Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hamma Lakhdar El-Oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Emements de la topologie générale

Cours

Said Beloul

2020-2021

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on présente quelques éléments de la topologie, définitions, concepts et théorèmes. Ce travail s'adresse principalement aux étudiants de premième année master en (mathématiques), ainsi qu'à toute personne s'intéressant à la topologie. On décompose en quatres chapitre :

Dans le premier chapitre, ce polycopié on présente certaines notions et définitions de base.

Le deuxième chapitre est resérvé aux espaces compactes et leurs propriétés.

Pour le troisième chapitre, on donne un aperçu sur les espaces fonctions, critères de compacité dans des espaces de foctions.

Dans le dernier chapitre, on s'interesse aux quelques fondamentaux.

Chapitre 1

Espaces topologiques, espaces métriques

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit X un ensemble, une topologie sur X est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$X, \emptyset \in \tau$.*
2. *Pour tout $O_i \in \tau$, l'intersection $\cap_{i \in I} \in \tau$, où I est fini.*
3. *Pour tout $O_j \in \tau$, le réunion $\cup_{j \in J} \in \tau$.*

Exemple 1.1.
1. *Soit X un ensemble quelconque, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X, elle dite la topologie grossière (triviale).*
2. *Soit X un ensemble quelconque, $\tau = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, elle dite la topologie discrète.*

3. *Soit* $X = \{1, 2\}$*, alors les topologies sur* X *sont :* $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$*,* $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$*,*$\tau_3 = \{\emptyset, \{2\}, X\}$*,* $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{1, \{2\}, X\}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ *sont dits des ouverts, et on appelle un fermé le complementaire d'un ouvert.*

Définition 1.2. *Soient* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *deux topologies, on dit que* $\mathcal{T}_1$ *est moins fine que* $\mathcal{T}_2$ *si* $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

Exemple 1.2. *Soit* X *un ensemble, la topologie discrète est plus fine topologie peut être définie sur* X.

Définition 1.3. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$*,* $\mathcal{B}$ *est dite une base de la topologie* $\mathcal{T}$ *si pour tout ouvert non vide de* $\mathcal{T}$ *est un réunion d'ouverts appartenant à* $\mathcal{B}$.

Définition 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in X$*, on dit qu'une partie* $\mathcal{V}$ *de* X *est un voisinage de* x*, s'il existe un ouvert* O *tel que* $x \in O \subset \mathcal{V}$.

Exemple 1.3. $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle, tout ensemble* $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cup\{y\}$ *est un voisinage de* x.

1.1.2 Adhérence, intérieur et frontière d'une partie

Définition 1.5. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $x \in X$ *et* A *une prtie de* X.

1. *On dit que* x *est ahérent à* A *si tout voisinage de* x *rencontre* A*, c'est à dire*

$$\forall O \in \mathcal{V}x, O \cap A \neq \emptyset.$$

   On note par $\overline{A}$ *l'ahhérence de* A*, c'est l'ensemble de points adhérent à* A.

2. *On dit que x est intérieur à A si A est un voisinage de x et on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A.*
3. *On dit que x est un point frontiière à A si à la fois adhérent à A et à X/A, c'est àdire $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$.*
4. *On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point distinct de x, c'est à dire*
$$\forall V \in \mathcal{V}x, (V/\{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$
5. *On dit que x est un point isolé dans A s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.*

Quelques propriétés

1. *L'adhérent de A est le plus petit fermé qui contient A.*
2. *L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.*
3. *$Fr(A) = \overline{A} \backslash A$.*
4. *x est un point isolé dans X si $\{x\}$ est un ouvert.*
5. *Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors $A' = \emptyset$*

Proposition 1.1. *Soit A une patie d'un e.t $(X, \mathcal{T})$, on a :*
$$\overbrace{X\backslash A}^{\circ} = X\backslash\overline{A}, \quad \overline{X\backslash A} = X\backslash\mathring{A}$$

Démonstration. Puisque $A \subseteq \overline{A}$, alors $X\backslash\overline{A} \subseteq X\backslash A$, comme $X\backslash\overline{A}$ est un ouvert inclus dans $X\backslash A$. D'où $X\backslash\overline{A} \subseteq \overbrace{X\backslash A}^{\circ}$.
Reciproquement, soit $x \in \overbrace{X\backslash A}^{\circ}$, alors il exist un ouvert O, tel que $x \in O \subseteq X\backslash A$, ce qui implique $O \cap A = \emptyset$. Donc $x not \in A$, i.e., $x \in X\backslash\overline{A}$.
On a $\mathring{A} = X\backslash\overline{X\backslash A} = \overbrace{X\backslash(X\backslash A)}^{\circ}$, donc d'après la propriété précédente on trouve $X\backslash\mathring{A} = X\backslash(X\backslash\overline{X})$. ■

Définition 1.6. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$.*

1. *On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*
2. *On dit que X est séparable s'il existe une partie dénombrable et dense.*

1.1.3 La continuité dans des espaces topologiques

Définition 1.7. *Soient $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ des espace topologique, $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$ une fonction.*

1. *On dit que f est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subseteq V$.*
2. *On dit qu'une application continue f est un homoémorphisme de X sur Y si f est bijective et f^{-1}.*

Définition 1.8. *Soient $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ un espace topologique, et $f : X \subseteq Y$ une fonction.*

1. *On dit que f est fermée si l'image de tout fermé de X est fermé dans Y.*
2. *On dit que f est fermée si l'image de tout fermé de X est fermé dans Y.*

Proposition 1.2. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriété suivantes sont équivalentes.*

(i) *: f est une application ouverte.*

(ii) *: Pour toute partie A de X, on a $f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X, alors A est un ouvert de X et donc $f(A)$ est un ouvert de Y contenu dans $f(A)$, d'où $f(\mathring{A}) \subset \overbrace{f(A)}$. Donc on a $f(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$. Par conséquent, $f(A)$ est un ouvert de Y.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X, on a $U = \mathring{U}$, d'où $f(U) = f(\dot{U}) \subset \widetilde{f(U)}$. Done on a $f(U) = \overbrace{f(U)}$. Par conséquent, $f(U)$ est un ouvert de Y. ■

Proposition 1.3. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équrvalentes.*

(i) : f est fermée.

(ii) : Pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\longrightarrow$ (ii). Soit A uno partie de X, alors $f(\bar{A})$ cst un fermé de Y et on a $f(A) \subset f(\bar{A})$, d'où $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.
Prcuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit F un fermé de X, alors on a $\bar{F} = F$, d'où $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F')$. Donc on a $f(F) = \overline{f(F)}$. Par conséquent, $f(F)$ est un fermé de Y. ■

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Définitions

Définition 1.9. *Soit X un ensemble quelconque. On appelle distance sur E toute fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $d(x,x) = 0, \forall x \in X$ et $d(x,y) > 0, \forall x, y \in X, x \neq y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$ on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Le couple (X,d) est dit un espace métrique.

Proposition 1.4. *Soit (X,d) un espace métrique.*

1. *Pour tout $x, y, z \in X$, on a$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$.*

2. *Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$, on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$.*

Démonstration. D'après les deuxième et troisième propriétés d'une métrique, on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$ et $d(z,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$, d'où $d(x,z) -$

$d(z,y) \leq d(x,y)$ et $d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y)$ Par conséquent, on a $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$. Posons $I_n : d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$. Il est clair que I_1 est vraie. Posons que I_n est vraie, i.e. que l'on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$. Par l'inégalité trinngulaire, on a $d(x_1, x_{n+2}) \leq d(x_1, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})$, d'où :

$$d(x_1, x_{n+2}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i+1})$$

Whe I_{n+1} est vraie. Par conséquent, I_n est vraie pour tout $n \geq 1$. ■

Définition 1.10. *Soient (X,d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'enserable :*

$$B(a,r) = \{x \in X; d(a,x) < r\}$$

2. *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$B'(a,r) = \{x \in X; d(a,x) \leq r\}$$

3. *On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$S(a,r) = \{x \in X; d(a,x) = r\}.$$

1.2.2 Distences équivalentes

Définition 1.11. *Soit E un ensemble sur lequel sont définies deux distances d_1 et d_2. d_1 et d_2 sont dites topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie, c'est à dire si elles définissent les mêmes ouverts.*

Proposition 1.5. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur X. On suppose qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que*

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y), \quad \forall x,y \in X.$$

Alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. Soient O un ouvert de (X, d_1) et $a \in O$. Alors $\exists r > 0$ tel que $B_{d_1}(a, r) = \{x \in E : d_1(x, a) < r\} \subset O$. On pose $r_* = rC_1$ Si $d_2(a, x) < r_*$, alors $d_1(x, a) \frac{1}{C_1} d_2(x, a) < \frac{r_*}{C_1}$ et donc $d_1(x, a) < r$. D'où $x \in O$. Ainsi pour $r_* = rC_1$ on a

$$B_{d_2}(a, r_*) = \{x \in X : d_2(x, a) < r_*\} \subset O.$$

Donc O est ouvert dans (X, d_2). Réciproquement en permutant les rôles de d_1 et d_2 il vient que si O est un ouvert de (X, d_2) alors O est un ouvert de (X, d_1). Donc d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

■

1.2.3 Suites convergentes, suites de Cauchy

Définition 1.12. *Soient (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite de X.*

1. *On dit que (x_n) converge vers $l \in X$ et on note $x_n \to l$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\forall n \geq n_{alors}$ on a $x_n \in B(l, \varepsilon)$.*
2. *Une suite extraite (on dit aussï sous-suite) de (x_n) est de la forme $\left(x_{\phi(n)}\right)$ où[1] $\phi : \mathbb{N} \to N$ est strictement croissante.*
3. *Une suite $(x_n) \subset X$ est dite de Cauchy* sid $(x_n, x_m) \to 0$ *lorsque $n, m \to \infty$. Autrement dit si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$$

Proposition 1.6. *Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n) \subset X$. Si (x_n) converge vers l, alors toute sous-suite $\left(x_{k(n)}\right)$ de (x_n) converge vers l.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $\exists n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$ on a $d(x_n, l) < \varepsilon$. On a $1 \leq k(1) < k(2) < \cdots < k(n) < k(n+1) \ldots$ Par récurrence on a

$k(n) \geq n$. Alors $\forall n \geq n_\varepsilon$ $k(n) \geq n \geq n_\varepsilon$, donc $d\left(x_{k(n)}, l\right) < \varepsilon$. On a donc prouvé que $x_{k(n)} \to l$. ■

Proposition 1.7. *Soit(X, d)unespaceměrique.*

(*i*) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

(*ii*) *Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy admettant une suite extraite convergente. Alors la suite $(x_n) \subset X$ est convergente.*

(*iii*) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. (*i*) Si $x_n \to x$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d\left(x_n, x\right) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$ et donc

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq d\left(x_n, x\right) + d\left(x_m, x\right) \leq 2\varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

(*ii*) Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy et $\left(x_{\phi(n)}\right)$ une suite extraite telle que $x_{\phi(n)} \to x$ pour un $x \in X$. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d\left(x_n, x_m\right) \leq \varepsilon$, pour tout $n, m \geq n_0$. Aussi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(p) \geq n_0$. Par suite $d\left(x_{\phi(p)}, x\right) \leq \varepsilon$ et

$$d\left(x_n, x\right) \leq d\left(x_n, x_{\phi(p)}\right) + d\left(x_{\phi(p)}, x\right) \leq \varepsilon + \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

(*iii*) Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d\left(x_{n_0}, x_n\right) \leq 1, \forall n \geq n_0$. Donc

$$(x_n) = \left\{x_0, \cdots, x_{n_0-1}\right\} \cup \left(x_n\right)_{n \geq n_0}$$

est bornée.

■

Proposition 1.8. *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniforémément continue est de Cauchy.*

Démonstration. Soient $(X,d),(Y,d')$ des espaces mét riques, $f : X \longrightarrow Y$ une application uniformément continue et $(x_n)_n \geq 0$ une suite de Cauchy dans (X,d). Soit $d(x,z) < \eta$, puisque f est uniformément continue on ait $d'(f(x),f(z)) < \varepsilon$. Comme $(x_n)_n \geq 0$ est de Cauchy, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n,m \geq n_0$, on ait $d(x_n,x_m) < \eta$, d'où pour tout $n,m \geq$ on a $d(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$. Par conséquent $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (Y,d'). ■

1.2.4 Espaces métriques complets

Définition 1.13. *Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de (X,d) est convergente dans (X,d).*

Exemple 1.4. *(ii) Considérons $X =]0,1]$ muni de la distance usuelle $|\cdot|$ et $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \subset X$. Puisque $x_n \to 0$ dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$, (x_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$ et donc de Cauchy dans $(X,|\cdot|)$. Pourtant elle ne converge pas dans $(X,|\cdot|)$.*

Proposition 1.9. *Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $F \subset X$. Alors (F,d) est complet si et seulement si F est un fermé de X*

Démonstration. Supposons que F soit fermé dans X. Soit $(x_n) \subset F$ une suite de Cauchy. C'est aussi une suite de Cauchy de X et donc elle converge dans X car E est complet. Maintenant puisque $(x_n) \subset F$ et que F est fermé la limite est dans F et donc F est complet. Réciproquement supposons F complet. Soit $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$ dans X. La suite (x_n) est de Cauchy dans X et donc aussi dans F. Or, par hypothèse, les suites de Cauchy de F sont convergentes dans F et donc $x \in F$. Cela prouve que F est fermé. ■ *On dit que $f : (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$ est une application lipschitzienne s'il existe $L > 0$*

tel que $\forall x, y \in X_1$ *on a*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y).$$

On appelle la plus petite constante $L \in \mathbb{R}$ *qui vérifie cette propriété la constante de lipchitz.*

On dit que $f : (X, d) \to (X, d)$ *est contractante s'il existe* $k < 1$ *tel que* $\forall x, y \in X$ *on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

1.2.5 Applications aux espaces métriques complets

Principe de contraction de Banach

Théorème 1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $f : X \to X$ *une application contractante. Alors*

(i) Il existe un unique $x \in X$ *tel que* $f(x) = x$ *(on dit alors que* $x \in X$ *est un point fixe).*

(ii) Toute suite $(x_n) \subset X$ *qui satisfait* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* $x \in X$*.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite définie par $x_1 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n 1$. Soit $k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) k d(x, y)$. Alors

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq k^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\ &\leq \cdots k^{n-1} d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ fixe et soient $p m N_0$. Alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_m) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq k^{p-2} d(x_2, x_1) + k^{p-3} d(x_2, x_1) + \cdots + k^{m-1} d(x_2, x_1) \\ &= \left[k^{p-m-1} + k^{p-m-2} + \cdots k + 1\right] k^{m-1} d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Or

$$1+k+k^2+\cdots k^{p-m-1}\leq\sum_{j=0}^{\infty}k^j=\frac{1}{1-k}.$$

Donc $\forall p\geq m\geq N_0$ on a, comme, $k<1$

$$d\left(x_p,x_m\right)\leq k^{m-1}\frac{1}{1-k}d\left(x_2,x_1\right)\leq k^{N_0-1}\frac{1}{1-k}d\left(x_2,x_1\right)$$

Soit $\varepsilon>0$ fixé. Alors $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$k^{N_0-1}\frac{1}{1-k}d\left(x_2,x_1\right)<\varepsilon$$

Donc $\forall p\geq m\geq N_0$ on a $d\left(x_p,x_m\right)<\varepsilon$ et donc $(x_n)\subset X$ est de Cauchy. Comme (X,d) est. complet elle converge donc. Soit $x=\lim x_n$. Maintenant puisque $x_{n+1}=f\left(x_n\right),\forall n\geq 1$, en passant à la limite et en utilisant la continuité de f il vient que $x=f(x)$. Donc $x\in X$ est bien un point fixe de f. Pour l'unicité, si $x=f(x)$ et $y=f(y)$ on écrit $d(x,y)=d(f(x),f(y))\leq k(d(x,y))$ et comme $k<1$ il vient que $d(x,y)=0$ d'où $x=y$. ■

Théorème de Cantor

Théorème 1.2. *Soit (X,d) et (F_n) une suite de fermés non vides et décroissante de X telle que $\lim_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$. Alors l'intersection des $F_n, n\in\mathbb{N}$, est réduite à un point si et seulement si (X,d) est complet.*

Démonstration. Les F_n n'étant pas vides, on peut construire une suite (x_n) telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}, x_n\in F_n$. L'hypothèse (i) montre que $F_m\subset F_n$ pour tout $m\geq n$, si bien que pour tout $m\geq n, x_n$ et x_m sont dans F_n. par suite, pour tout $m\geq n$, on a

$$\mathrm{d}\left(x_n,x_m\right)\leq\delta(F_n).$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc la suite (x_n) est de Cauchy. Soit ℓ sa limite et soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. la suite

$(x_m)_{m\geq n}$ est une suite de F_n qui converge vers ℓ. Comme F_n est un fermé de X, la limite ℓ appartient à F_n et par suite ℓ appartient à l'intersection des $F_n, n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, soit x dans l'intersection des F_n. Puisque x et ℓ sont dans F_n pour tout n, on a

$$0 \leq \mathrm{d}(x, \ell) \leq \delta(F_n)$$

Le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $x = \ell$.

Soit $(x_n) \subset E$ une suite de Cauchy. Considérons les ensembles, pour $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}}$$

La suite (F_n) est constituée de fermés et elle est décroissante. Aussi comme $(x_n) \subset E$ est de Cauchy on a que diam $F_n \to 0$ si $n \to \infty$. Par hypothèse il vient donc que

$$\cap_{n=0}^{\infty} F_n$$

comporte un et un seul point, que l'on note $x \in X$. Clairement alors $x_n \to x$.

■

1.2.6 Espaces de Baire

Soit X un espace topologique, on dit dit que X est un espace de Baire si pour tout des ouverts O_n denses dans X, l'intersection est dense, c'est àdire $\overline{\cap_{n\geq 0} O_n} = X$.

Exemple 1.5. *L'espace topologique discrète est un espace de Baire.*

Corollaire 1.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Si (F_n) est une suite de fermés d'intérieur vide de X, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. Il suffit de passer au complémentaire. ■

Théorème 1.3. *Soit (X, d) un espace metrique complet. Alors X est une espace de Baire.*

Démonstration. Soit $(O_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts de X et denses dans X. Pour montre que $\cap_0 O_n$ est dense dans X, il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide V de X, $V \cap \bigcap_{n\geq 0} O_n \neq \emptyset$. Comme O_0 eat dense dans X, alors $V \cap O_0 \neq 0$, et soit $x_0 \in V \cap O_0$. Comme $V \cap O_0$ est un ouvert de X, il existe $r_0 > 0$ tel que $r_0 \leq 1$ et $B(x_0, 2r_0) \subset V \cap O_0$. On construit, par récurrence sur n, une suite $(x_n) n \geq 0$ dans X et une suite $(r_n)_n \geq 0$ de nombres réels strictement positifs tels que $r_n \leq 2^{-\pi}$ et $B(x_n, 2r_n) \subset O_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, pour tout $n \geq 1$. En effet, on a déja construit x_0 et r_0 et supposons x_n et r_n construits ; comme O_{n+1} est dense dans X, il existe $x_{n+1} \in On + 1 \cap B(x_n, r_n)$ théorème de Cantor, on a $\cap_n B_n \neq \emptyset$. Or $B_0 \subset V$ et, pour tout $n \geq 0$, on a $B_n \subset O_n$ donc $\bigcap_{n\geq 0} B_n \subset V \cap \bigcap_{n\geq 0} O_n$. Par conséquent, on a $V \cap \bigcap_{n\geq 0} O_n \neq 0$. Donc $\bigcap_{n\geq 0} O_n$ est dense dans X. ■