضاء شعاعي على نفسه (ارجع للمثال 1 (أ)) فإنّ E مزوّدة بالقانونين

$$\forall f,g\in E,\forall\lambda\in IR:\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad ؛ \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

هي فضاء شعاعي على IR (ارجع للمثال 1 (ب)) حيث أنّ E في هذه الحالة، ما هي إلاّ المجموعة ($A(\{0,1,2,...,9\}, IR)$

نعتبر التّطبيقات $f_0, f_1,..., f_9 \in E$ المعرّفة كما يلي

$$\forall i, j \in \{0,1,...,9\}: f_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases}$$

لنبرهن أنّ $\{f_i\}_{0\le i\le 9}$ أساس للفضاء E.

ليكن $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_9 f_9 = 0$ حيث $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_9 \in IR$

هذا يعني أنّ: $\forall i \in \{0,1,...,9\}: (\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_9 f_9)(i) = 0$

إذن حسب تعريف القوانين في الفضاء E فإنّ

$$\forall i \in \{0,1,...,9\}: \lambda_0 f_0(i) + \lambda_1 f_1(i) + ... + \lambda_9 f_9(i) = 0$$

لكن تعريف التطبيقات f_i $(0 \le i \le 9)$ يجعل $\forall i \in \{0,1,...,9\}: \lambda_0 f_0(i) + \lambda_1 f_1(i) + ... + \lambda_9 f_9(i) = \lambda_i$

ممّا يؤدي إلى

$$\forall i \in \{0,1,...,9\}: \lambda_i = 0$$

وبالتالي فإن $\{f_i\}_{0\le i\le 9}$ مستقلة خطيّا.

لنبرهن الآن أنّ $\{f_i\}_{0\le i\le 9}$ مجموعة مولّدة للفضاء E.

ليكن $f \in E$ لنعيّن $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_9 \in IR$ بحيث يكون

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_9 f_9$$

إذن من أجل كلّ $0 \le i \le 9$ فإنّ:

$$f(i) = \lambda_0 f_0(i) + \lambda_1 f_1(i) + ... + \lambda_9 f_9(i) = \lambda_i$$

فينتج بالتالي أنّه من أجل كلّ $f \in E$:

$$f = f(0) f_0 + f(1) f_1 + ... + f(9) f_9$$

وعليه فإن $\{f_i\}_{0\le i\le 9}$ مجموعة مولّدة وهي بالتالي أساس للفضاء E. إذن E هو فضاء شعاعي على IR بعده 10.

2.لنبرهن أنّ E_1 ف-ش-ج من E.

واضح أنّ التطبيق المعدوم عنصر من E_1 وهو بالتالي جزء غير خال من E.

ليكن الآن $f, g \in E_1$ وليكن $\alpha, \beta \in IR$ لدينا

$$(\alpha f+\beta g)(0)=\alpha f(0)+\beta g(0)=\alpha f(1)+\beta g(1)=(\alpha f+\beta g)(1)$$

وبالتالي $\alpha f+\beta g\in E_1$. إذن E_1 فـ-ش-ج من E .

نبرهن بسهولة (كما في الجزء الأوّل)، أنّ المجموعة $\{g_0,g_2,g_3,g_4,...,g_9\}$ المعرّفة بــ

$$\begin{cases} g_0(0)=g_0(1)=1 \\ g_0(i)=0 \quad 2\le i\le 9 \end{cases} \text{ ، } \forall i\in\{2,...,9\},\forall j\in\{0,1,...,9\}: g_i(j)=\delta_{ij}$$

هي أساس لــ E_1 وبالتالي E_1 هو فضاء شعاعي على IR بعده 9.

3. ليكن $f,g\in E_2$ لدينا إذن $3f(0)+7f(1)=-2$ وأيضا $3g(0)+7g(1)=-2$ وبالتالي

$$3(f+g)(0)+7(f+g)(1)=-4$$

هذا يعني أنّ $f+g\notin E_2$ ومنه E_2 ليس فـ-ش-ج من E وهو وبالتالي ليس فضاء شعاعي على IR (ارجع للملاحظة 2)

التّمرين 3

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K وليكن E_1 ، E_2 فضاءين شعاعيّين جزئيين .

1. نفرض أنّ $E_1\not\subset E_2$ و $E_2\not\subset E_1$. أوجد $v_1\in E_1$ و $v_2\in E_2$ بحيث $v_1+v_2\notin E_1\cup E_2$.

2. استنتج أنّ $E_1\cup E_2$ هو فضاء شعاعي جزئي إذا وفقط إذا كان $E_1\subseteq E_2$ أو $E_2\subseteq E_1$.

الحلّ

1. بما أنّ $E_1\not\subset E_2$ فإنّه يوجد $v_1\in E_1-E_2$ و بما أنّ $E_2\not\subset E_1$ فإنّه يوجد $v_2\in E_2-E_1$

لنبرهن أنّ $v_1+v_2\notin E_1$. إذا فرضنا العكس، أي $v=v_1+v_2\in E_1$.

بما أنّ E_1 فـ-ش-ج و $v,v_1\in E_1$ فإنه $-v_1+v\in E_1$

هذا يعني أنّ $-v_1+(v_1+v_2)\in E_1$ وخاصية التجميع للقانون الداخلي تؤدي إذن إلى

$$(-v_1+v_1)+v_2=0_E+v_2=v_2\in E_1$$

وهذا تناقض مع كون $v_1\in E_1-E_2$ وبالتالي $v_1+v_2\notin E_1$

و بالمثل نستطيع أن نبرهن أيضا أن $v_1+v_2\notin E_2$ و هذا يعني أنّ $v_1+v_2\notin E_1\cup E_2$

2. إذا كان $E_1\subseteq E_2$ أو $E_2\subseteq E_1$ فإن $E_1\cup E_2=E_2$ أو $E_1\cup E_2=E_1$ و بالتالي فإن $E_1\cup E_2$ فـ-ش-ج .

أمّا إذا كان $E_1\not\subset E_2$ و $E_2\not\subset E_1$ ، فإنه حسب السؤال 1، يوجد $v_1\in E_1\subset E_1\cup E_2$ و يوجد $v_2\in E_2\subset E_1\cup E_2$ بحيث $v_1+v_2\notin E_1\cup E_2$

ممّا يعني أنّ $E_1\cup E_2$ ليس فـ-ش-ج

التّمرين 4

في الفضاء الشّعاعي IR^3 على الحقل IR نعتبر المجموعة التّالية:

$F = \{(x, y, z) \in IR^3 : 2x - 3y + z = 0\}$

1. برهن أنّ F فضاء شعاعي جزئي من IR^3.
2. أوجد أساس لهذا الفضاء ثمّ استنتج بعده.

الحلّ

1. واضح أنّ $(0,0,0) \in F$ وبالتّالي F جزء غير خال من IR^3.

من أجل $(x, y, z), (x', y', z') \in F$ ومن أجل $\alpha, \beta \in IR$ فإنّ

$$\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

ولدينا

$$2(\alpha x + \beta x') - 3(\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') = \alpha(2x - 3y + z) + \beta(2x' - 3y' + z') = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

($(2x - 3y + z) = 0$ لأن $(x, y, z) \in F$ و $(2x' - 3y' + z') = 0$ لأنّ $(x', y', z') \in F$)

وبالتالي $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in F$ وعليه فإنّ F ف-ش-ج من IR^3.

2. ليكن $V = (x, y, z) \in F$، لدينا أوّلا $2x - 3y + z = 0$ وعليه فإنّ $z = -2x + 3y$ و بالتّالي

$$V = (x, y, z) = (x, y, -2x + 3y) = x(1,0,-2) + y(0,1,3)$$

هذا يعني أنّ $F = [(1,0,-2), (0,1,3)]$ (F مولّد بالمجموعة $\{(1,0,-2), (0,1,3)\}$)

من جهة أخرى، لدينا

$$\alpha(1,0,-2) + \beta(0,1,3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

ممّا يثبت أنّ $\{(1,0,-2), (0,1,3)\}$ مجموعة مستقلّة خطّيا وهي بالتالي أساس لـ F. إذن $\dim(F) = 2$

التمرين 5

نعتبر E الفضاء الشّعاعي IR^4 على الحقل IR وليكن E_1 الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بالمجموعة $\{v_1=(2,2,1,0), v_2=(1,4,2,-1), v_3=(2,1,-1,0), v_4=(2,-5,-4,2)\}$ و E_2 الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بالمجموعة $\{w_1=(2,1,4,5), w_2=(1,2,3,4)\}$.

1.أوجد أساس لكلّ من E_1 و E_2 ثمّ استنتج $\dim(E_1)$ و $\dim(E_2)$.

2.هل يمكن تكملة أشعّة أساس الفضاء E_1 إلى أساس للفضاء E ؟

الحلّ

1.لتكن $G_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$، إذن حسب النتيجة1 (ت) فإن أساس E_1 هو أكبر مجموعة مستقلّة خطّيا يمكن استخراجها من G_1.

لندرس إمكانيّة أن تكون G_1 هي أكبر مجموعة مستقلّة خطّيا.

لدينا

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_4 v_4=0_{IR^4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3-5\lambda_4=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3-4\lambda_4=0 \\ -\lambda_2+2\lambda_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\lambda_4 \\ \lambda_2=2\lambda_4 \\ \lambda_3=-\lambda_4 \end{cases}$$

إذن مثلا من أجل $\lambda_4=1$ نجد $-(2,2,1,0)+2(1,4,2,-1)-(2,1,-1,0)+(2,-5,-4,2)=(0,0,0,0)$

وهذا يعني أنّ G_1 مرتبطة خطيا (ليست أكبر مجموعة مستقلّة خطّيا)

لنختبر الآن إمكانيّة أن تكون أكبر مجموعة مستقلّة خطّيا مشكّلة من ثلاث أشعّة ولنختار المجموعة $\{\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_4\}$ على سبيل المثال

$$\lambda_1 v_1+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4=0_{IR^4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1+2\lambda_3+2\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+\lambda_3-5\lambda_4=0 \\ \lambda_1-\lambda_3-4\lambda_4=0 \\ 2\lambda_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0$$

هذا يعني أنّ $\{v_1, v_3, v_4\}$ مستقلة خطيا وهي بالتالي أكبر مجموعة مستقلة خطيا يمكن استخراجها من G_1.

إذن $B = \{v_1, v_3, v_4\}$ تشكل أساس لـ E_1 وعليه فإنّ $\dim(E_1) = 3$.

تجدر الإشارة هنا، أنّ أكبر مجموعة مستقلة خطيا يمكن استخراجها من G_1 ليست وحيدة، وهو ما يفسّر الاختيار الذي انطلقنا منه عند اختبارنا لإمكانيّة أن تكون المجموعة مشكلة من ثلاث أشعّة وعليه فإنّ الأساس المستخرج بهذه الطريقة ليس وحيدا ولكنّ المؤكد أنّ عدد عناصر كلّ الأسس المستخرجة الممكنة وحيد.

ويمكن أن نتحقق بسهولة، في هذا المثال أنّ كلّ ثلاث أشعّة من G_1 تشكل أكبر مجموعة مستقلة خطيا.

من أجل $G_2 = \{w_1, w_2\}$، فإنّنا نتحقق بسهولة أنّ G_2 مستقلة خطيا وهي بالتالي أساس لـ E_2 (G_2 هي أكبر مجموعة مستقلة خطيا). وعليه فإنّ $\dim(E_2) = 2$.

2.بما أنّ بعد الفضاء E منته ($\dim(E) = 4$) كما أنّ أساس الفضاء E_1 هو مجموعة مستقلة خطيا في E فإنّه يمكن تكملة أشعّة أساس الفضاء E_1 إلى أساس للفضاء E وذلك حسب النظريّة 2 : كلّ مجموعة أشعّة مستقلة خطيا في فضاء شعاعي ببعد منته يمكن تكملتها إلى أساس (ارجع للملاحظة 5)

سلسلة تمارين مقترحة

التّمرين 1

لتكن $E = IR \times IR^*$. نعرّف على E القانونين التّاليين:

$$\alpha \bullet (x, y) = (x, \alpha y) \quad ، \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

هل المجموعة E مزوّدة بهذين القانونين فضاء شعاعي على الحقل IR ؟

التّمرين 2

في كل حالة من الحالات التالية، عين تلك التي تمثل ف.ش.ج. من الف-ش. E على الحقل K .

أ. $E_1 = \{ (a,b,c) \in IR^3 : \ a^2 + b^2 + c^2 \le 1 \}, \quad E = IR^3, \quad K = IR$

ب. $E_2 = \{ (a,b,c) \in IR^3 : \ a + c = 0 \}, \quad E = IR^3, \quad K = IR$

ج. $E_3 = \{ f \in A(IR, IR) : \ f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in IR \}, \quad E = A(IR, IR), \quad K = IR$

د. $E_4 = \{ f \in A(IR, IR) : \ f(1) = 0 \}, \quad E = A(IR, IR), \quad K = IR$

التّمرين3

ادرس الاستقلال أو الارتباط الخطّي للمجموعات التّالية:

1. $\{(1,0,1), (2,1,-1)\}$ في الفضاء الشّعاعي IR^3 على الحقل IR .
2. $\{(1,1), (2,1), (-1,0)\}$ في الفضاء الشّعاعي IR^2 على الحقل IR .
3. $\left\{ \left(f_{\alpha_i} \right)_{\alpha_i \in IR^+} : f_{\alpha_i} : IR \to IR^+ \ / \ f_{\alpha_i}(x) = e^{\alpha_i x} \right\}$ حيث $(\alpha_i)_{i \in IN^*}$ متتالية متزايدة في IR^+ ، في الفضاء $A(IR, IR^+)$

التّمرين 4

في الفضاء الشّعاعي IR^3 على الحقل IR في أيّ حالة تشكّل المجموعة $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ أساسا لهذا الفضاء، ثمّ أوجد مركّبات الشّعاع $\vec{v} = (0,3,1)$ في هذا الأساس.

1. $\vec{v}_1 = (1,0,0), \vec{v}_2 = (1,1,0), \vec{v}_3 = (3,-1,1)$
2. $\vec{v}_1 = (3,1,2), \vec{v}_2 = (2,1,2), \vec{v}_3 = (-1,2,5)$
3. $\vec{v}_1 = (1,1,0), \vec{v}_2 = (0,1,1), \vec{v}_3 = (1,2,1)$

التّمرين 5

أوجد قيمة α الّتي تجعل الأشعّة التّالية مستقلّة خطّيا في الفضاء الشّعاعي IR^3 على الحقل IR

$$\vec{v}_1 = (\alpha, -1, -1), \vec{v}_2 = (-1, \alpha, -1), \vec{v}_1 = (-1, -1, \alpha)$$

التمرين 6

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K

1. برهن أنّه إذا كانت $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ أشعّة كيفيّة في E وكانت $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1}$ مزوجا خطّية للأشعّة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ فإنّ هذه الأخيرة مجموعة مرتبطة خطّيا.(مساعدة: استخدم البرهان بالتّراجع على n)
2. استنتج أنّه إذا كان بعد E منته فإنّ جميع أسس E لها نفس عدد الأشعّة.

2. التّطبيقات الخطّية

1.2 تعريف وخواص أوليّة

تعريف ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K وليكن f تطبيق من E_1 في E_2. نقول أنّ f تطبيق خطّي إذا تحقّق ما يلي:

$$1.\ \ \forall x, y \in E_1 : f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$2.\ \ \forall \vec{x} \in E_1 \quad \forall \alpha \in K : f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

ويمكن كتابة الشّرطين السّابقين في شرط واحد كما يلي:

$$\forall x, y \in E_1, \forall \alpha, \beta \in K : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

ملاحظة 1

1. إذا كان f تطبيقا خطّيا بين فضاءين شعاعيّين E_2, E_1 على نفس الحقل K فإنّ خطّية f لا تتعلّق **فقط** بصيغته ولكنّها ترتبط أيضا مباشرة ببنية الفضاءين الشعاعيّين E_2, E_1 ، فيمكن أن يكون نفس التّطبيق، خطّيا إذا اعتبرنا بنية معيّنة للفضاءين الشعاعيّين E_1 و (أو) E_2 ، ولا يكون كذلك إذا غيّرنا هذه البنية (انظر إلى التّمرين 2).

2. إذا كان E فضاء شعاعي على حقل K ، فإن كلّ تطبيق خطي من E نحو K (باعتباره فضاء شعاعيّا على نفسه) يسمى شكلا خطّيا.

خواصّ ليكن E_2, E_1 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K و f تطبيق خطّي من E_1 في E_2. لدينا إذن:

أ. $f(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ ، ب. $\forall x \in E_1 : f(-x) = -f(x)$

البرهان

الخواص المذكورة تنتج مباشرة عن كون التطبيق الخطي f تماثل بين الزمرتين $(E_1, +)$ و $(E_2, +)$

القضيّة الآتية تنتج بسهولة من تعريف التطبيق الخطي، عمليّة تركيب التّطبيقات والتّطبيق العكسي؛ لذلك سنقتصر على برهان الجزء الأول منها.

قضيّة1: ليكن E_1, E_2, E_3 فضاءات شعاعيّة على نفس الحقل K وليكن f تطبيق خطّي من E_1 في E_2 و g تطبيق خطّي من E_2 في E_3. لدينا إذن:

1. $g \circ f$ تطبيق خطّي من E_1 في E_3

2. إذا كان f تقابلي فإن التطبيق العكسي f^{-1} هو تطبيق خطّي من E_2 في E_1

البرهان

1. من أجل $x, y \in E_1$، لدينا : $(g \circ f)(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y))$ (لأن f خطي)

$= g(f(x)) + g(f(y))$ (لأن g خطي)

$= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$ (تعريف التطبيق الخطي)

من أجل $x \in E_1$ و $\alpha \in K$، لدينا $(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x))$ (لأن f خطي)

$= \alpha g(f(x))$ (لأن g خطي)

$= \alpha (g \circ f)(x)$ (تعريف التطبيق الخطي)

وبالتالي $g \circ f$ تطبيق خطّي.

قضيّة2: ليكن E_2, E_1 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K. إذا كان $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس لـ E_1 و $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ أشعة كيفية من E_2 فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد f من E_1 في E_2 يحقق $f(v_i) = u_i$ وذلك من أجل كلّ $1 \le i \le n$.

البرهان:

بما أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس لـ E_1 فإنه من أجل كلّ $x \in E_1$ يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ بحيث $x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n$،

إذن نضع $\forall x \in E_1 : f(x) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2, \ldots + \alpha_n.u_n$

نتحقق بسهولة أن f تطبيق خطي، كما أنه واضح أنه يحقق $f(v_i) = u_i$ وذلك من أجل كلّ $1 \le i \le n$.

لنفرض الآن أنّه يوجد تطبيق خطي آخر g من E_1 في E_2 يحقق أيضا $g(v_i) = u_i$ وذلك من أجل كلّ $1 \le i \le n$.

من أجل كلّ $x \in E_1$ بحيث $x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n$، لدينا إذن (لأن g تطبيق خطي)

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) + \ldots + \alpha_n g(v_n) \\ &= \alpha_1 . u_1 + \alpha_2 . u_2 , \ldots + \alpha_n . u_n \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $f = g$

2.2. نواة و صورة تطبيق خطّي

تعريف ليكن f تطبيق خطّي بين فضاءين شعاعيّين E_1 و E_2 على نفس الحقل K.
نسمّي نواة التّطبيق الخطّي f ونرمز لها بالرّمز $\ker(f)$ المجموعة $\{x \in E_1 : f(x) = 0_{E_2}\}$ أي

$$\ker(f) = \{x \in E_1 : f(x) = 0_{E_2}\}$$

و نسمّي صورة التّطبيق الخطّي f ونرمز لها بالرّمز $\operatorname{Im}(f)$ المجموعة $\{f(x) : x \in E_1\}$ أي

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) : x \in E_1\}.$$

ملاحظة 2 ينتج مباشرة عن التعريف السابق، ما يلي

$$\operatorname{Im}(f) = f(E_1) \quad \text{و} \quad \ker(f) = f^{-1}(0_{E_2})$$

خواصّ ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K وليكن f تطبيق خطّي من E_1 في E_2.
إذن لدينا الخواص الآتية:

1. إذا كان H فـ- ش-ج من E_2 فإنّ $f^{-1}(H)$ فـ- ش-ج من E_1 وبصورة خاصّة فإنّ $\ker(f)$ هو فـ- ش-ج من E_1.

2. إذا كان L فـ- ش-ج من E_1 فإنّ $f(L)$ فـ- ش-ج من E_2 وبصورة خاصّة فإنّ $\operatorname{Im}(f)$ هو فـ- ش-ج من E_2.

3. f متباين $\Leftrightarrow \ker(f)=\{\vec{0}_{E_1}\}$

4. f غامر $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f)=E_2$

البرهان

1. ليكن $x,y\in f^{-1}(H)$ هذا يعني أن $f(x),f(y)\in H$
وبالتالي $f(x)-f(y)\in H$ لأن H ف- ش-ج. إذن حسب تعريف التطبيق الخطّي والخاصية ب. أعلاه $f(x)+f(-y)=f(x-y)\in H$ وهذا يعني أن $x-y\in f^{-1}(H)$

ليكن $x\in f^{-1}(H)$ و $\alpha\in K$، هذا يعني أن $f(x)\in H$.

لدينا حسب تعريف التطبيق الخطّي $f(\alpha x)=\alpha f(x)\in H$ لأن H ف- ش-ج وبالتالي $\alpha x\in f^{-1}(H)$
إذن H ف- ش-ج

2. بطريقة مماثلة لـ 1.

3. لنفرض أن f متباين.

ليكن $x\in\ker(f)$، إذن $f(x)=0_{E_2}$ وبما أن $f(0_{E_1})=0_{E_2}$ فإن $f(x)=f(0_{E_1})$، لكن تباين f يؤدي إلى $x=0_{E_1}$ وعليه $\ker(f)=\{0_{E_1}\}$

لنفرض الآن أن $\ker(f)=\{0_{E_1}\}$

ليكن $x,y\in E_1$ بحيث $f(x)=f(y)$ ، هذا يستلزم أن $f(x)-f(y)=0_{E_2}$ وبالتالي $f(x-y)=0_{E_2}$ لأن f خطي. هذا يعني أن $x-y\in\ker(f)$ وبما أن $\ker(f)=\{0_{E_1}\}$ فإن $x-y=0_{E_1}$ أي $x=y$ مما يؤدي إلى تباين f .

4. تنتج مباشرة عن تعريف $\operatorname{Im}(f)$ وتعريف الغمر.

نظريّة1: ليكن E_2, E_1 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K وليكن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس لـ E_1 و $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ أشعة كيفية من E_2 و f التطبيق الخطي من E_1 في E_2 الذي يحقق $f(v_i) = u_i$ وذلك من أجل كلّ $1 \le i \le n$. لدينا إذن

1. f متباين إذا وفقط إذا كان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مستقلة خطيا
2. f غامر إذا وفقط إذا كان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ تولد E_2
3. f تقابلي إذا وفقط إذا كان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ أساس لـ E_2

البرهان

لنلاحظ أوّلا أن وجود ووحدانية التطبيق الخطي f ، تضمنه القضية 2.

1. ليكن $x \in E_1$ بحيث $x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n$ ، إذن حسب قضيّة 2 فإن

$$f(x) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2, \ldots + \alpha_n.u_n$$

أ. إذا كان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مستقلة خطيا فإن

$$x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_{E_2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2, \ldots + \alpha_n.u_n = 0_{E_2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 =, \ldots = \alpha_n = 0_{E_1}$$ (لأن $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مستقلة خطيا)

$$\Rightarrow x = 0_{E_1}$$

مما يعني أن $\ker(f) = \{0_{E_1}\}$ وهذا يكافئ أن f متباين.

ب. إذا كان f متباين وفرضنا أن $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2, \ldots + \alpha_n.u_n = 0_{E_2}$

فهذا يكافئ أن $f(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n) = 0_{E_2}$

وهذا يعني أن $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n \in \ker(f)$

وبما أن $\ker(f) = \{0_{E_1}\}$ (لأن f متباين) فإن $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2, \ldots + \alpha_n.v_n = 0_{E_1}$

وهذا يجعل $\alpha_1 = \alpha_2 =, \ldots = \alpha_n = 0_K$ (لأن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مستقلة خطيا باعتبارها أساس)

.2

أ. إذا كانت $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ تولد E_2 فإن كلّ شعاع $y \in E_2$ يمكن كتابته على الشكل

$y = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2,\ldots + \alpha_n.u_n$

وهذا يعني أن $y = f\left(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2,\ldots + \alpha_n.v_n\right)$

وبالتالي فإن $y \in \mathrm{Im}(f)$ وعليه فإن f غامر.

ب. إذا كان f غامر وفرضنا أن $y \in E_2$ فإنه يوجد $x \in E_1$ بحيث $y = f(x)$

إذن من أجل $x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2,\ldots + \alpha_n.v_n$ فإن $y = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2,\ldots + \alpha_n.u_n$ وهذا يعني أن $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ تولد E_2

3. تنتج مباشرة عن 1 و 2

3.2.رتبة تطبيق خطّي، نظريّة الأبعاد ونتائجها

تعريف ليكن f تطبيق خطّي بين فضاءين شعاعيّين E_1 و E_2 على نفس الحقل K.

نسمّي رتبة التّطبيق الخطّي f ونرمز بالرّمز $rang(f)$، بعد الـ ف- ش-ج $\mathrm{Im}(f)$ أي

$$rang(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

نظريّة 2 (نظريّة الأبعاد) ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K حيث $\dim(E_i) < \infty (i = 1,2)$ وليكن $f : E_1 \to E_2$ تطبيقا خطّيا. إذن:

$$\dim(E_1) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

البرهان

سنميّز حالتين

1. $\ker f = \{0_{E_1}\}$

إذن f متباين و بالتالي فإن $\dim(\ker f) = 0$ والتطبيق $f : E_1 \to \mathrm{Im}\, f$ يكون تقابلا وعليه فإنّ $\dim(E_1) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$ ومنه $\dim(E_1) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$

2. $\ker f \neq \{0_{E_1}\}$

نفرض أنّ $\{v_i\}_{1 \le i \le n}$ تشكّل أساس للفضاء الجزئي $\ker f$ و $\{u_i\}_{1 \le i \le m}$ أساس للفضاء الجزئي $\mathrm{Im}\, f$ ولتكن $\{v_{n+i}\}_{1 \le i \le m}$ أشعّة من E_1 تحقق $f(v_{n+i}) = u_i$ وذلك من أجل كلّ $1 \le i \le m$.

لنبرهن أنّ $(v_i)_{1\le i\le n+m}$ تشكّل أساس للفضاء E_1.

لنفرض أنّ

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{E_1}$$

إذن

$$f\left(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+m} v_{n+m}\right) = 0_{E_2}$$

وبالتّالي فإن

$$f\left(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n\right) + f\left(\lambda_{n+1} v_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+m} v_{n+m}\right) = f\left(\lambda_{n+1} v_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+m} v_{n+m}\right) = 0_{E_2}$$

(لأنّ f خطّي و $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ أشعّة من $\ker f$) وعليه فإنّ

$$\lambda_{n+1} f\left(v_{n+1}\right) + \ldots + \lambda_{n+m} f\left(v_{n+m}\right) = 0_{E_2}$$

(لأنّ f خطّي) ومنه

$$\lambda_{n+1} u_1 + \ldots + \lambda_{n+m} u_m = 0_{E_2} \qquad (\text{لأنّ } (1\le i\le m)\ f\left(v_{n+i}\right) = u_i)$$

لكن $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ أشعّة مستقلّة خطّيا (لأنّها أساس للفضاء الجزئي $\operatorname{Im} f$) فينتج عن ذلك أنّ

$$\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m} = 0_K$$

وبالتّالي فإنّ

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_{E_1}$$

وأيضا $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ أشعّة مستقلّة خطّيا (لأنّها أساس للفضاء الجزئي $\ker f$) فينتج عن ذلك أنّ

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

وعليه فإنّ الأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le n+m}$ مستقلّة خطّيا.

يكفي الآن أن نبرهن أنّ $\{v_i\}_{1\le i\le n+m}$ تولّد E_1.

من أجل كلّ شعاع $x\in E_1$ فإنّ $f(x)\in \operatorname{Im} f$ وبما أنّ $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$ فإنّ

$$\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in K^m : f(x) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m$$

و بما أنّ f خطّي فإنّ

$$f\left(x-\left(\lambda_1 v_{n+1}+\ldots+\lambda_m v_{n+m}\right)\right)= f\left(x\right)-\left(\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_m u_m\right)= f\left(x\right)- f\left(x\right)=0_{E_2}$$

إذن $x-\left(\lambda_1 v_{n+1}+\ldots+\lambda_m v_{n+m}\right)\in \ker f$ ومنه

$$\exists\left(\beta_1,\ldots,\beta_n\right)\in K^n : x-\left(\lambda_1 v_{n+1}+\ldots+\lambda_m v_{n+m}\right)=\beta_1 v_1+\ldots+\beta_n v_n$$

وبالتّالي فإنّ

$$x=\beta_1 v_1+\ldots+\beta_n v_n+\lambda_1 v_{n+1}+\ldots+\lambda_m v_{n+m}$$

وهذا يعني أنّ $\left\{v_i\right\}_{1\le i\le n+m}$ تولّد E_1 وبالتّالي فهي أساس.

إذن $\dim\left(E_1\right)=n+m$ وعليه فإنّ $\dim\left(E_1\right)=\dim\left(\ker f\right)+\dim\left(\operatorname{Im} f\right)$

نظريّة 3 ليكن f تطبيق خطّي بين فضاءين شعاعيّين E_1 و E_2 على نفس الحقل K.

لدينا إذن ما يلي

1. $rang\left(f\right)\le \dim\left(E_1\right)$ و $rang\left(f\right)\le \dim\left(E_2\right)$
2. $rang\left(f\right)=\dim\left(E_1\right) \Leftrightarrow f$ تطبيق متباين.
3. $rang\left(f\right)=\dim\left(E_2\right) \Leftrightarrow f$ تطبيق غامر.

البرهان

1. لدينا (حسب نظرية الأبعاد)

$$\dim\left(E_1\right)=\dim\left(\ker f\right)+rang\left(f\right)$$

وبالتالي فإن $rang\left(f\right)\le \dim\left(E_1\right)$

وبما أن $\operatorname{Im}\left(f\right)$ فـ-ش-ج من E_2 فإن $\dim\left(\operatorname{Im}\left(f\right)\right)\le \dim\left(E_2\right)$

لكن $rang\left(f\right)=\dim\left(\operatorname{Im}\left(f\right)\right)$ وبالتالي فإن $rang\left(f\right)\le \dim\left(E_2\right)$

2. حسب نظرية الأبعاد، $rang(f)=\dim(E_1)$ إذا وفقط إذا كان $\dim(\ker f)=0$ وهذا يعني أن $\ker(f)=\{0_{E_1}\}$ وهذا يكافئ أن f متباين

3. f تطبيق غامر إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Im}(f)=E_2$ وهذا يكافئ $\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(E_2)$ وهو المطلوب لأن $rang(f)=\dim(\mathrm{Im}(f))$

النتيجة التالية حالة خاصّة من النظريّة 2

نتيجة 1 ليكن E ، K ـف- ش حيث $\dim(E)=n<\infty$ و f تطبيق خطّي للفضاء E في نفسه، فالقضايا الآتية متكافئة

1. f تطبيق غامر
2. f تطبيق متباين
3. f تطبيق تقابلي
4. $rang(f)=n$
5. صورة أيّ أساس للفضاء E وفق التطبيق f هو أيضا أساس للفضاء E.

البرهان

تكافؤ القضايا 1،2، 3 و4 ينتج مباشرة عن النظريّة 3
تكافؤ القضية 5 مع القضية 3 وبالتالي بقية القضايا ينتج عن النظريّة1

نظريّة 4 ليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيّين ببعد منته يساوي n على نفس الحقل K. وليكن f تطبيق خطّي من E_1 نحو E_2. القضايا الآتية متكافئة

1. f تطبيق تقابلي
2. f تطبيق متباين
3. f تطبيق غامر
4. يوجد تطبيق خطي $g:E_2\to E_1$ بحيث $f\circ g=I_{E_2}$
5. يوجد تطبيق خطي $g:E_2\to E_1$ بحيث $g\circ f=I_{E_1}$

البرهان

تكافؤ القضايا 1، 2 و3 ينتج مباشرة عن النظريّة 3

لنفرض أن القضية 1 محققة، إذن التطبيق العكسي f^{-1} خطي (ارجع للقضية1) ويكفي إذن أخذ $g = f^{-1}$ لتتحقق القضيتين 4 و5

لنفرض أن القضية 4 محققة.

ليكن $y \in E_2$ ، لدينا :

$$y = I_{E_2}(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$$

هذا يعني أن y هو صورة الشعاع $g(y)$ (الذي ينتمي إلى E_1) بواسطة f وعليه فإن f تطبيق غامر وبهذا يتحقق تكافؤ القضية 4 مع بقية القضايا.

لنفرض الآن أن القضية 5 محققة.

ليكن $x \in \ker(f)$ ، إذن $f(x) = 0_{E_2}$.

لكن

$$x = I_{E_1}(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_{E_2}) = 0_{E_1}$$

هذا يعني أن $\ker(f) = \{0_{E_1}\}$ وبالتالي فإن f تطبيق متباين، وبهذا يتحقق تكافؤ القضية 4 مع بقية القضايا.

فضاء التطبيقات الخطيّة

ليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K . نرمز لمجموعة كلّ التطبيقات الخطّية من E_1 نحو E_2 بـ $L(E_1, E_2)$.

المجموعة $L(E_1, E_2)$ مزوّدة بالقانونين الآتيين

$$\forall f_1, f_2 \in L(E_1, E_2), \forall x \in E_1 : (f_1 + f_2)(x) = (f_1)(x) + (f_2)(x)$$

$$\forall f \in L(E_1, E_2), \forall \alpha \in K, \forall x \in E_1 : (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

هي فضاء شعاعي على الحقل K يسمى فضاء التطبيقات الخطّية.

سلسلة تمارين الفصل الثاني

التّمرين 1

بيّن أيّا من التّطبيقات التّالية عبارة عن تطبيق خطّي :

1. $f : IR^4 \to IR^2$ حيث: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2)$
2. $f : IR^2 \to IR$ حيث: $f(x_1,x_2)=x_1x_2$
3. $f : IR^3 \to IR^3$ حيث: $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,2x_1,2x_2+x_3)$
4. $f : IR^3 \to IR^2$ حيث: $f(x_1,x_2,x_3)=(|x_1|,0)$

الحلّ

1. لنثبت أن التطبيق f خطي.

لدينا:

$$\forall \alpha,\beta \in IR, \forall (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\in IR^4 :$$

$$f\left(\alpha\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta\cdot(y_1,y_2,y_3,y_4)\right)= f\left(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4\right)$$

$$=\left(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2\right)$$

$$=\alpha\cdot(x_1,x_2)+\beta\cdot(y_1,y_2)$$

$$=\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta f(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

هذا يعني أن التطبيق f خطي.

2. من أجل $(x_1,x_2)=(1,2)\in IR^2$ ومن أجل $\alpha=2\in IR$ نجد أنّ:

$$f\left(\alpha\cdot(x_1,x_2)\right)= f\left(2\cdot(1,2)\right)= f(2,4)=2.4=8$$

لكن $\alpha f(x_1,x_2)=2f(1,2)=2.(1.2)=4$

هذا يعني أن $f\left(\alpha\cdot(x_1,x_2)\right)\neq \alpha f(x_1,x_2)$ وبالتّالي فإنّ f ليس تطبيقا خطيا.

3. لدينا

$\forall \alpha, \beta \in IR, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in IR^3 :$

$$f\left(\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) + \beta \cdot (y_1, y_2, y_3)\right) = f\left(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3\right)$$

$$= \left((\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2), 2(\alpha x_1 + \beta y_1), 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + \alpha x_3 + \beta y_3\right)$$

$$= \alpha \cdot (x_1 + x_2, 2x_1, 2x_2 + x_3) + \beta \cdot (y_1 + y_2, 2y_1, 2y_2 + y_3)$$

$$= \alpha f(x_1, x_2, x_3) + \beta f(y_1, y_2, y_3)$$

هذا يعني أن التطبيق f خطي.

4. من أجل $(x_1, x_2, x_3) = (1,2,3), (y_1, y_2, y_3) = (-2,1,1) \in IR^3$ لدينا

$$f\left((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\right) = f(-1,3,4) = (|-1|,0) = (1,0)$$

لكن $f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (|1|,0) + (|-2|,0) = (1,0) + (2,0) = (3,0)$

هذا يعني أنّ $f\left((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\right) \neq f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$

وبالتّالي فإنّ f ليس تطبيقا خطيا.

التّمرين 2

ليكن $f : C \to C$ تطبيقا معرّفا كما يلي: $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.

برهن أنّ f يكون تطبيقا خطّيا عندما يكون C فضاءا شعاعيّا على IR ولا يكون كذلك عندما يكون C فضاءا شعاعيّا على نفسه .

الحلّ

إذا اعتبرنا C فضاءا شعاعيّا على IR ، فإنّ

$$\forall \alpha, \beta \in IR, \forall z_1, z_2 \in C:$$

$$f(\alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2) = \mathrm{Re}(\alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2)$$

$$= \mathrm{Re}(\alpha \cdot z_1) + \mathrm{Re}(\beta \cdot z_2) = \alpha\, \mathrm{Re}(z_1) + \beta\, \mathrm{Re}(z_2)$$

$$= \alpha \cdot f(z_1) + \beta \cdot f(z_2)$$

وعليه فإنّ f تطبيق خطي.

أمّا إذا اعتبرنا C فضاءا شعاعيّا على نفسه فإنّه مثلا من أجل $\alpha = 1+i \in C, z = 1+i \in C$ لدينا

$$f(\alpha \cdot z) = f\left((1+i)^2\right) = f(2i) = \mathrm{Re}(2i) = 0$$

لكنّ

$$\alpha f(z) = (1+i) f((1+i)) = (1+i)\mathrm{Re}(1+i) = 1+i$$

هذا يعني أنّ $f(\alpha \cdot z) \neq \alpha f(z)$ وعليه فإنّ f ليس تطبيقا خطيا.

التمرين 3

ليكن $f: E \to E$ تطبيق خطّي حيث: $\dim(E) = n < +\infty$.

برهن أنّه إذا كان $f \circ f = 0$ و $n = 2\, rang(f)$ فإنّ $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

الحلّ

لنبرهن أوّلا أنّ $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$

$$\forall y \in \mathrm{Im}(f): \exists x \in E / y = f(x)$$

$$\Rightarrow f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y \in \ker(f)$$

ومن جهة أخرى، حسب نظريّة الأبعاد فإنّ

$$n = \dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\ker f) + rang(f)$$

وبما أنّ $n = 2\, rang(f)$ فإنّ

$$\dim(\ker f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

لنبرهن الآن أنّ $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$

ليكن $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ أساس للفضاء الجزئي $\ker f$ و $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ أساس للفضاء الجزئي $\operatorname{Im} f$ $(m \le n)$

إذا فرضنا أنّه يوجد $1 \le j \le m$ بحيث يكون الشعاع v_j ليس مزجا خطّيا للأشعّة $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ فإنّ

$\{\{u_i\}_{1\le i\le m}, v_j\}$ تشكّل مجموعة مستقلّة خطّيا في $\ker f$ وهذا تناقض مع كون $\dim(\ker f) = m$.

إذن كلّ واحد من الأشعّة $\{v_i\}_{1\le i\le m}$ هو مزج خطّي للأشعّة $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ وبالتّالي فإنّ $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$

التمرين 4

ليكن E فضاء شّعاعي على حقل K ببعد منته وليكن f تطبيقا خطّيا من E في نفسه. برهن أنّ

$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ f)$

الحلّ

1.لنفرض أنّ $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

حتّى نبرهن $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ f)$، يلزم ويكفي أن نبرهن أنّ $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f \circ f)$ و

$\operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im}(f)$.

لنبدأ أوّلا بـ $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2) (= \operatorname{Im}(f \circ f))$

لدينا

$$\forall w \in \operatorname{Im}(f) : \exists v \in E / w = f(v)$$

وبما أنّ $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$ فإنّه $\exists x \in \ker(f) \wedge \exists y \in \operatorname{Im}(f) : v = x + y$

وبالتّالي

$w = f(v) = f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_E + f(y) = f(y)$ ($f(x) = 0_E$ لأنّ $x \in \ker(f)$)

لكن $y \in \operatorname{Im}(f)$ ممّا يستلزم أنّه يوجد $z \in E$ بحيث $y = f(z)$ وعليه فإنّ

$$w = f(y) = f(f(z)) = f^2(z)$$

و هذا يعني أنّ $w \in \operatorname{Im}(f^2)$ والنّتيجة أنّ $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2)$

لنبرهن الآن أنّ $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$

$$\forall w \in \operatorname{Im}(f^2) : \exists x \in E \,/\, w = f^2(x) = f(f(x))$$

$$\Rightarrow w = f(y) / y = f(x) \in E$$

$$\Rightarrow w \in \operatorname{Im}(f)$$

وبالتّالي $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$

2.لنفرض الآن أنّ $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$ ، إذن

$$\forall v \in E : f(v) \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$$

$$\Rightarrow \exists y \in E : f(v) = f^2(y) = f(f(y))$$

$$\Rightarrow f(v - f(y)) = 0_E$$

$$\Rightarrow u = v - f(y) \in \ker(f)$$

$$\Rightarrow v = u + f(y) \in \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$$

بالتّالي $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$ إذن

$$\dim(E) = \dim(\ker(f) + \operatorname{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) - \dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f))$$

لكن من جهة أخرى وحسب نظريّة الأبعاد

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

وعليه فإنّ $\dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)) = 0$ ممّا يعني أنّ $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$

إذن فالمجموع مباشر أي $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

التّمرين 5

ليكن $f : IR^3 \to IR^3$ تطبيقا خطّيا معرّفا كالتّالي: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1, 2x_2 + x_3)$

1. أوجد نواة f .
2. إذا كان $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ الأساس النّظامي للفضاء IR^3 ، استنتج أساس ثاني لهذا الفضاء.

الحلّ

1. لدينا

$$\ker(f)=\{(x,y,z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(0,0,0)\}$$

إذن

$$\forall(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\2x=0\\2y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0$$

هذا يعني أنّ $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$.

2.بما أنّ $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$ فإنّ f متباين

وبما أنّ f مؤثر خطّي على فضاء ببعد منته ($\dim(IR^3)=3<\infty$) فإنّ f متباين $\Leftrightarrow$ f غامر $\Leftrightarrow$ صورة أيّ أساس لـ IR^3 وفق التطبيق f هو أيضا أساس لــ IR^3 (ارجع للنّتيجة 1).

وبالتالي فأنّ

$\{f(\vec{e}_1)=(1,2,0), f(\vec{e}_2)=(1,0,2), f(\vec{e}_3)=(0,0,1)\}$ هو أيضا أساس لــ IR^3.

سلسلة تمارين مقترحة

التمرين 1

ليكن f الشّكل الخطّي المعرّف على الفضاء الشّعاعي IR^3 بما يلي: $f(x,y,z)=2x-3y+z$.

1. أوجد أساس لنواة f ثمّ استنتج بعد صورة f وأساسا له.
2. استنتج من خلال التّطبيق الخطّي f وأساسي نواته وصورته أساسا للفضاء IR^3 .
3. ما هي طبيعة التّطبيق الخطّي f (غامر؟ متباين؟ تقابلي؟)

التمرين 2 ليكن $f: IR^3 \to IR^3$ تطبيقا خطّيا معرّفا كالتّالي: $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2, 2x_1, 2x_2+x_3)$

1. أوجد أساس للفضاء الجزئي $\mathrm{Im}(f)$. هل التّطبيق f تقابلي؟
2. إذا كان $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ الأساس النّظامي للفضاء IR^3 ، استنتج أساس ثاني لهذا الفضاء.

التمرين 3

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل IR وليكن $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ أساسا لهذا الفضاء و f تطبيقا خطّيا من E في نفسه.

1. برهن أنّ f يكون معرّفا تماما إذا علمت قيم $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3)$.
2. نفرض أنّ $f(\vec{v}_1)=\vec{v}_2+\vec{v}_3,\ f(\vec{v}_2)=\vec{v}_1+\vec{v}_3,\ f(\vec{v}_3)=\vec{v}_1+\vec{v}_2$. أوجد $f(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3)$
3. أوجد $\ker(f)$ ثمّ استنتج أنّ f تقابلي.
4. أوجد f^{-1} واستنتج $\ker(f^{-1})$.

التمرين 4

ليكن $\{\vec{v}_1=(3,1,1), \vec{v}_2=(3,4,6), \vec{v}_3=(1,2,3)\}$ أساس للفضاء الشّعاعي IR^3 على الحقل IR وليكن f الشّكل الخطّي الذّي يحقّق: $f(\vec{v}_1)=-2,\ f(\vec{v}_2)=5,\ f(\vec{v}_3)=-3$

أوجد قيمة $f(0,1,2)$.

التمرين 5

ليكن E الفضاء الشّعاعي IR^3 على الحقل IR وليكن $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ أساس لهذا الفضاء و f تطبيقا خطّيا من E في نفسه المعرّف بما يلي:

$$f(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2+\gamma\vec{v}_3)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\vec{v}_1+\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\vec{v}_2+\gamma\vec{v}_3$$

1. أوجد $\ker(f)$ و $\mathrm{Im}(f)$.
2. برهن أنّ: $f(f(\vec{v}_i))=f(\vec{v}_i)$ من أجل $(i=1,2,3)$.
3. بيّن أنّ $E=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$ وأنّ $f(\vec{X})=\vec{Y}$ حيث $\vec{Y}\in\mathrm{Im}(f)$

التـّـمريـن 6

لـــيكن φ مـــؤثر خطّـــي فــــي الفضـــــاء الشّــــعاعي E (تطبيـــق خطّـــي مــــن E فــــي E) حـيـث: $\ker(\varphi)\cap\mathrm{Im}(\varphi)=\{\vec{0}_E\}$.

بـرهـن أنـّه إذا كـان $\vec{x}\notin\ker(\varphi)$ فـإنّ: $\forall n\in IN^*: \varphi^n(\vec{x})\neq\vec{0}_E$ ($\varphi^n=\varphi\circ\varphi^{n-1}$)

3. المصفوفات

1.3. تعريفات

إنّ مجموعة من المقادير السّلّميّة a_{ij} من حقل K حيث: $i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

مصنّفة وفق جدول ذي m سطر و n عمود وتكتب على الشّكل: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

تسمّى مصفوفة (matrice) وتدعى المقادير السّلّميّة a_{ij} عناصر المصفوفة حيث يمثّل الدّليل الأوّل i رقم السّطر و يمثّل الدّليل الثّاني j رقم العمود. ويمكن كتابة المصفوفة بشكل مختزل كما يلي:

$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

نسمّي المصفوفة الّتي عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n مصفوفة من الدّرجة $(m\times n)$ أو نقول ذات بعد. $(m\times n)$

نرمز لمجموعة المصفوفات من الدّرجة $(m\times n)$ ذات العناصر في الحقل K بالرّمز $M_{m,n}(K)$ ونرمز باختصار لـ $M_{n,n}(K)$ (في حالة $m=n$) بالرّمز $M_n(K)$ وتسمّى عناصرها بالمصفوفات المربّعة من الدّرجة n.

أنواع المصفوفات

<u>المصفوفة الصّفريّة</u> نقول عن المصفوفة $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(K)$ أنّها مصفوفة صّفريّة إذا كان:

$$a_{ij}=0\quad \forall i=1,\dots,m, \forall j=1,\dots,n$$

<u>منقول مصفوفة</u> لتكن $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(K)$ نسمّي منقول المصفوفة A ، ونرمز بالرّمز A^T المصفوفة $B=(b_{ij})\in M_{n,m}(K)$ بحيث:

$$b_{ij}=a_{ji}\qquad \forall (i,j): 1\le i\le n, 1\le j\le m$$

<u>المصفوفة المربّعة</u> نقول عن مصفوفة $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(K)$ أنّها مصفوفة مربّعة إذا كان $m=n$ ونسمّي عندئذ n درجة المصفوفة A وتسمّى العناصر $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ في هذه الحالة بالقطر الرّئيسي للمصفوفة A .

المصفوفة المثلّثيّة نسمّي المصفوفة المربّعة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ والتّي تكون عناصرها الواقعة تحت القطر الرّئيسي أصفارا بمصفوفة مثلّثيّة علويّة.

كما نسمّي المصفوفة المربّعة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ والتّي تكون عناصرها الواقعة فوق القطر الرّئيسي أصفارا بمصفوفة مثلّثيّة سفليّة.

المصفوفة القطريّة نسمّي المصفوفة المربّعة التّي تكون جميع عناصرها أصفارا ما عدا الواقعة على القطر الرّئيسي بمصفوفة قطريّة.

المصفوفة الحياديّة نسمّي مصفوفة حياديّة من الدّرجة n ونرمز لها بالرّمز I_n المصفوفة المربّعة من الدّرجة n التّالية $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

ملاحظة 1 المصفوفة I_n هي عنصر حيادي في المجموعة $M_n(K)$ بالنّسبة لعمليّة ضرب المصفوفات التّي ستعرّف لاحقا.

2.3.العمليّات على المصفوفات

1. مجموع مصفوفتين إنّ مجموع مصفوفتين من مرتبة واحدة: $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ هو مصفوفة C لها المرتبة ذاتها وعناصرها c_{ij} معرّفة كما يلي:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad \forall i \forall j$$

ونكتب: $C=A+B$

2. ضرب مصفوفة بمقدار سلّمي جداء مصفوفة $A=(a_{ij})$ بمقدار سلّمي $\alpha \in K$ هو مصفوفة عناصرها تنتج من ضرب عناصر المصفوفة A بالمقدار α أي:

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. <u>جداء مصفوفتين</u> لتكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتين من الدّرجة $(m\times n)$ و $(p\times q)$ على التّوالي؛ إذا كان $n=p$ (عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B) فإنّنا نعرّف جداء المصفوفتين A و B بأنّه المصفوفة C من الدّرجة $(m\times q)$ حيث عناصرها c_{ij} معرّفة كما يلي:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj} \qquad (i=1,\ldots,n\wedge j=1,\ldots,q)$$

ينتج من تعريف عمليّة الضّرب أنّ العنصر c_{ij} من مصفوفة الجداء يساوي إلى مجموع جداءات عناصر السّطر رقم i من المصفوفة الأولى بالعناصر المقابلة لها في العمود رقم j من المصفوفة الثّانية؛ وهذا ما يفسّر اشتراط تساوي عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد أسطر المصفوفة الثّانية في تعريف جداء مصفوفتين.

تعريف (المصفوفة العكوسة أو القابلة للقلب أو المنتظمة) لتكن $A\in M_n(K)$ ، إذا وجدت مصفوفة $B\in M_n(K)$ تحقّق

$$A.B=B.A=I_n$$

فإنّنا نقول أنّ المصفوفة A عكوسة ونسمّي المصفوفة B مقلوب A ونرمز لها بالرّمز A^{-1}

3.3. المصفوفة المرافقة لتطبيق خطّي

ليكن E_1,E_2 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K حيث $\dim(E_1)=n$ و $\dim(E_2)=m$ وليكن $B_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ أساس للفضاء E_1 و $B_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ أساس للفضاء E_2 وليكن $f:E_1\to E_2$ تطبيقا خطّيا.

إذن $f(v_1),f(v_2),\ldots,f(v_n)\in E_2$ أي أنّ

$$\begin{aligned} f(v_1)&=a_{11}u_1+a_{21}u_2+\ldots+a_{m1}u_m\\ f(v_2)&=a_{12}u_1+a_{22}u_2+\ldots+a_{m2}u_m\\ &\vdots\\ f(v_n)&=a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\ldots+a_{mn}u_m \end{aligned}$$

حيث $a_{ij}\in K$

نسمّي المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

بالمصفوفة المرافقة للتّطبيق الخطّي f بالنّسبة للأساس B_1 و B_2 على التّرتيب، ونرمز لها بالرّمز $M_{(f,B_1,B_2)}$ ؛ ونقول باختصار المصفوفة المرافقة للتّطبيق الخطّي f ، ونرمز لها بالرّمز M_f (ما لم يكن

هناك التباس بالنّسبة لأساسي فضائي البدء والوصول) ، كما نقول عن f أنّه التّطبيق الخطّي المرافق للمصفوفة A .

ملاحظة 2

أ. في حالة $E_1 = E_2 = E$ واعتبرنا نفس الأساس لـ E وليكن B فإنّنا نرمز باختصار للمصفوفة المرافقة لتطبيق خطّي $f : E \to E$ بالرّمز $M_{(f,B)}$

ب. يمكن اعتبار كلّ مصفوفة $A = (a_{ij})$ من الدّرجة $(m \times n)$ بعناصر في حقل K ، أنّها المصفوفة المرافقة لتطبيق خطّي f من K^m نحو K^n بالنّسبة للأسس النّظاميّة لهذين الأخيرين.

تفسير العمليّات على المصفوفات

إذا كانت $A \in M_{m,n}(K)$ و $B \in M_{p,q}(K)$ فإنّه يوجد تطبيقين خطّيّين f و g مرافقين للمصفوفتين A و B على التّرتيب حيث: $g : K^q \to K^p$, $f : K^n \to K^m$ ونتحقّق بسهولة من تعريف العمليّات على المصفوفات من الخواصّ التّالية:

1. إذا كان $m = p$ و $n = q$ فإنّ التّطبيق: $h : K^n \to K^m$ المعرّف كما يلي: $h(x) = f(x) + g(x)$ هو تطبيق خطّي ونتحقّق بسهولة أنّ $M_h = A + B$

2. من أجل $\lambda \in K$ ؛ التّطبيق: $h : K^n \to K^m$ المعرّف كما يلي: $h(x) = \lambda f(x)$ هو تطبيق خطّي ونتحقق بسهولة أنّ $M_h = \lambda A$

3. إذا كان $n = p$ فإنّ التّطبيق $h = f \circ g$ هو تطبيق خطّي (لاحظ أنّ $n = p$ هو الشرط الذي يجعل التّطبيق $f \circ g$ معرّفا) ونتحقّق أيضا أنّ $M_h = A \times B$
ويبرّر بالتّالي تعريف الجداء المصفوفي $A \times B$ بتساوي عدد أعمدة المصفوفة A بعدد أسطر المصفوفة B (الذي يجعل $f \circ g$ معرّفا) وقاعدة جداء أسطر المصفوفة A بأعمدة المصفوفة B باعتبارات تتعلّق بالتّطبيقات الخطّيّة المرافقة.

نظريّة 1 إذا كانت $A \in M_n(K)$ و f التّطبيق الخطّي المرافق للمصفوفة A فإنّ القضايا الآتية متكافئة:

1. المصفوفة A عكوسة
2. التّطبيق الخطّي f تقابلي
3. التّطبيق الخطّي f متباين
4. التّطبيق الخطّي f غامر
5. $rang(f) = n$
6. أشعّة أعمدة المصفوفة A مستقلّة خطّيا

البرهان

تكافؤ القضايا 2،3،4 و 5 هو نتيجة سابقة (ارجع للنتيجة 1 من الفصل الثاني)
لنبرهن تكافؤ القضيتين 1 و2.
لنفرض أن المصفوفة A عكوسة ، هذا يعني أنّه توجد مصفوفة $B \in M_n(K)$ بحيث $A.B = B.A = I_n$. فإذا كان g هو التّطبيق الخطّي المرافق للمصفوفة B فإن العلاقة المصفوفية الأخيرة تعادل

$f \circ g = g \circ f = I_{K^n}$ (ارجع إلى تفسير العمليّات على المصفوفات)

وهذا يكافئ، حسب النظريّة 4 من الفصل الثاني، أن f تقابلي.

لنبرهن الآن تكافؤ القضيتين 2 و6
أوّلا بالنظر إلى النتيجة 1 من الفصل الثاني، فإن القضية 2 تكافئ أن f متباين.
حسب النظريّة 1 من الفصل الثاني فإن f متباين تكافئ أن صورة أساس لـ K^n بواسطة f هي مجموعة مستقلّة خطيّا وهذا يكافئ أنّ أشعّة أعمدة المصفوفة A مستقلّة خطّيا (أشعّة أعمدة المصفوفة A هي بالتعريف مركبات صورة أساس لـ K^n بواسطة f)

مصفوفة العبور وعلاقتها بالمصفوفة المرافقة لتطبيق خطي عند تغيير الأساس

تعريف ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K حيث $\dim(E) = n$ وليكن $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ أساسين للفضاء E.
نسمي مصفوفة العبور من الأساس B_1 إلى الأساس B_2 ؛ المصفوفة المربعة التي تتشكل أعمدتها من مركبات أشعة الأساس B_2 بالنسبة للأساس B_1.

ملاحظة 3 إذا كان E فضاء شعاعي على الحقل K ببعد منته يساوي n و B_1 ، B_2 أساسين لـ E فإنّ

أ. مصفوفة العبور من الأساس B_1 إلى الأساس B_2 هي المصفوفة المرافقة للتّطبيق المطابق للفضاء E (وهو تطبيق خطّي) حين نزوّد فضاء البدء بالأساس B_2 وفضاء الوصول بالأساس B_1 أي أنّها المصفوفة المرافقة للتّطبيق التّالي

$$\begin{aligned} I_E : E_{B_2} &\longrightarrow E_{B_1} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

ب. إذا كانت P هي مصفوفة العبور من الأساس B_1 إلى الأساس B_2 فإنّ مصفوفة العبور من الأساس B_2 إلى الأساس B_1 هي P^{-1}

نظرية 2

ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيّين على نفس الحقل K حيث $\dim(E_1) = n$ و $\dim(E_2) = m$ وليكن $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$، $B' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ أساسين للفضاء E_1 و $R = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$، $R' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_m\}$ أساسين للفضاء E_2 وليكن $f : E_1 \to E_2$ تطبيقا خطيا حيث A هي المصفوفة المرافقة له في الأساسين B و R.

إذا كانت P هي مصفوفة العبور من الأساس B إلى الأساس B' و Q هي مصفوفة العبور من الأساس R' إلى الأساس R فإن المصفوفة المرافقة لـ f في الأساسين B' و R' هي : $Q \times A \times P$

بالنّظر للملاحظة 3 (ب) فإنّ النّتيجة التّالية هي حالة خاصّة من النّظريّة 2

نتيجة 1 ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ببعد منته يساوي n و B_1 ، B_2 أساسين لـ E و ليكن f تطبيقا خطيا على E حيث A هي المصفوفة المرافقة له في الأساس B_1.

إذا كانت P هي مصفوفة العبور من الأساس B_1 إلى الأساس B_2 فإن المصفوفة المرافقة لـ f في الأساس B_2 هي : $P^{-1} \times A \times P$

4.3. محدّد مصفوفة مربّعة

تعريف (الأشكال المتعددة الخطية المتناوبة) ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K.

نسمي شكل متعددة الخطية من الدرجة n على E، كل تطبيق $f : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \ fois} \to K$ يحقق من أجل كل $(v_1, v_2, \ldots, v_n), (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ ، $\lambda \in K$ و من أجل كل $i = 1,...,n$ ما يلي

$$1.\ f(v_1, \ldots, v_i + u_i, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_n)$$
$$2.\ f(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

ونقول أن f شكل متعددة الخطية متناوب إذا كان بالإضافة إلى ذلك $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0_K$ كلّما تساوى اثنان من الأشعة $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n$

ملاحظة ينتج عن التعريف السابق مباشرة أن كل شكل متعددة الخطية من الدرجة n على E، هو شكل خطي على E بالنسبة لكلّ مركبة.

يمكن البرهان بسهولة على الخواص التالية للأشكال متعددة الخطية المتناوبة.

خواص ليكن f شكل متعددة الخطية متناوب من الدرجة n على فضاء شعاعي E على حقل K، إذن

1. قيمة $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ تضرب بالمقدار (1-) كلما أجري تبديل بين اثنين من الأشعة $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n$
2. إذا كانت الأشعة $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n$ مرتبطة خطيا فإن $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$
3. قيمة $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ لا تتغير إذا أضفنا إلى أي شعاع v_i مزج خطي لبقية الأشعة.

تعريف ليكن K حقل تبديلي ولتكن $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ مصفوفة مربّعة من الدّرجة n و $f:K^n\to K^n$ التطبيق الخطي المرافق لها.
نسمي محدد المصفوفة A ونرمز بـ $dét(A)$، المقدار السلمي الوحيد الذي يحقق من أجل كل شكل متعدد الخطية h متناوب من الدرجة n على K^n و من أجل كلّ $v_1,\dots,v_i,\dots,v_n\in K^n$:

$$h(f(v_1),\dots,f(v_i),\dots,f(v_n))=dét(A)h(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)$$

التعريف السابق للمحدد يمكننا من استنتاج خواصه الجبرية باعتباره شكل متعدد الخطية متناوب ولكنه غير عملي لإيجاد قيمته. التعريف المكافئ الموالي يقدم طريقة عملية قيمة المحدد بطريقة تراجعية.

تعريف (مكافئ) ليكن K حقل تبديلي و $\begin{aligned} f: M_n(K)&\to K\\ A&\mapsto a\end{aligned}$ تطبيق يحقق ما يلي:

1. من أجل $n=1$ و $A=(a)$ فإنّ: $f(A)=a$

2. من أجل $n>1$ و $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ فإنّ: $f(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}f(A_{ij})$ $(1\le j\le n)$

حيث A_{ij} هي المصفوفة النّاتجة عن المصفوفة A وذلك بحذف السّطر i والعمود j (تسمّى مصفوفة مستخرجة من الدّرجة $(n-1)$).

نسمّي $f(A)$ محدّد المصفوفة A ونرمز بالرّمز: $dét(A)$ أو $|A|$.

ملاحظة 4 قيمة المحدّد من خلال التّعريف السّابق يسمّى النّشر وفق العمود j ويمكن البرهان على أنّنا نحصل على نفس النّتيجة بالنّشر وفق سطر i أي $dét(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}f(A_{ij})$ $(1\le i\le n)$

أمثلة

1. <u>محدّد من الدّرجة الثّانية:</u>

نعتبر $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. لنحسب محدّد A بالنّشر وفق العمود الثّاني:

$$dét(A)=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+2}a_{i2}dét(A_{i2})=(-1)^{1+2}a_{12}dét(A_{12})+(-1)^{2+2}a_{22}dét(A_{22})=-a_{12}a_{21}+a_{22}a_{11}$$

2. <u>محدّد من الدّرجة الثّالثة:</u>

نعتبر $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. لنحسب محدّد A بالنّشر وفق العمود الأوّل:

$$\begin{aligned}
dét(A) &= \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}dét(A_{i1}) = (-1)^{1+1}a_{11}dét(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}dét(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_{31}dét(A_{31}) \\
&= a_{11}dét\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}dét\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}dét\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})
\end{aligned}$$

نظريّة 3 إذا كانت $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ فإنّ:

$$dét(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

البرهان يكون بالتّراجع على n.

ملاحظة5 يمكن البرهان أيضا على أنّ محدّد مصفوفة مثلثيّة علويّة هو جداء عناصر القطر الرّئيسي.

نتيجة 2

1. محدّد مصفوفة قطريّة هو جداء عناصر القطر الرّئيسي.
2. إذا كانت $A = I_n$ فإنّ: $dét(A) = 1$

خواصّ المحدّدات

باستعمال تعريف المحدد وخواص العمليات في حقل تبديلي، نتحقق بسهولة من الخواص التالية

1. لا تتغيّر قيمة المحدّد إذا بادلنا بين الأسطر والأعمدة دون تغيير التّرتيب (إذا جعلنا الأسطر أعمدة والأعمدة أسطرا)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \vdots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. تضرب قيمة المحدّد بالمقدار (-1) كلما أجري تبديل بين اثنين من أعمدته أي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. إذا اتّفق أن كان بين عناصر أحد أعمدته عامل مشترك، فيمكن إخراج هذا العامل خارج المحدّد

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & ka_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & ka_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & ka_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. لا تتغيّر قيمة المحدّد إذا أضفنا إلى عمود مزج خطّي لبقيّة الأعمدة

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{1i} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{2i} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nj} + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ni} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. تنعدم قيمة المحدّد إذا تناسبت فيه عناصر عمودين، وفي حالة خاصّة ينعدم إذا تساوى فيه عمودان أي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & ka_{1i} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & ka_{2i} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & ka_{ni} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة 6

أ. كلّ الخواصّ المذكورة أعلاه تبقى صحيحة أيضا بالنّسبة لأسطر المحدّد.

ب. تستعمل الخواص السابقة لتبسيط المحدد قبل تفكيكه، ونعني به إظهار أكبر عدد ممكن من المعاملات المعدومة التي تجعل حسابه أكثر سهولة. وذلك بإجراء تحويلات على أسطر أو أعمدة المحدّد؛ وهذه بعض الرّموز المستخدمة في هذا الصّدد.

إذا أضفنا إلى سطر i سطر j فإنّنا نرمز لهذا التّحويل كما يلي: $L_i \to L_i + L_j$

وإذا أضفنا إلى عمود i عمود j فإنّنا نرمز لهذا التّحويل كما يلي: $C_i \to C_i + C_j$

أمثلة

1. لنحسب المحدّد: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$$\Delta_1 \approx \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2. لنحسب المحدّد: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. لدينا

$$\Delta_2 \approx \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

تطبيقات

إنّ لمحدّد مصفوفة تطبيقات عمليّة مفيدة كأن نختبر ما إذا كانت مجموعة أشعّة مستقلّة أو مرتبطة خطّيا وكأن نختبر أيضا ما إذا كانت مصفوفة مّا عكوسة أم غير عكوسة وكيف نحسب المقلوب في حالة الإيجاب.

تعريف لتكن $\vec{x}_1 = \left(x_1^1, x_1^2, \dots x_1^n\right), \vec{x}_2 = \left(x_2^1, x_2^2, \dots x_2^n\right), \dots, \vec{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, \dots x_n^n\right)$ مجموعة أشعّة في K^n ،

نسمّي المصفوفة

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \vdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \vdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \vdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

مصفوفة الأشعّة $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$

نظريّة 4 إذا كانت $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ مجموعة أشعّة في K^n فإنّ هذه الأشعّة مستقلّة خطيّا إذا وفقط إذا كان محدّد مصفوفة هذه الأشعّة غير معدوم.

البرهان

نفرض أن $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ليست مستقلّة خطيّا، هذا يعني أنّه توجد مقادير سلمية $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ <u>ليست كلّها معدومة</u> بحيث

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$$

نفرض أنّ $\alpha_i \neq 0_K$ ، إذن $\vec{x}_i = -\alpha_1 \alpha_i^{-1} \vec{x}_1 - \alpha_2 \alpha_i^{-1} \vec{x}_2 - \dots - \alpha_n \alpha_i^{-1} \vec{x}_n = \sum_{j \neq i} -\alpha_j \alpha_i^{-1} \vec{x}_j$

وبالتالي فإن مصفوفة الأشعّة $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ هي المصفوفة

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \dots & x_{i-1}^1 & -\sum_{j \neq i} \alpha_j \alpha_i^{-1} x_j^1 & x_{i+1}^1 \dots & x_n^1 \\ x_1^2 \dots & x_{i-1}^2 & -\sum_{j \neq i} \alpha_j \alpha_i^{-1} x_j^2 & x_{i+1}^2 \dots & x_n^2 \\ \vdots \dots & \dots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots \dots & \dots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ x_1^n \dots & x_{i-1}^n & -\sum_{j \neq i} \alpha_j \alpha_i^{-1} x_j^n & x_{i+1}^n \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

بإجراء التحويل $C_i \to C_i + \sum_{j \neq i} C_j$ (وهو لا يؤثر على قيمة المحدد، حسب الخاصية 4 أعلاه) على محدد المصفوفة السابقة نحصل على المحدد التالي

$$\begin{vmatrix} x_1^1 \dots & x_{i-1}^1 & 0 & x_{i+1}^1 \dots & x_n^1 \\ x_1^2 \dots & x_{i-1}^2 & 0 & x_{i+1}^2 \dots & x_n^2 \\ \vdots \dots & \dots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots \dots & \dots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ x_1^n \dots & x_{i-1}^n & 0 & x_{i+1}^n \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

وقيمة هذا الأخير حسب الخاصية 5 أعلاه، معدومة.

نتيجة 3 إذا كانت $A \in M_n(K)$ فإنّ A عكوسة إذا وفقط إذا كان $dét(A) \neq 0$

طريقة إيجاد مقلوب مصفوفة عكوسة

تعريف لتكن $A \in M_n(K)$. نسمّي معامل مرافق (i, j) (cofacteur) للمصفوفة A ونرمز بالرّمز $c_{ij}(A)$ المقدار التّالي: $c_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\, dét(A_{ij})$

تعريف لتكن $A \in M_n(K)$. نسمّي مرافق المصفوفة A (adjoint) ونرمز بالرّمز $Adj(A)$، منقول مصفوفة المعاملات المرافقة

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11}(A) & c_{12}(A) & \dots & c_{1n}(A) \\ c_{21}(A) & c_{22}(A) & \dots & c_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1}(A) & c_{n2}(A) & \dots & c_{nn}(A) \end{pmatrix}^T$$

نظريّة 5 إذا كانت $A \in M_n(K)$ حيث $dét(A) \neq 0$ فإنّ $A^{-1} = \dfrac{1}{dét(A)} Adj(A)$

5.3. رتبة مصفوفة، خواصها والطريقة العمليّة لحسابها

تعريف لتكن $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(IR)$، نسمّي رتبة المصفوفة A ونرمز بالرّمز $rang(A)$ رتبة التّطبيق الخطّي المرافق للمصفوفة A.

النظرية التالية تنتج مباشرة عن كون رتبة تطبيق خطّي f هو بعد الفضاء الشعاعي $\mathrm{Im}(f)$ بالإضافة إلى أن الأساس في فضاء شعاعي ببعد منته هو العدد الأعظمي للأشعة المستقلّة خطيا في هذا الفضاء.

نظريّة 6 لتكن $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(IR)$. رتبة المصفوفة A هي العدد الأعظم للأشعّة المستقلّة خطيّا المشكلة لأعمدة المصفوفة A.

تعريف لتكن $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(IR)$ وليكن $1 \leq s \leq \min(m,n)$. نسمّي محدّد مستخرج من الدّرجة s للمصفوفة A (mineur d'ordre s)، كلّ محدّد يمكن الحصول عليه بحذف بعض الأسطر و(أو) الأعمدة من المصفوفة A.

مثال لتكن $A=\begin{pmatrix}1&1&2&4\\3&1&0&2\\1&1&2&2\end{pmatrix}$. لدينا $s_1=\begin{vmatrix}1&4\\3&2\end{vmatrix}$ هو محدّد مستخرج من الدّرجة الثانية (حصلنا عليه بحذف العمودين 1,2 والسّطر 3)

$s_2=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&0&2\\1&2&2\end{vmatrix}$ هو محدّد مستخرج من الدّرجة الثالثة (حصلنا عليه بحذف العمود 2)

نظريّة 7 إذا كانت $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(IR)$ فإنّ $rang(A)=r$ إذا وفقط إذا تحقّق ما يلي:

1. يوجد على الأقلّ محدّد مستخرج من الدّرجة r للمصفوفة A غير معدوم.

2. كلّ محدّد مستخرج من درجة أكبر تماما من r للمصفوفة A فهو معدوم.

وفي حالة خاصّة، إذا كان $m=n$ فإنّ $rang(A)=n$ إذا وفقط إذا كان $dét(A)\neq 0$

ملاحظة 7 النظريّة السّابقة تقدّم طريقة عمليّة لحساب رتبة مصفوفة باستعمال المحدّدات ودون اللّجوء إلى التّعريف المباشر.

مثال لنحسب رتبة المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&3&2&3\\2&5&4&6\\1&2&2&3\end{pmatrix}$

بما أنّ $A\in M_{3,4}(IR)$ فإنّ: $rang(A)\leq \min(3,4)=3$

لدينا: $\begin{vmatrix}3&2&3\\5&4&6\\2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3\\2&5&6\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&5&4\\1&2&2\end{vmatrix}=0$

أي أن جميع المحدّدات المستخرجة من الدّرجة الثالثة معدومة.

ولدينا أيضا $\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}=-1\neq 0$ أي يوجد محدّد مستخرج من الدّرجة الثانية غير معدوم

وبالتّالي: $rang(A)=2$

من النّظريّة السّابقة ومن خواصّ المحدّدات نستنتج مباشرة الخواصّ التّالية

خواصّ رتبة مصفوفة

1. رتبة مصفوفة تساوي رتبة منقول هذه المصفوفة. $\left(rang(A)=rang\left(A^T\right)\right)$
2. رتبة مصفوفة لا تتغيّر إذا بادلنا بين سطرين (أو عمودين) أو إذا أضفنا إلى سطر (أو عمود) مزج خطّي لبقيّة الأسطر (مزج خطّي لبقيّة الأعمدة).

ملاحظة 8

إنّ تطبيق النّظريّة 7 مباشرة لحساب رتبة مصفوفة مكلف (نحتاج إلى حساب عدد كبير من المحدّدات إذا كانت درجة المصفوفة كبيرة) ولذلك فإنّ الخاصيّة 2 السّابقة تمكّننا من تسهيل حساب رتبة مصفوفة وذلك بتحويلها إلى مصفوفة متدرّجة (أي مصفوفة يكون كلّ سطر فيها يحتوي على عدد من الأصفار مرتّبة من اليسار إلى اليمين، يفوق أو يساوي السّطر الذّي يسبقه) لها نفس الرّتبة لكن لها شكل أوضح لرتبتها.

سنستعرض في المثال الموالي طريقة تحويل مصفوفة إلى مصفوفة متدرّجة باستعمال جملة من التّحويلات على أسطرها لا تغيّر رتبتها وسنحتفظ بالرّموز التّي أشرنا إليها في السّابق

مثال لنجد رتبة المصفوفة
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2\\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A\approx \begin{matrix}L_2\to L_2-L_1\\ L_3\to L_3-L_1\end{matrix} =\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2\\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\approx \begin{matrix}L_2\to L_4\\ L_4\to L_2\end{matrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{matrix}L_3\to L_3+4L_2\\ L_4\to L_4+2L_2\end{matrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

لدينا: $rang(A)=rang(B)\le \min(4,5)=4$

نلاحظ أنّ جميع المحدّدات المستخرجة من الدّرجة الثّالثة للمصفوفة B معدومة.

لدينا $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ (محدّد مستخرج من الدّرجة الثّانية للمصفوفة B) وبالتّالي $rang(B)=2$

وعليه فإنّ $rang(A)=2$

سلسلة تمارين الفصل الثالث

التّمرين 1: لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ ، $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 9\end{pmatrix}$

1. احسب $A+2B$ ، A^T+3B^T .
2. اذكر أيّا من الجداءات التّالية معرّف ثمّ احسبه: AB, BA, AC, CA, BC, CB

الحلّ

1. $A+2B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 8\\ 11 & 13 & 3\end{pmatrix}$ ، $A^T+3B^T=\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 5 & 18\\ 12 & 5\end{pmatrix}$
2. الجداءات المعرّفة هي $AC=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 15\end{pmatrix}$ ، $BC=\begin{pmatrix}-11 & 13 & 36\\ -10 & 11 & 54\end{pmatrix}$

التّمرين 2: ليكن $f: IR^2 \to IR^2$ التطبيق الخطّي المعرّف كما يلي: $f(x,y)=(x+y,x-y)$.

أوجد $M_{(f,B_1,B_2)}$ حيث $B_1=\{u_1=(1,2),u_2=(2,1)\}$ ، $B_2=\{v_1=(1,3),v_2=(3,1)\}$.

الحلّ

لدينا: $f(u_1)=(3,-1)=a_{11}v_1+a_{21}v_2$ و $f(u_2)=(3,1)=a_{12}v_1+a_{22}v_2$

لنبحث الآن عن المقادير السّلمية $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$ التي تحقق

$$\begin{cases} f(u_1)=a_{11}v_1+a_{21}v_2 ....(1)\\ \\ f(u_2)=a_{12}v_1+a_{22}v_2 ....(2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} a_{11}+3a_{21}=3\\ \\ 3a_{11}+a_{21}=-1\end{cases} \quad \text{و} \quad (2)\Leftrightarrow\begin{cases} a_{12}+3a_{22}=3\\ \\ 3a_{12}+a_{22}=1\end{cases}$$

بحلّ الجملة (1) نجد $a_{11}=-\frac{3}{4}, a_{21}=\frac{5}{4}$ و بحلّ الجملة (2) نجد $a_{22}=1, a_{12}=0$

وبالتالي فإن $M_{(f,B_1,B_2)}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{4} & 0\\ \frac{5}{4} & 1\end{pmatrix}$

التّــمريــن 3

ليكـن f الشّـكـل الخـطـّي الـمـعـرّف في الـفـضـاء الـشّـعاعي IR^3 على الحـقـل IR بما يلي:

$$f(x,y,z)=2x+y-z$$

1. أوجـد أسـاس للـفـضـاء الـجـزئـي $\ker(f)$ ثـمّ اسـتـنـتج بـعــده.
2. باسـتـعـمال نـظـريّة الأبـعـاد؛ اسـتـنـتـج رتـبـة الـتّـطبـيـق الـخـطّـي f ($rang(f)$)
3. هل الـتّـطبـيق الـخـطّـي f غـامـر؟ مـتـبـايـن؟ (علّل إجـابـتـك)
4. أوجد M_f الـمـصـفـوفة الـمـرافـقـة للـتّـطبـيق الخطّي f بالنّسبة للأساسين: $B_1=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ و $B_2=\{2\}$ للـفـضـاءيـن الشّـعـاعـيّـين IR^3 و IR على التّـرتـيب.

الحلّ

1.لدينا

$$\ker(f)=\{(x,y,z)\in IR^3 : f(x,y,z)=0\}=\{(x,y,z)\in IR^3 : 2x+y-z=0\}$$

وبالتّالي

$$\forall(x,y,z)\in\ker(f): y=-2x+z$$

$$\Rightarrow \forall(x,y,z)\in\ker(f): (x,y,z)=(x,-2x+z,z)=x(1,-2,0)+z(0,1,1)/\ x,z\in IR$$

هذا يعني أنّ $\ker(f)=[(1,-2,0),(0,1,1)]$

ونتحقق بسهولة أنّ $\{(1,-2,0),(0,1,1)\}$ مجموعة مستقلّة خطّيا وهي بالتّالي أساس لـ $\ker(f)$ وعليه فإنّ

$\dim(\ker(f))=2$.

2.حسب نـظـريّة الأبـعـاد فإنّ

$$\dim(IR^3)=\dim(\ker f)+rang(f)$$

وبالتّالي فإن $rang(f)=\dim(IR^3)-\dim(\ker f)=3-2=1$

بما أنّ $rang(f)=1=\dim(IR)$ فإنّ f غـامـر (حسب النظرية 3 من الفصل الثاني)

بما أنّ $rang(f)=1\neq 3=\dim(IR^3)$ فإنّ f ليس متباين. (حسب النظرية3 من الفصل الثاني)

3.لدينا

$$f(1,1,1)=2=2.1$$
$$f(1,1,0)=3=2.\frac{3}{2}$$
$$f(1,0,0)=2=2.1$$

وبالتّالي فإنّ M_f المصفوفة M_f المرافقة للتّطبيق الخطّي f بالنّسبة للأساسين B_1 و B_2 هي

$$M_f=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

التّمرين 4

ليكن f تطبيق خطّي حيث المصفوفة المرافقة له في الأساسين $A_1=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ ؛ $B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ للفضاءين الشّعاعيّين IR^3 و IR^2 على التّرتيب هي: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

وليكن: $\vec{v}_1'=\vec{v}_2+\vec{v}_3$, $\vec{v}_2'=\vec{v}_1+\vec{v}_3$, $\vec{v}_3'=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ ؛ $\vec{u}_1'=\frac{1}{2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2)$, $\vec{u}_2'=\frac{1}{2}(\vec{u}_1-\vec{u}_2)$

1. برهن أنّ: $A_2=\{\vec{v}_1',\vec{v}_2',\vec{v}_3'\}$ و $B_2=\{\vec{u}_1',\vec{u}_2'\}$ هما أساسان للفضاءين IR^3 و IR^2 على التّرتيب.
2. أوجد مصفوفة العبور P من الأساس A_1 إلى الأساس A_2 ومصفوفة العبور Q من الأساس B_2 إلى الأساس B_1.
3. استنتج المصفوفة المرافقة للتّطبيق الخطّي f في الأساسين الجديدين A_2 و B_2 دون إيجاد صيغة f .
4. أوجد $\dim(\ker(f))$ ثمّ استنتج طبيعة التّطبيق الخطّي f (هل هو غامر؟ هل هو متباين؟).

الحلّ

1.بما أنّ $\dim(IR^3)=3$ فحتّى تكون $A_2=\{\vec{v}_1',\vec{v}_2',\vec{v}_3'\}$ أساس لـ IR^3 يكفي أن تكون A_2 مستقلّة خطّيا و حتّى تكون A_2 مستقلّة خطّيا يكفي أن يكون محدّد أشعّة A_2 غير معدوم .

بعد الحساب نجد $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$ وعليه فإنّ A_2 أساس لـ IR^3.

وبالمثل نستطيع أن نتحقق بسهولة أنّ B_2 مستقلّة خطّيا و هي بالتّالي أساس لـ IR^2.

2.بما أنّ مصفوفة العبور P من الأساس A_1 إلى الأساس A_2 هي المصفوفة المربعة التي تتشكل أعمدتها من مركبات أشعة الأساس A_2 بالنسبة للأساس A_1 فإنّ $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

لدينا $\vec{u}_1 = \vec{u}_1' + \vec{u}_2'$ ، $\vec{u}_2 = \vec{u}_1' - \vec{u}_2'$ وبالتّالي فإنّ مصفوفة العبور Q من الأساس B_2 إلى الأساس B_1 هي $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $IR^3_{A_2} \xrightarrow{I_{IR^3}} IR^3_{A_1} \xrightarrow{f} IR^2_{B_1} \xrightarrow{I_{IR^2}} IR^2_{B_2}$

المصفوفة B المرافقة لــ f في الأساسين الجديدين A_2 و B_2 هي المصفوفة المرافقة للتّطبيق المركّب $I_{IR^2} \circ f \circ I_{IR^3}$ وبالتّالي فإنّ

$$B = Q.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4.لدينا $rang(A) \le \min(2,3) = 2$

وأيضا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ هو محدّد مستخرج من المصفوفة A من الدّرجة الثانية (حصلنا عليه بحذف العمود رقم 3) وبالتّالي فإنّ $rang(A) = 2$

وبما أنّه بالتّعريف $rang(A) = rang(f)$ فإنّ $rang(f) = 2$.

الآن بتطبيق نظريّة الأبعاد نجد

$$3 = \dim(IR^3) = \dim(\ker f) + rang(f)$$

$$\Rightarrow \dim(\ker f) = 3 - 2 = 1$$

بما أنّ $\dim(\ker f) = 1 \neq 0$ فإنّ f ليس متباين.

بما أنّ $rang(f) = 2 = \dim(IR^2)$ فإنّ f غامر.

التّمرين 5: ليكن E فضاءا شعاعيّا على الحقل IR ببعد منته يساوي 2 وليكن $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ أساسا في E و: $g, f : E \to E$ تطبيقين خطّيين معرّفين كالتّالي:

$f(\vec{v}_1) = 5\vec{v}_1 + \vec{v}_2, f(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, g(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2, g(\vec{v}_2) = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

أوجد المصفوفة المرافقة لكلّ من $f, g, f \circ g, g \circ f, f + g$ في الأساس $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

الحلّ

لتكن A المصفوفة المرافقة لـ f و B المصفوفة المرافقة لـ g. لدينا إذن $A=\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}$

المصفوفة المرافقة لـ $f+g$ هي $A+B=\begin{pmatrix}7&4\\0&3\end{pmatrix}$

المصفوفة المرافقة لـ $f\circ g$ هي $AB=\begin{pmatrix}9&17\\1&5\end{pmatrix}$ ، المصفوفة المرافقة لـ $g\circ f$ هي $BA=\begin{pmatrix}13&5\\-3&1\end{pmatrix}$

التمرين 6

ليكن $\alpha\in IR^*$ و $X=(x_1x_2...x_n)^T\in M_{n,1}(IR)$ حيث $X^TX=1$ ($2\le n$) ولتكن A المصفوفة المربعة من الدرجة n المعرفة كما يلي: $A=\alpha XX^T$

1.برهن أن $A\neq 0$ ثم أوجد $rang(A)$ (رتبة المصفوفة A) .

2.استنتج $dét(A)$ و طبيعة التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A (غامر؟ متباين ؟ مع التّعليل)

الحلّ

1.لدينا

$$A=\alpha\begin{pmatrix}x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\x_2x_1&x_2^2&\dots&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_nx_1&x_nx_2&\dots&x_n^2\end{pmatrix}$$

وبالتّالي فإنّ عناصر القطر الرّئيسي في المصفوفة A هي x_i^2 **(**$1\le i\le n$**).**

لدينا $X^TX=1\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$ هذا يعني أنّه يوجد $1\le i\le n$ بحيث $x_i^2\neq 0$ وبما أنّ $\alpha\neq 0$ فإنّ $A\neq 0$.

نلاحظ أنّ كلّ سطر من المصفوفة A هو مضاعف لـلسطر $(x_1\quad x_2\quad ...\quad x_n)$ وبما أنّه يوجد $1\le i\le n$

بحيث $x_i\neq 0$ ، فإنّه بضرب السّطر رقم i في المقدار $\frac{x_j}{x_i}$ ثمّ إضافته للسّطر رقم j وذلك من أجل كلّ $i\neq j$

فإنّنا نحصل على

$$A \approx L_j \to L_j + \frac{x_j}{x_i} L_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ..... & ...... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i x_1 & x_i x_2 & ....x_i^2... & ...... & x_i x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ...... & ...... & 0 \end{pmatrix}$$

أي نحصل على مصفوفة فيها سطر وحيد غير معدوم تماما (لأنّه يحتوي على المقدار x_i^2) وبالتّالي فإنّ $rang(A) = 1$.

2.بما أنّ $A \in M_n(IR)$ و $rang(A) \neq n$ فإنّ $dét(A) = 0$ (حسب النّظريّة 7)

وبالتّالي حسب النّظريّة 1 فإنّ $dét(A) = 0 \Leftrightarrow \ker(f) \neq \{0_{IR^n}\}$ وعليه فإنّ f ليس متباين.

وبما أنّ $rang(A) = rang(f)$ (بالتّعريف) فإنّ $rang(f) \neq n$ وهذا يكافئ أنّ f ليس غامر

سلسلة تمارين مقترحة

التّمرين 1: لتكن $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{pmatrix}$. تحقق أنّ: $A^3=5I_3$ ثمّ استنتج أنّ A عكوسة وأوجد A^{-1} .

التّمرين 2: لتكن $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}$.

1. تحقق أنّ: $A^3=3A^2-3A+I_3$
2. عبّر عن A^4 بدلالة A^2,A,I_3 ثمّ احسبها
3. استعمل 1 لتثبت أنّ A عكوسة ثمّ استنتج A^{-1} .

التمرين 3

ليكن f تطبيق خطي للفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR حيث المصفوفة المرافقة له بالنسبة للأساس $B=\{(1,0),(0,1)\}$ هي $M_f=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$

وليكن $E_1=\{\vec{X}\in IR^2 : f(\vec{X})=-\vec{X}\}$ ، $E_2=\{\vec{X}\in IR^2 : f(\vec{X})=5\vec{X}\}$

1. أوجد أساس $\{\vec{u}_1\}$ وأساس $\{\vec{u}_2\}$ للفضائين الشعاعيين الجزئين E_1 و E_2 على التوالي
2. تحقق أن $B'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ هو أساس للفضاء الشعاعي IR^2
3. أوجد مصفوفة العبور P من الأساس B إلى الأساس B'
4. أوجد M'_f المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للأساس B' ثم تحقق أن $M'_f=P^{-1}M_fP$

التّمرين 4: إذا كانت $A\in M_n(K)$ ، نعرّف A^m بالتّراجع كما يلي: $A^0=I_n$ ، $A^m=A^{m-1}A$ $(m\geq 1)$

لنعتبر الجملة التّالية: $(S)\begin{cases}x_{n+1}=7x_n+4y_n\\y_{n+1}=-9x_n-5y_n\end{cases}$

1. أكتب الجملة(S) على الشّكل $X_{n+1}=AX_n$
2. برهن بالتّراجع على n أنّ: $A^n=\begin{pmatrix}1+6n&4n\\-9n&1-6n\end{pmatrix}$
3. استنتج قيم x_n,y_n بدلالة x_0,y_0 .

التّمرين 5: لتكن: $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&5\\2&4&6&9\\3&6&9&14\end{pmatrix}$.

1. أوجد $rang(A)$ ثمّ استنتج $\det(A)$.
2. هل التّطبيق الخطّي المرافق للمصفوفة غامر؟ متباين؟ ثمّ استنتج بعد نواته

4. جمل المعادلات الخطيّة

1.4. تعريفات وصياغات مختلفة

ليكن K حقل تبديلي (Q أو IR أو C) ولتكن جملة المعادلات الخطيّة التّي عددها m والحاوية على n مجهول التّالية

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

حيث $(a_{ij})_{\substack{1\le i<m \\ 1\le j\le n}} \in K$ و $(b_i)_{1\le i<m} \in K$.

نسمّي حلاّ للجملة (S) كلّ مرتّب $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in K^n$ يحقّق الجملة (S).

نسمّي الجملة

$$(S')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

بالجملة المتجانسة المرافقة للجملة (S).

نقول عن جملتين (S_1) و (S_2) أنّهما متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.

صياغات مختلفة للجملة (S)

نعتبر $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_m\}$ الأساس النّظامي لـ K^m و $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ الأساس النّظامي لـ K^n.

أ. **الشّكل الشّعاعي للجملة (S)**

نعتبر في K^m مجموعة الأشعّة: $1\le j\le n \quad / \quad \vec{v}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \ldots + a_{mj}\vec{e}_m$ و

$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_m\vec{e}_m$

فالجملة (S) تكافئ

$$(V) \qquad x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{b}$$

ب. **الشّكل التّابعي للجملة** (S)

إذا اعتبرنا التّطبيق الخطّي $f : K^n \to K^m$ الذّي يحقق $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j (1 \le j \le n)$

فإنّ الجملة (S) تكتب بالشّكل

$$(F) \qquad f(\vec{x}) = \vec{b}$$

حيث: $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n$

ت. **الشّكل المصفوفي للجملة** (S)

إذا اعتبرنا $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

فإنّ الجملة (S) تكتب بالشّكل

$$(M) \qquad AX = B$$

حيث $X = (x_1, \ldots x_n)^T$ و $B = (b_1, \ldots b_m)^T$

نسمّي (M) الشّكل المصفوفي للجملة (S) ونسمّي A المصفوفة المرافقة للجملة (S).

2.4. جمل كرامر (Systèmes de Cramer)

تعريف نقول عن جملة معادلات خطيّة أنّها جملة كرامر إذا تحقق مايلي

1. عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل $(n = m)$
2. إذا كان محدّد المصفوفة المرافقة للجملة غير معدوم $dét(A) \neq 0$.

نظريّة 1 إذا كانت (S) جملة معادلات خطيّة من نوع كرامر حيث A هي المصفوفة المرافقة للجملة (S) فإنّ (S) تقبل حلّ وحيد يعطى بالقوانين التّالية والتّي تسمّى بدساتير كرامر:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{dét(A)} \qquad (1 \le j \le n)$$

حيث:
$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ j-1} & b_1 & a_{1\ j+1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\ j-1} & b_2 & a_{2\ j+1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ j-1} & b_n & a_{n\ j+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

البرهان

لنأخذ الشكل المصفوفي للجملة (S): $AX = B$

بما أن $dét(A) \neq 0$ فإن A عكوسة وبالتالي فإن $X = A^{-1}B$ وهذا يعني أنّ للجملة (S) حلّ.

نفرض أنّ X_1, X_2 حلّين للجملة (S)، هذا يعني أنّ $AX_1 = B$ و $AX_2 = B$

أي

$$\begin{gathered} AX_1 - AX_2 = 0 \\ \Leftrightarrow A(X_1 - X_2) = 0 \\ \Leftrightarrow A^{-1}A(X_1 - X_2) = 0 \\ \Leftrightarrow I_n(X_1 - X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 - X_2 = 0 \\ \Leftrightarrow X_1 = X_2 \end{gathered}$$

وهذا يعني أنّ الحلّ وحيد.

لنأخذ الآن الشكل الشعاعي للجملة (S) : $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{b}$

إذا كان $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ حلّ للجملة (S) فإن $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{b}$

وبالتالي فإن محدد مصفوفة الأشعّة $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{b}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n$ هو Δ_j

باستعمال خواص المحددات نجد أن: $\Delta_j = \alpha_j dét(A)$

ملاحظة 1 المحدّد Δ_j هو محدّد المصفوفة النّاتجة عن تعويض العمود رقم j في المصفوفة A (عمود المعاملات المرافقة للمجهول x_j) بعمود ثوابت الجملة.

تعتبر طريقة كرامر من الطرق الشائعة في حساب حلول الجمل الخطية ذات المصفوفات المربعة والعكوسة من الدرجة n فهي تعطي مباشرة قيمة كل مجهول، ولكنها تستوجب وقتا طويلا من أجل إعطاء القيم النهائية للمجاهيل، فمن أجل n كبير، نحتاج إلى إجراء عدد كبير جدا من العمليات (الجمع، الطرح، الضرب والقسمة)، لذلك فإننا عادةً لا نلجأ إلى استعمال هذه الطريقة إلا من أجل قيم صغيرة لـ n.

مثال حلّ في IR الجملة التّالية

$$(S)\qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$$

المصفوفة المرافقة للجملة هي: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ وبالحساب نجد: $dét(A)=-2\neq 0$

إذن (S) هي جملة كرامر فهي تقبل بالتّالي حلّ وحيد هو

$$x=\frac{1}{dét(A)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\frac{-1}{2}\quad ,y=\frac{1}{dét(A)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=1\quad ,z=\frac{1}{dét(A)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

جمل المعادلات الخطيّة المتجانسة

إذا كانت (S) جملة معادلات خطيّة متجانسة فلها حلّ واضح هو الشّعاع الصّفري ويسمّى هذا الحلّ بالحلّ التّافه.

نظريّة 2 إذا كانت (S) جملة معادلات خطيّة متجانسة ذات n مجهول و n معادلة، فإنّه يكون لهذه الجملة حلّ غير الحلّ التّافه إذا وفقط إذا انعدم محدّد المصفوفة المرافقة للجملة.

البرهان

إذا كان $dét(A)\neq 0$، حيث A هي المصفوفة المرافقة للجملة (S)، فإن (S) جملة كرامر وهي بالتالي تقبل حلّ وحيد حسب النظرية 1 هو حتما الحلّ التافه.

أمّا إذا كان $dét(A)=0$، ممّا يعني أن A ليست عكوسة (ارجع إلى النتيجة 3 من الفصل الثالث) وهذا يكافئ أن التطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A ليس متباين، وذلك حسب النظريّة 1 من الفصل الثالث؛ إذن $\ker(f)\neq\{0_{K^n}\}$ وهذا يعني أنّ للجملة (S) حلّ غير الحلّ التّافه.

مثال الجملة المتجانسة التّالية:

$$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 4x-y+3z=0 \end{cases}$$ تقبل حلّ غير الحلّ التّافه لأن

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3.4.الدّراسة العامّة لجملة معادلات خطيّة

نعتبر جملة معادلات خطيّة (S) ممثلة بالمعادلة المصفوفيّة $AX = B$

حيث $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ، $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ و $B = (b_1, \dots, b_m)^T$.

نفرض أنّ رتبة المصفوفة A المرافقة للجملة (S) هي k $(rang(A) = k)$؛ هذا يعني أنّه يوجد محدّد من الدّرجة k (مستخرج من المصفوفة A) غير معدوم.

نسمّي المعادلات الموافقة لأسطر هذا المحدّد بالمعادلات الرّئيسيّة كما نسمّي المجاهيل الموافقة لأعمدة هذا المحدّد بالمجاهيل الرّئيسيّة.

نفرض أنّ $x_1, \dots, x_k$ هي المجاهيل الرّئيسيّة والمعادلات الأولى التّي عددها k هي المعادلات الرّئيسيّة (يمكن الحصول على ذلك بإعادة ترقيم المعادلات و (أو) المجاهيل إذا لزم الأمر).

ملاحظة 2 اختيار المعادلات الرّئيسيّة و المجاهيل الرّئيسيّة ليس وحيدا.

إذا أخذنا الشّكل الشّعاعي للجملة (S) فإنّ الأشعّة $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ (الموافقة لأعمدة المحدّد المستخرج) تكون مستقلة خطيّا و تنتمي الأشعّة $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (المشكّلة لأساس K^n) إلى الفضاء الشّعاعي الجزئي الذّي أساسه $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ويكون للجملة (S) حلّ إذا وفقط إذا كان الشّعاع $\vec{b}$ ينتمي إلى هذا الفضاء الشّعاعي الجزئي، أي إذا انعدمت جميع المحدّدات من الدّرجة $k+1$ من الشّكل

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} & b_r \end{vmatrix} \qquad k+1 \le r \le m$$

وفي هذه الحالة يمكن كتابة الجملة (S) بالشّكل

$$(S)\begin{cases}(S_1)\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1k}x_k=b_1-a_{1k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kk}x_k=b_k-a_{kk+1}x_{k+1}-\ldots-a_{kn}x_n\end{cases}\\ a_{k+11}x_1+\ldots+a_{k+1k}x_k=b_{k+1}-a_{k+1k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{k+1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mk}x_k=b_m-a_{mk+1}x_{k+1}-\ldots-a_{mn}x_n\end{cases}$$

ويكون الحلّ بإعطاء المجاهيل غير الرّئيسيّة $x_{k+1},\ldots,x_n$ قيم إختياريّة ولتكن $\beta_{k+1},\ldots,\beta_n$ من الحقل K فتكون الجملة (S_1) عندئذ جملة كرامر التّي يمكن إيجاد حلّها $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.

بما أنّ الشّعاع $\vec{b}-\beta_{k+1}\vec{v}_{k+1}-\ldots-\beta_n\vec{v}_n$ يُكتب بشكل وحيد في الأساس $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ فإنّ $\vec{b}-\beta_{k+1}\vec{v}_{k+1}-\ldots-\beta_n\vec{v}_n=\alpha_1\vec{v}_1+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k$ وهذا يعني أنّ جميع معادلات (S) غير معادلات (S_1) تتحقق أيضا بالحلّ $(\alpha_1\ldots,\alpha_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_n)$.

تعريف نسمّي المصفوفة الموسّعة المرافقة للجملة (S)، المصفوفة النّاتجة عن A بإضافة العمود المشكّل من ثوابت الجملة ونرمز لها بالرّمز $(A|B)$ أي: $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11}&\ldots&a_{1n}&b_1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{m1}&\ldots&a_{mm}&b_m\end{array}\right)$

نستنتج إذن ممّا سبق النّظريّة التّالية

نظريّة 3 لتكن (S) جملة معادلات خطّيّة (تحتوي على m معادلة و n مجهول) صيغتها المصفوفيّة $AX=B$

1. إذا كان $rang(A)=rang(A|B)=k$ فإنّ للجملة (S) حلاّ ولدينا:

أ. في حالة $k=n$ فإنّ الجملة (S) جملة كرامر وهي بالتّالي تقبل حلاّ وحيدا.

ب. في حالة $k<n$ $(k\neq n)$ فإنّ الجملة (S) تقبل عددا غير منته من الحلول حيث يكون عدد المجاهيل الرّئيسيّة مساويا لـ k وعدد المجاهيل الإختياريّة مساويا لـ $n-k$.

2. إذا كان $rang(A)<rang(A|B)$ فإنّ الجملة (S) لا تقبل حلاّ.

ملاحظة 3 إنّ اتّباع الدّراسة السّابقة مباشرة لحلّ جملة معادلات خطّيّة مكلّف (نحتاج فيه إلى حساب عدد كبير من المحدّدات المستخرجة) لذلك غالبا ما نستعيض عن الجملة المفروضة بجملة مكافئة لها وذات شكل

متدرّج حيث تحتوي المعادلة الأخيرة منها على مجهول رئيسي واحد وتحتوي المعادلة السّابقة لها على مجهولين رئيسيّين أحد هما المجهول المذكور وهكذا حتّى نحصل على شكل جديد للجملة وذلك بتطبيق متتالية من التّحويلات على أسطر المصفوفة الموسّعة المرافقة لها والتّي تجعلنا ننتقل بها إلى مصفوفة تمثّل جملة مكافئة للجملة الأولى وذات شكل متدرّج يجعل حساب الحلّ أكثر سهولة . تسمّى هذه الطّريقة بطريقة Gauss للحلّ.

مثال

لندرس في IR الجملة التّالية

$$(S) \qquad \begin{cases} x+4y+z=2 \\ x-y-2z=1 \\ x+9y+4z=2 \end{cases}$$

حيث $(S) \Leftrightarrow AX=B$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

لدينا $dét(A)=0$ إذن (S) ليست جملة كرامر فهي بالتّالي لا تقبل حلاّ وحيدا ((S) لا تقبل حلاّ أو تقبل عددا غير منته من الحلول).

لتحديد ذلك علينا مقارنة رتبة المصفوفة A والمصفوفة الموسّعة $(A|B)$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} L_2 \to L_2-L_1 \\ L_3 \to L_3-L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx L_3 \to L_3+L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

واضح أنّ $rang(A)<3$ ولدينا: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=-5\neq 0$ (محدّد مستخرج من الدّرجة الثّانية) وبالتّالي فإنّ $rang(A)=2$

لكن $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=5\neq 0$ (محدّد مستخرج من الدّرجة الثّالثة للمصفوفة الموسّعة) وبالتّالي $rang(A|B)=3$.

بما أنّ $rang(A)\neq rang(A|B)$ فإنّ الجملة (S) لا تقبل حلاّ.

سلسة تمارين الفصل الرّابع

التّمرين 1

نعتبر في IR جملة المعادلات الخطيّة التّالية

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ x-2y-2z=1 \\ 5x-2y-8z=1 \end{cases}$$

أثبت أن الجملة (S) لا تقبل حلاّ وحيدا، ثم أوجد الصيغة العامة للحلول

الحلّ

$(S) \Leftrightarrow AX = B$ حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & -8 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

لدينا $dét(A)=0$ إذن (S) ليست جملة كرامر فهي إذن لا تقبل حلاّ وحيدا ((S) لا تقبل حلاّ أو تقبل عددا غير منته من الحلول).

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\approx L_3 \to L_3 - 3L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

من المصفوفة الأخيرة واضح أنّ $rang(A)<3$ و $rang(B)<3$

ولـدينا: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ (محـدّد مسـتخرج مـن الدّرجـة الثّانيـة مـن المصـفوفة A) وبالتّـالي فـإنّ $rang(A) = rang(A|B) = k = 2$.

إذن (S) تقبل عددا غير منته من الحلول ولدينا $k=2$ مجهول رئيسي و $3-2=1$ مجهول إختياري.
لدينا إذن مجهولين رئيسيّين وليكونا x, y ومجهول إختياري واحد وليكن z.

بهذا الاختيار وحسب جملة التّحويلات السّابقة فإنّ الجملة (S) تكافئ

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}(S_1)\begin{cases}x+2y=-1+z\\-4y=2+z\end{cases}\\ \\0x+0y+0z=0\end{cases}$$

وحلّ الجملة (S) يرجع إذن إلى حلّ الجملة (S_1).

من المعادلة الثانية للجملة (S_1) نجد $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z$ وبتعويض هذه القيمة في المعادلة الأولى نجد $x=\frac{3}{2}z$.

إذن (S) تقبل عددا غير منته من الحلول والصّيغة العامّة للحلول هي

$$(\alpha\in IR)\quad (x,y,z)=\left(\frac{3}{2}\alpha,-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha,\alpha\right)$$

التّمرين 2

نعتبر في IR جملة المعادلات الخطيّة التّالية

$$(S)\quad\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5+2x_6=1\\x_2+x_4+x_6=1\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6=7\\4x_6=5\end{cases}$$

برهن أنّ الجملة (S) تقبل عددا غير منته من الحلول يطلب إيجاد صيغتها.

الحلّ

المعادلة المصفوفيّة المكافئة للجملة (S) هي $AX=B$

حيث
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2&1&2\\0&1&0&1&0&1\\1&2&3&4&5&6\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix},\quad X=(x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4\quad x_5\quad x_6)^T,\quad B=(1\ \ 1\ \ 7\ \ 5)^T$$

بإجراء التّحويل الموضّح أدناه على السّطر الثّالث في المصفوفة الموسّعة نجد

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&1&2&1&2&1\\0&1&0&1&0&1&1\\1&2&3&4&5&6&7\\0&0&0&0&0&4&5\end{array}\right)\approx L_3\to L_3-L_1=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&1&2&1&2&1\\0&1&0&1&0&1&1\\0&0&2&2&4&4&6\\0&0&0&0&0&4&5\end{array}\right)$$

واضح أنّ $rang(A)\le 4=\min(4,6)$ وكذلك $rang(A|B)\le 4=\min(4,7)$

ولدينا $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\0&1&1&1\\0&0&2&4\\0&0&0&4\end{vmatrix}=8\neq 0$ (محدّد مستخرج من الدّرجة الرّابعة من المصفوفة A) وهذا يعني أنّ

$rang(A|B)=rang(A)=4$ وبالتّالي فإنّ الجملة (S) تقبل عددا غير منته من الحلول لأنّ $k=4<6=n$ ولدينا إذن 4 مجاهيل رئيسيّة و $n-k=2$ مجاهيل إختياريّة (ارجع للنّظريّة 3).

وحسب المحدّد Δ المختار فإن المجاهيل الرّئيسيّة هي x_1, x_2, x_4, x_6 (الموافقة لأعمدة هذا المحدّد) و المجاهيل الإختياريّة هي بالتّالي x_3, x_5 وحلّ الجملة (S) يرجع إذن إلى حلّ الجملة (S') التّالية (الموافقة للمحدّد Δ)

$$(S')\quad\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4+2x_6=1-x_3-x_5\\x_2+x_4+x_6=1\\2x_4+4x_6=6-2x_3-4x_5\\4x_6=5\end{cases}$$

نحلّ الجملة (S') بالتّدرجّ من الأسفل إلى الأعلى حيث نجد قيمة x_6 من المعادلة الأخيرة ثمّ نعوّضها في المعادلة الثّالثة لنجد قيمة x_4 ثمّ نعوّض هاتين القيمتين في المعادلة الثّانية فنجد قيمة x_2 وأخيرا نعوّض جميع القيم المحصّل عليها في المعادلة الأولى لنجد x_1 فنحصل على النّتائج التّالية

$$x_6=\frac{5}{4},\quad x_4=\frac{1}{2}-x_3-2x_5,\quad x_2=\frac{-3}{4}+x_3+2x_5,\quad x_1=1-x_3-x_5$$

التّمرين 3

نعتبر جملة المعادلات الخطّية التّالية في IR

$$(S)\quad\begin{cases} x-3y=b_1 \\ 3x+y=b_2 \\ x+7y=b_3 \\ 2x+4y=b_4 \end{cases}$$

1. أكتب الجملة (S) على شكل معادلة مصفوفيّة: $AX=B$.
2. أوجد $rang(A)$ وناقش حسب قيم $(b_i)_{1\le i\le 4}$ رتبة المصفوفة الموسعة $A|B$.
3. استنتج قيم $(b_i)_{1\le i\le 4}$ التّي تجعل (S) تقبل حلاّ، ثمّ حلّ الجملة في هذه الحالة.

الحلّ

1. لدينا $(S)\Leftrightarrow AX=B$ حيث: $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, X=(x \quad y)^T, B=(b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4)^T$

2. بإجراء تحويلات على أسطر المصفوفة الموسّعة (لا تغيّر رتبتها وتحوّل الجملة المرافقة لها إلى جملة مكافئة) نحصل على

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & b_1 \\ 3 & 1 & b_2 \\ 1 & 7 & b_3 \\ 2 & 4 & b_4 \end{array}\right)\underset{\substack{L_2\to L_2-3L_1\\ L_3\to L_3-L_1 \\ L_4\to L_4-2L_1}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 10 & b_2-3b_1 \\ 0 & 10 & b_3-b_1 \\ 0 & 10 & b_4-2b_1 \end{array}\right)\underset{\substack{L_3\to L_3-L_2 \\ L_4\to L_4-L_2}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 10 & b_2-3b_1 \\ 0 & 0 & 2b_1-b_2+b_3 \\ 0 & 0 & b_1-b_2+b_4 \end{array}\right)$$

واضح أنّ $rang(A)\le 2$ ولدينا $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}=10\neq 0$ (محدّد مستخرج من الدّرجة الثّانية من المصفوفة A) وبالتّالي فإنّ $rang(A)=2$.

من أجل $2b_1-b_2+b_3\neq 0$ أو $b_1-b_2+b_4\neq 0$ فإنّ

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 10 & -3b_1+b_2 \\ 0 & 0 & b_1-b_2+b_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ أو } \begin{vmatrix} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 10 & -3b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 2b_1-b_2+b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(محدّدان مستخرجان من الدّرجة الثّالثة من المصفوفة الموسّعة) وبالتّالي $rang(A|B)=3$.

أمّا من أجل $2b_1-b_2+b_3=0$ و $b_1-b_2+b_4=0$ فواضح أنّ $rang(A|B)=2$

3.حسب النّظريّة 3 فإنّ الجملة (S) تقبل حلاّ إذا وفقط إذا كان $rang(A)=rang(A|B)$ إذن حسب السّؤال 2 فإن (S) تقبل حلاّ إذا وفقط إذا كان $2b_1-b_2+b_3=0$ و $b_1-b_2+b_4=0$ وفي هذه الحالة، حسب التّحويلات المجرات في السّؤال 2، فإنّ الجملة (S) تكافئ الجملة

$$\begin{cases} x-3y=b_1 \\ 10y=b_2-3b_3 \end{cases}$$

وبالتّالي فإنّ حلّ الجملة (S) هو $x=\frac{1}{10}(b_1+3b_2)$ ، $y=\frac{1}{10}(b_2-3b_1)$

التّمرين 4

نعتبر في IR^3 جملة المعادلات الخطّيّة التّالية $(S)\begin{cases} x-2y+bz=3 \\ ax+2z=2 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$ حيث $(a,b)\in IR^2$

ناقش حسب قيم الوسيطين الحقيقيّين(a,b) حلّ الجملة (S).

الحلّ

$(S)\Leftrightarrow AX=B$ حيث: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, X=(x \quad y \quad z)^T, B=(3 \quad 2 \quad 1)^T$

لدينا: $dét(A)=2(ab-12)$ إذن $dét(A)\neq 0 \Leftrightarrow ab\neq 12$ ومن أجل هذه القيم (S) هي جملة كرامر وتقبل حلّ وحيد يمكن إعطاؤه بدساتير كرامر.

لندرس الآن الحالة الّتي يكون فيها $ab=12$ (ليس للجملة حلّ أو عدد غير منته من الحلول)

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & b & 3\\ a & 0 & 2 & 2\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\to L_2-aL_1\\ L_3\to L_3-5L_1}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & b & 3\\ 0 & 2a & 2-ab & 2-3a\\ 0 & 12 & -5b & -14\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_3\\ L_2\to \frac{1}{12}L_2}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & b & 3\\ 0 & 1 & -\frac{5}{12}b & -\frac{7}{6}\\ 0 & 2a & 2-ab & 2-3a\end{array}\right)$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & b & 3\\ 0 & 1 & -\frac{5}{12}b & -\frac{7}{6}\\ 0 & 2a & 2-ab & 2-3a\end{array}\right)\approx_{L_3\to L_3-2aL_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & b & 3\\ 0 & 1 & -\frac{5}{12}b & -\frac{7}{6}\\ 0 & 0 & \frac{12-ab}{6} & \frac{6-2a}{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & b & 3\\ 0 & 1 & -\frac{5}{12}b & -\frac{7}{6}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{6-2a}{3}\end{array}\right)$$

من أجل: $a\neq 3 \Leftrightarrow 6-2a\neq 0$ فإنّ $3=rang(A|B)\wedge rang(A)=2$ وبالتّالي (S) لا تقبل حلا.

من أجل: $a=3 \Leftrightarrow 6-2a=0$ (بالتّالي $b=4$) فإنّ $2=rang(A)=rang(A|B)$ بالتّالي (S) تقبل عددا غير منته من الحلول (لدينا مجهولين رئيسيّين وليكونا x,y ومجهول إختياري واحد وليكن z).

بهذا الاختيار وحسب جملة التّحويلات السّابقة، الجملة (S) تكافئ

$$\begin{cases}x-2y=3-4z\\ y=-\frac{7}{6}+\frac{5}{3}z\end{cases}$$

والصّيغة العامّة للحلول هي إذن

$$(x,y,z)=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\frac{-7}{6}+\frac{5}{3}\alpha,\alpha\right)\qquad(\alpha\in IR)$$

التّـمريـن 5

نعتبـر في IR جـمـلـة الـمعادلات الخـطّيّة التّـاليـة: $(\lambda, a, b, c \in IR)$
$$(S)\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=a\\ x+(\lambda+1)y+z=b\\ x+y+(\lambda+1)z=c\end{cases}$$

1. أكـتـب (S) على شـكـل مـعـادلـة مـصـفـوفـيّة: $AX = B$.
2. بعد إجراء تحويلات مناسبة على أسطر المصفـوفة الـموسّعة $(A|B)$ ؛ ناقـش حسب قـيم الوسـائـط (λ, a, b, c) : $rang(A)$ و $rang(A|B)$.
3. استـنـتج قيم (λ, a, b, c) الـتّي تجعـل الجمـلـة (S) :

أ. جمـلـة كـرامـر ، ب. تـقبـل عـددا غير منـتـه من الحـلـول ، ج. لا تـقبـل حـلا

4. أعـط الـصـيّغـة الـعـامّة للـحـلـول في الـحـالـة ب.

الحلّ

1. $(S) \Leftrightarrow AX = B$ حيث:
$$A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{pmatrix}, X=(x \quad y \quad z)^T, B=(a \quad b \quad c)^T$$

2.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & 1 & 1 & a\\ 1 & \lambda+1 & 1 & b\\ 1 & 1 & \lambda+1 & c\end{array}\right) \approx \begin{matrix}L_2 \to L_2 - L_1\\ L_3 \to L_3-(\lambda+1)L_1\end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & 1 & 1 & a\\ -\lambda & \lambda & 0 & b-a\\ -\lambda^2-2\lambda & -\lambda & 0 & c-(\lambda+1)\end{array}\right)$$

$$\approx L_3 \to L_3 + L_2 = \left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & 1 & 1 & a\\ -\lambda & \lambda & 0 & b-a\\ -(\lambda^2+3\lambda) & 0 & 0 & b+c-a(\lambda+2)\end{array}\right)$$

من أجل $\lambda \in IR - \{0,-3\}$ فإنّ $rang(A)=rang(A|B)=3 \quad (\forall a,b,c \in IR)$

من أجل $\lambda = 0$ فإنّ $rang(A)=1 \wedge rang(A|B)=\begin{cases} 2: (b \neq a) \vee (c \neq a) \\ 1: \quad a=b=c \end{cases}$

من أجل $\lambda = -3$ فإنّ $rang(A)=2 \wedge rang(A|B)=\begin{cases} 2: \quad a+b+c=0 \\ 3: \quad a+b+c \neq 0 \end{cases}$

3. تكون الجملة (S) جملة كرامر إذا كان $rang(A)=rang(A|B)=3$ وحسب السّؤال 2 فإنّ ذلك يكون محققا من أجل $(\lambda,a,b,c) \in (IR-\{0,-3\}) \times IR^3$

الجملة (S) تقبل عددا غير منته من الحلول إذا كان $rang(A)=rang(A|B)<3$ ويكون ذلك محققا من أجل $(\lambda = 0 \wedge a=b=c) \vee (\lambda = -3 \wedge a+b+c=0)$

وأخيرا فإنّ الجملة (S) لا تقبل حلاّ إذا كان $rang(A) \neq rang(A|B)$ ويكون ذلك من أجل $(\lambda = 0 \wedge (a \neq b \vee a \neq c)) \vee (\lambda = -3 \wedge a+b+c \neq 0)$

4. في حالة $\lambda = 0 \wedge a=b=c$

لدينا مجهول رئيسي واحد ومجهولين إختياريين والجملة (S) تكافئ المعادلة $x=a-y-z$ والصّيغة العامّة للحلول هي إذن $(x,y,z)=(a-\alpha-\beta,\alpha,\beta)/(\alpha,\beta) \in IR^2$

في حالة $\lambda = -3 \wedge a+b+c=0$

لدينا مجهولين رئيسيين ومجهول واحد إختياري والجملة (S) تكافئ الجملة $\begin{cases} y+z=a+2x \\ -3y=(b-a)-3x \end{cases}$

التّي حلّها (بالتّعويض للخلف) $y=\dfrac{a-b}{3}+3x, \quad z=\dfrac{2a+b}{3}-x$

والصّيغة العامّة للحلول هي إذن $(x,y,z)=\left(\alpha, \dfrac{a-b}{3}+3\alpha, \dfrac{2a+b}{3}-\alpha\right) \quad (\alpha \in IR)$

سـلسلـة تــمــارين مقترحة

التّمرين 1

ناقش حسب قيم الوسائط $a,b,b_i\,(i=1,2,3,4)$ حلول الجمل التّالية في IR

$$\begin{cases} ax+(2-a)y+az=0 \\ (a+1)x+y+az=0 \\ (a-2)x+ay+az=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=b_1 \\ 2x+5y+3z=b_2 \\ x+8y=b_3 \end{cases}$$

التّمرين 2

نعتبر الجملة التّالية في IR

$$(S)\quad \begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ مجموعة حلول (S) تشكّل فضاءا شعاعيّا جزئيّا من IR^4 .
2. أوجد أساس لهذا الفضاء ثمّ استنتج بعده.

التّمرين 3: أوجد قيم a,b,c الّتي تجعل الجملة المتجانسة التّالية تقبل حلاّ غير الحلّ التّافه ثمّ أوجد الصّيغة العامّة للحلول في هذه الحالة:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$$

التـّـمريـن 4

نعتبـر في IR جمـلـة الـمعادلات الـخطّيّة التّـاليـة: $(a \in IR)$

$$(S)\quad \begin{cases} x-ay+z=a \\ -x+ay+z=1 \\ ax+ay-az=1 \end{cases}$$

1.أكـتـب (S) على شـكـل مـعـادلـة مـصـفـوفـيّة: $AX=B$.

2.ناقـش حسب قـيم الوسـيـط a : $rang(A)$ و $rang(A|B)$.

3.استـنـتـج قـيم a الـتّي تجـعـل الجـمـلـة (S) :

أ. جـمـلـة كـرامـر ، ب. تـقـبـل عـددا غـير منـتـه مـن الـحـلـول ، ج. لا تـقـبـل حـلاّ

4 . أوجد حلّ الجملة (S) في الـحـالـتين أ و ب.

التّمرين 5

نعتبر في IR جملة المعادلات الخطّيّة التّالية: $(a,b \in IR)$
$$(S)\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-3y+az=5 \\ 3x-4y+5z=b \end{cases}$$

1. أكتب (S) على شكل معادلة مصفوفيّة: $AX=B$.
2. أحسب $dét(A)$ ثمّ استنتج Ω مجموعة قيم a التّي من أجلها تقبل (S) حلاّ وحيدا.
3. من أجل $a \notin \Omega$ ؛ أوجد $rang(A)$ و ناقش حسب قيم b $rang(A|B)$.
4. استنتج قيم b التّي من أجلها تقبل (S) عددا غير منته من الحلول ثمّ أعط الصّيغة العامّة للحلول في هذه الحالة.

التّمرين 6

نعتبر في IR جملة المعادلات الخطّيّة التّالية: $(a,b \in IR)$
$$(S)\ \begin{cases} x+ay+z=1 \\ x+2ay+z=1 \\ x+3ay+z=b \end{cases}$$

1. أكتب (S) على شكل معادلة مصفوفيّة: $AX=B$.
2. أحسب $dét(A)$ ثمّ استنتج أنّ (S) لا تقبل حلاّ وحيدا.
3. ناقش حسب قيم الوسيطين a و b : $rang(A)$ و $rang(A|B)$.
4. استنتج قيم (a,b) التّي تجعل للجملة (S) حلاّ ثمّ أعط الصّيغة العامّة للحلول من أجل هذه القيم.

التّمرين 7: أوجد كثير الحدود من الدّرجة الثّالثة: $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ الذّي يمرّ بالنّقاط: $(2,1),(1,5),(-1,2),(-3,-2)$.

التّمرين 8

أوجد أربعة أعداد صحيحة، إذا أضفنا معدّل ثلاثة منها إلى العدد الرّابع نحصل على النّتائج: $29,23,21,17$.

المـــراجــــع

1. المدخل إلى الجبر الخطّي – ديوان المطبوعات الجامعيّة –
تأليف: ب.بن زاغو ترجمة: ع. زريق فرحات

2. محاضرات في الجبر الخطّي – ديوان المطبوعات الجامعيّة –
شيرزاد الطالباني ، نازدار اسماعيل

3. Cours de mathématiques Tome 1 (Algèbre) -Dunod Université-
J. Lelong-Ferrand & J.M. Arnaudiès

4. Algèbre 1/Structures fondamentales Préface de J.Dieudonné
S. Mac Lane & G. Birkhoff

5. Linear Algebra Springer-Verlag New York.Berlin.Heidelberg.Tokyo
Larry Smith