2 Modules sur un anneau principal :

Les anneaux considérés sont intègres et commutatif

2.1 *Définition :*

Soit E un A-module et S une partie de E. On appelle annulateur de S l'ensemble $\operatorname{Ann}(\mathrm{S})=\{a\in \mathrm{A};\forall x\in \mathrm{S}: ax=0\}$.

2.2 *Proposition :*

i. $\operatorname{Ann}(\mathrm{S})$ est un idéal de A.

ii. Si $(\mathrm{E}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de sous module de E, alors :

$$\operatorname{Ann}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{E}_i\right)=\operatorname{Ann}\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{E}_i\right)=\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\operatorname{Ann}(\mathrm{E}_i)$$

iii. $\operatorname{Ann}(\mathrm{E})=\mathrm{A}\Leftrightarrow \mathrm{E}=\{0\}$.

iv. Si $x\in\mathrm{E}$: $\operatorname{Ann}(x)=\{0\}\Leftrightarrow x$ libre

v. Si E est un $\mathbb{Z}-$module fini, c'est-à-dire un groupe commutatif fini, et si $\mathrm{S}\subset\mathrm{E}$ alors :

$\operatorname{Ann}(\mathrm{S})=(m)$; m étant le PPCM des périodes des éléments de S.

Démonstration : laisser au lecteur.

2.3 *Proposition :*

Soit E un A-module, $\mathrm{B}=\mathrm{A}/\operatorname{Ann}(\mathrm{E})$. Il existe une structure de B-module sur E telle que si $a\in\mathrm{A}$ et $x\in\mathrm{E}$: $\bar{a}x=ax$.

Démonstration :

Montrons que la loi externe est bien définie$\left(\bar{a}=\bar{b}\Rightarrow ax=bx\right)$, le reste est laissé au lecteur :

$\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow\overline{(a-b)}=\bar{0}\Leftrightarrow a-b\in\operatorname{ann}(\mathrm{E})\Rightarrow\forall x\in\mathrm{E},\ (a-b)x=0\Rightarrow\forall x\in\mathrm{E}, ax=bx$.

2.4 *Exemple :*

Si A est un anneau principal, p un élément irréductible, E un A-module tel que $(p)=\operatorname{Ann}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{K}=\mathrm{A}/(p)$ est un corps car (p) est maximal et E a une structure d'espace vectoriel sur K.

2.5 *Définition :*

Un A-module E est dit monogène s'il est engendré par un ensemble à un élément.

2.6 *Proposition :*

i. Si I est un idéal de A, A/I est monogène et $\mathrm{I}=\operatorname{Ann}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$.

ii. Si E est monogène alors $\mathrm{E}\simeq\mathrm{A}/\operatorname{Ann}(\mathrm{E})$.

Démonstration :

i. A/I est engendré par $\bar{1}$ car $\bar{\mathrm{a}}=a\bar{1}$.

ii. Soit x un générateur de E, alors $\mathrm{Ann}(\{x\}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{E})$

Considérons $f : \mathrm{A} \to \mathrm{E}$ définie par $f(a) = ax$.

f est surjective et $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ann}(\{x\}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{E})$ d'où : $\mathrm{E} \simeq \mathrm{A}/\mathrm{Ann}(\mathrm{E})$.

2.7 *Définition :*

Soit $c \in \mathrm{A}$. L'application $h_c : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $h_c(x) = cx$ est évidemment A-linéaire. Elle est appelée l'homothétie de rapport c. On note $\mathrm{E}(c) = \mathrm{Ker}h_c$ et $c\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,h_c$.

2.8 *Proposition :*

Soit E un A-module, $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ des sous modules de E tels que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ alors $\mathrm{E}(c) = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i(c)$ et $c\mathrm{E} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} c\mathrm{E}_i$.

Démonstration :

Montrons que $\mathrm{E}(c) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i(c)$:

Si $x \in \mathrm{E}(c)$ alors $x = \sum x_i \quad x_i \in \mathrm{E}_i, \forall i \in \mathrm{I}$ et $cx = 0$ d'où :

$c\sum x_i = \sum cx_i = 0$, et $cx_i \in \mathrm{E}_i, \forall i \in \mathrm{I}$ donc $cx_i = 0, \forall i \in \mathrm{I}$.

$\Rightarrow x_i \in \mathrm{E}_i(c), \forall i$ et $\mathrm{E}(c) \subset \sum \mathrm{E}_i(c)$.

Si $x \in \sum \mathrm{E}_i(c)$ alors $x = \sum x_i, x_i \in \mathrm{E}_i(c), \forall i \in \mathrm{I}$.

$\Rightarrow \quad x = \sum x_i, cx_i = 0, \forall i \in \mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad cx = \sum cx_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{E}(c)$.

D'où $\mathrm{E}(c) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i(c)$.

Montrons que la somme est directe :

$\sum x_i = 0$ et $x_i \in \mathrm{E}_i(c), \forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow \sum x_i = 0$ et $x_i \in \mathrm{E}_i, \forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow x_i = 0, \forall i \in \mathrm{I}$.

La démonstration de $c\mathrm{E} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} c\mathrm{E}_i$ est laissée au lecteur.

2.9 *Proposition :*

Soit A est un anneau principal, $a \in \mathrm{A}^*$ et p irréductible, alors :

i. si $p \mid a$ et $a = pb$ on a : $p\,\mathrm{A}/(a) \simeq \mathrm{A}/(b)$ (isomorphisme de A-module).

ii. si p ne divise pas a on a : $p\,\mathrm{A}/(a) \simeq \mathrm{A}/(a)$.

Démonstration :

i. Soit $f : \mathrm{A} \to p(\mathrm{A}/(a))$ définie par $f(x) = p\bar{x}$ alors :

- f est surjective.
- $x \in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow p\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow px \in (a) \Leftrightarrow a \mid px$ or $a = pb$ donc $pb \mid px \Leftrightarrow b \mid x \Leftrightarrow x \in (b)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}f = (b)$ et $p\,\mathrm{A}/(a) \simeq \mathrm{A}/(b)$.

ii. Soit $\bar{x} \in \mathrm{A}/(a)$

p et a étant étranger : $1 = pc + ad$ donc $x = pcx + adx$ et $\bar{x} = p\overline{cx}$.

2.10 ***Proposition :***

Soit A un anneau principal, $a \in A^*$ et p irréductible, alors :

i. si $p \mid a$ alors ${}^{A}\!/_{(a)}(p) \simeq A/(p)$

ii. si p ne divise pas a on a : ${}^{A}\!/_{(a)}(p) \simeq 0$.

Démonstration :

Considérons l'homothétie $h_p : A/(a) \to A/(a)$; $\mathrm{Ker}h_p = {}^{A}\!/_{(a)}(p)$

i. $\bar{x} \in \mathrm{Ker}h_p \Leftrightarrow p\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow px \in (a)$ or $p \mid a$ donc $a = pb$.

$px \in (a) \Leftrightarrow x \in (b) \quad (b) \supset (a)$ d'où :

${}^{A}\!/_{(a)}(p) = \mathrm{Ker}h_p = (b)/(a)$

Soit $g : A \to (b)/(a)$ tel que $g(x) = b\bar{x}$.

- g est évidemment surjective.
- $x \in \mathrm{Ker}g \Leftrightarrow b\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow bx \in (a) \Leftrightarrow a \mid bx \Leftrightarrow bp \mid px \Leftrightarrow p \mid x \Leftrightarrow x \in (p)$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}g = (p)$ et ${}^{A}\!/_{(a)}(p) = (b)/(a) \simeq A/(p)$

ii. $\bar{x} \in \mathrm{Ker}h_p \Leftrightarrow p\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow px \in (a) \Leftrightarrow a \mid px \Leftrightarrow a \mid x \Leftrightarrow x \in (a) \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

2.11 ***Théorème de Gauss :***

Si $a \mid px$ et a premier à p alors $a \mid x$.

En effet $1 = au + pv$ donc $x = aux + pvx$.

$a \mid px \Leftrightarrow px = at$ d'où : $x = aux + avt = a(ux + vt) \Rightarrow a \mid x$.

2.12 ***Proposition :***

Soit E un module sur un anneau A principal et p un élément irréductible de A, alors :

$\mathrm{Ann}(E(p)) = (p)$ si $E \neq \{0\}$.

$\mathrm{Ann}(E(p)) = A$ si $E = \{0\}$.

$E(p)$ a une structure d'espace vectoriel sur $A/(p)$ telle que :

si $a \in A$ et $x \in E(p)$ $\bar{a}x = ax$.

Démonstration :

Si Si $E \neq \{0\}$ et si $x \in E(p)$ alors :

$\forall a \in A,\ (ap)x = a(px) = 0$ d'où $(p) = Ap \subset \mathrm{Ann}(E(p))$.

$A \neq \mathrm{Ann}(E(p))$ car $E \neq \{0\}$ or (p) est un idéal maximal de A donc $(p) =$ $\mathrm{Ann}(p)$.

Le reste est trivial.

2.13 ***Proposition définition :***

Soit A un anneau commutatif et intègre, M un A-module et

$T = T(M) = \{x \in M,\ \exists a \in A,\ a \neq 0 \text{ et } ax = 0\}$.

Alors T est un sous module de M appelé sous module de torsion de M.
Démonstration :
$T \neq \emptyset$ car $0 \in T$.
Si $x, y \in T$ $(ax = 0, a \neq 0$ et $by = 0, b \neq 0)$ et si $c \in A$:
$ab(x - y) = 0$ et $ab \neq 0$ d'où $x - y \in T$.
$a(cx) = c.ax = 0$ donc $cx \in T$.

2.14 *Définition :*

Si $T(M) = M$, on dit que M est un module de torsion.
Si $T(M) = \{0\}$, on dit que M est sans torsion.

2.15 *Proposition :*

Si M est un module libre sur un anneau A intègre, alors M est sans torsion.
Démonstration :
Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de M ; si $x \in M : x = \sum_{i \in I} a_i e_i$.
Si x non libre, il existe $b \neq 0$ avec $bx = 0$.
$bx = 0 = \sum b a_i e_i \Rightarrow b a_i = 0, \forall i \in I \Rightarrow a_i = 0, \forall i \in I \Rightarrow x = 0.$

2.16 *Proposition :*

Si M un module sur un anneau intègre A et T le sous module de torsion de M, alors (M/T) est sans torsion.
Démonstration :
Soit $\bar{x}$ non libre et $a \neq 0$ tel que $a\bar{x} = \bar{0}$ donc $\overline{ax} = \bar{0}$.
$a\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow ax \in T \Rightarrow \exists b \in A, b \neq 0, bax = 0 \Rightarrow ba \neq 0$ et $bax = 0 \Rightarrow x \in T \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$.